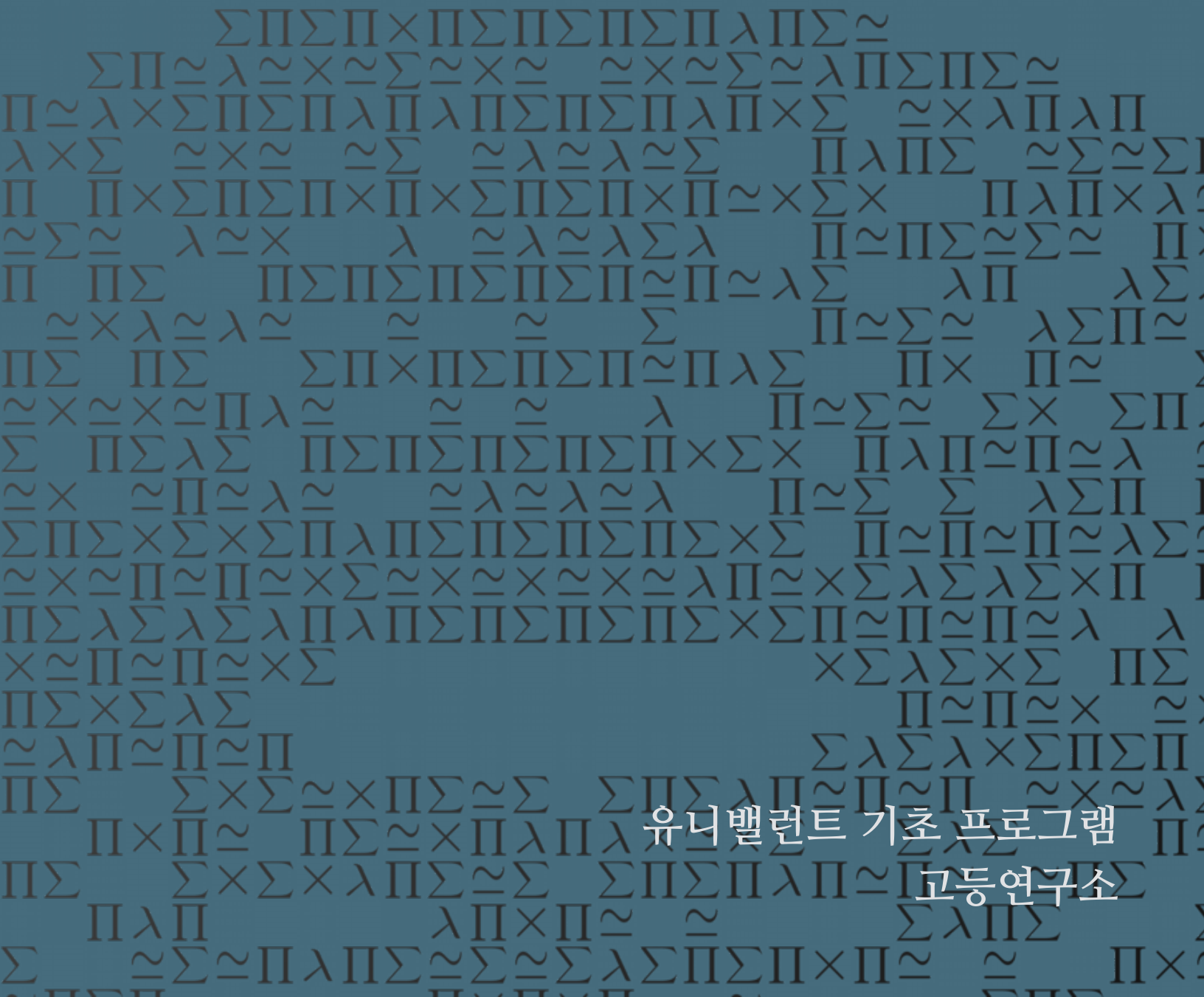
호모토피 타입 이론

수학의 유니밸런트 기초

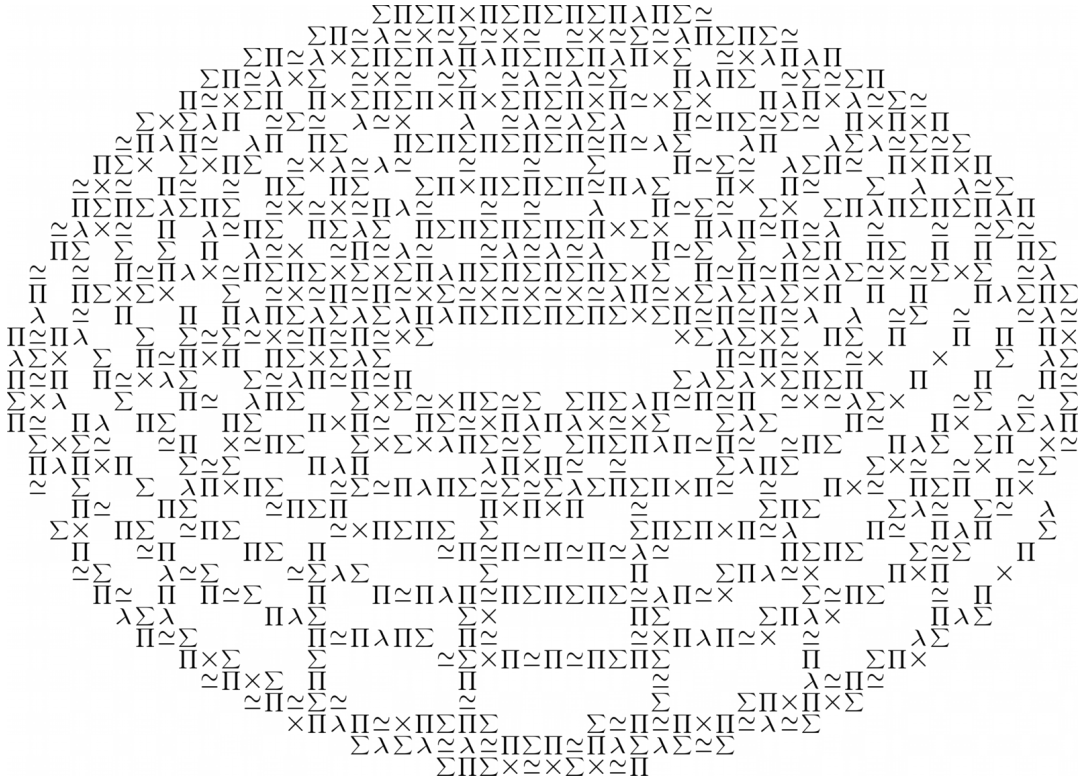


유니밸런트 기초 프로그램
고등연구소

호모토피 타입 이론

수학의 유니밸런트 기초

유니밸런트 기초 프로그램
고등연구소



비공식 한국어 번역
원저작자: The Univalent Foundations Program.
이 번역은 yeokja와 Anthropic 사의 claude-opus-5-5 모델을 활용하여 작성했으며,
학습을 모두 비허용한 상태로 작업하였습니다.
원문과 번역은 CC BY-SA 3.0으로 배포합니다.
원저작자가 이 번역을 검토하거나 보증하지 않습니다.
https://github.com/yeokja/yeokja/tree/main/projects/hott

"호모토피 타입 이론: 수학의 유니밸런트 기초"
© 2013 유니밸런트 기초 프로그램

책 버전: 578b85cc8d58-ko

MSC 2010 분류: 03-02, 55-02, 03B15

이 저작물은 **크리에이티브 커먼즈 저작자표시-동일조건변경허락** 3.0 Unported **라이선스**에 따라 이용이 허락됩니다. 이 라이선스의 사본을 보려면 http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/을 방문하십시오.

이 책은 http://homotopytypetheory.org/book/에서 무료로 이용할 수 있습니다.

감사의 글

고등연구소의 아낌없는 지원 외에도, 이 책의 일부 기여자는 다음 기관과 연구비로부터 부분적으로 또는 전액 지원을 받았습니다:

- 고등연구소 회원 협회: 고등연구소에 대한 지원금
- 슬로베니아 공화국 연구청(Agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije): P1–0294, N1–0011.
- 미 공군 과학연구청(Air Force Office of Scientific Research): FA9550-11-1-0143 및 FA9550-12-1-0370.

  이 자료는 위 연구비에 따라 AFOSR의 지원을 받은 연구에 부분적으로 기반합니다. 이 간행물에 표현된 모든 의견, 연구 결과, 결론 또는 권고 사항은 저자(들)의 것이며, 반드시 AFOSR의 견해를 반영하는 것은 아닙니다.

- 영국 공학·물리과학 연구위원회(Engineering and Physical Sciences Research Council): EP/G034109/1, EP/G03298X/1.
- 유럽 연합(European Union) 제7차 프레임워크 프로그램 보조금 협약 nr. 243847 (ForMath)에 따른 지원입니다.
- 미국 국립과학재단(National Science Foundation): DMS-1001191, DMS-1100938, CCF-1116703, 및 DMS-1128155.

  이 자료는 위 연구비에 따라 미국 국립과학재단의 지원을 받은 연구에 부분적으로 기반합니다. 이 자료에 표현된 모든 의견, 연구 결과, 결론 또는 권고 사항은 저자(들)의 것이며, 반드시 미국 국립과학재단의 견해를 반영하는 것은 아닙니다.

- 시모니 기금(The Simonyi Fund): 고등연구소에 대한 지원금

서문

IAS 유니밸런트 기초 특별 연구년

수학의 유니밸런트 기초에 관한 특별 연구년이 2012-13년에 고등연구소(Institute for Advanced Study) 수학부에서 Steve Awodey, Thierry Coquand, Vladimir Voevodsky의 주관으로 개최되었습니다. 공식 참가자는 다음과 같습니다.

Peter Aczel	Eric Finster	Alvaro Pelayo
Benedikt Ahrens	Daniel Grayson	Andrew Polonsky
Thorsten Altenkirch	Hugo Herbelin	Michael Shulman
Steve Awodey	André Joyal	Matthieu Sozeau
Bruno Barras	Dan Licata	Bas Spitters
Andrej Bauer	Peter Lumsdaine	Benno van den Berg
Yves Bertot	Assia Mahboubi	Vladimir Voevodsky
Marc Bezem	Per Martin-Löf	Michael Warren
Thierry Coquand	Sergey Melikhov	Noam Zeilberger

다음 학생들도 참여했으며, 이들의 참여 역시 그에 못지않게 소중했습니다.

Carlo Angiuli	Guillaume Brunerie	Egbert Rijke
Anthony Bordg	Chris Kapulkin	Kristina Sojakova

이 밖에도 학생 방문자를 포함한 다음의 단기 및 장기 방문자들이 있었으며, 이들이 특별 연구년에 한 기여 역시 필수적이었습니다.

Jeremy Avigad	Richard Garner	Nuo Li
Cyril Cohen	Georges Gonthier	Zhaohui Luo
Robert Constable	Thomas Hales	Michael Nahas
Pierre-Louis Curien	Robert Harper	Erik Palmgren
Peter Dybjer	Martin Hofmann	Emily Riehl
Martín Escardó	Pieter Hofstra	Dana Scott
Kuen-Bang Hou	Joachim Kock	Philip Scott
Nicola Gambino	Nicolai Kraus	Sergei Soloviev

이 책에 관하여

우리는 처음부터 책을 쓰려고 했던 것이 아닙니다. 이 책은 기계가 검사할 수 있는 형식적 증명을 보완하기 위해, 사람이 읽고 이해할 수 있는 새로운 양식의 "비형식적 타입 이론"을 개발하려 한 우리의 집합적인 시도에서 비롯되었습니다. 유니밸런트 기초는 컴퓨터 증명 보조기에서 구현할 수 있는 수학의 기초라는 착상과 밀접하게 연결되어 있습니다. 그러한 형식화가 이 책에 포함되어 있지는 않지만, 여기에 제시된 내용의 상당 부분은 실제로 먼저 증명 보조기 안에서 완전히 형식화된 환경에서 이루어졌고, 나중에야 "비형식화"되어 지금 여러분 앞에 있는 서술에 이르렀습니다 — 이는 형식화된 수학에서의 일반적인 사정이 놀랍게도 역전된 것입니다.

위에 이름을 올린 분들은 모두 아이디어나 말, 또는 행동으로 특별 연구년에 — 따라서 이 책에도 — 기여했습니다. 그해 내내 이어진 협력의 정신은 참으로 특별했습니다.

고등연구소에 특별히 감사드립니다. 고등연구소가 없었다면 이 책은 분명 결코 세상에 나오지 못했을 것입니다. 고등연구소는 지적 자극과 우호적인 분위기, 든든한 지원을 두루 갖춘 곳으로서, 이 새로운 수학 분야를 만들어 내기에 이상적인 환경임이 드러났습니다. 이 특별한 분위기의 자취가 이 책의 지면에, 그리고 이 새로운 연구 분야의 앞으로의 발전 속에 남아 있기를 바랍니다.

유니밸런트 기초론 프로그램
고등연구소
프린스턴, 2013년 4월

목차

서론 1

I 기초 15

1 타입 이론 17
1.1 타입 이론과 집합론 . . . 17
1.2 함수 타입 . . . 20
1.3 유니버스와 족 . . . 23
1.4 의존 함수 타입(Π-타입) . . . 24
1.5 곱 타입 . . . 25
1.6 의존 쌍 타입(Σ-타입) . . . 29
1.7 쌍대곱 타입 . . . 32
1.8 불리언 타입 . . . 33
1.9 자연수 . . . 35
1.10 패턴 매칭과 재귀 . . . 38
1.11 타입으로서의 명제 . . . 39
1.12 동일성 타입 . . . 45
주 . . . 52
연습문제 . . . 54

2 호모토피 타입 이론 57
2.1 타입은 고차 그루포이드입니다 . . . 60
2.2 함수는 함자입니다 . . . 68
2.3 타입 족은 올뭉치입니다 . . . 69
2.4 호모토피와 동치 . . . 73
2.5 타입 형성자의 고차 그루포이드 구조 . . . 77
2.6 데카르트 곱 타입 . . . 78
2.7 Σ-타입 . . . 81
2.8 단위 타입 . . . 83
2.9 Π-타입과 함수 외연성 공리 . . . 83
2.10 유니버스와 유니벌런스 공리 . . . 86
2.11 동일성 타입 . . . 88

2.12 쌍대곱 . . . 90
2.13 자연수 . . . 92
2.14 예시: 구조의 동일성 . . . 94
2.15 보편 성질 . . . 97
주 . . . 99
연습문제 . . . 101

3 **집합과 논리** 105
3.1 집합과 n-타입 . . . 105
3.2 타입으로서의 명제? . . . 107
3.3 단순 명제 . . . 109
3.4 고전 논리 대 직관주의 논리 . . . 111
3.5 부분집합과 명제적 크기 재조정 . . . 112
3.6 단순 명제의 논리 . . . 114
3.7 명제 절단 . . . 115
3.8 선택 공리 . . . 116
3.9 유일 선택 원리 . . . 118
3.10 명제는 언제 절단됩니까? . . . 119
3.11 축약 가능성 . . . 121
주 . . . 123
연습문제 . . . 124

4 **동치** 127
4.1 준역원 . . . 128
4.2 반수반 동치 . . . 130
4.3 양쪽 가역 사상 . . . 134
4.4 축약 가능한 섬유 . . . 134
4.5 동치의 정의에 관하여 . . . 136
4.6 전사와 매장 . . . 136
4.7 동치의 닫힘 성질 . . . 137
4.8 대상 분류자 . . . 140
4.9 유니밸런스는 함수 외연성을 함의합니다 . . . 142
주 . . . 144
연습문제 . . . 144

5 **귀납법** 147
5.1 귀납적 타입 소개 . . . 147
5.2 귀납적 타입의 유일성 . . . 150
5.3 W-타입 . . . 152
5.4 귀납적 타입은 시작 대수입니다 . . . 155
5.5 호모토피 귀납적 타입 . . . 158
5.6 귀납적 정의의 일반적인 구문 . . . 161
5.7 귀납적 타입의 일반화 . . . 165
5.8 동일성 타입과 동일성 체계 . . . 167

주 . . . 171
연습문제 . . . 171

6 고차 귀납적 타입 175
6.1 서론 . . . 175
6.2 귀납 원리와 의존 경로 . . . 177
6.3 구간 . . . 181
6.4 원과 구면 . . . 182
6.5 현수 . . . 184
6.6 세포 복합체 . . . 188
6.7 허브와 스포크 . . . 189
6.8 푸시아웃 . . . 190
6.9 절단 . . . 193
6.10 몫 . . . 196
6.11 대수 . . . 201
6.12 평탄화 보조정리 . . . 205
6.13 고차 귀납적 정의의 일반적인 구문 . . . 210
주 . . . 212
연습문제 . . . 213

7 호모토피 n-타입 215
7.1 n-타입의 정의 . . . 215
7.2 동일성 증명의 유일성과 헤드베리 정리 . . . 219
7.3 절단 . . . 222
7.4 n-타입의 쌍대극한 . . . 228
7.5 연결성 . . . 232
7.6 직교 분해 . . . 236
7.7 모달리티 . . . 241
주 . . . 245
연습문제 . . . 246

II 수학 251

8 호모토피 이론 253
8.1 $\pi_1(S^1)$ . . . 256
8.2 현수의 연결성 . . . 264
8.3 n-연결 공간의 $\pi_{k\leq n}$과 $\pi_{k<n}(\mathbb{S}^n)$ . . . 266
8.4 섬유열과 긴 완전열 . . . 266
8.5 호프 올뭉치 . . . 271
8.6 프로이덴탈 현수 정리 . . . 277
8.7 판 캄펀 정리 . . . 283
8.8 화이트헤드 정리와 화이트헤드 원리 . . . 291
8.9 인코드-디코드 방법의 일반적 서술 . . . 295

8.10 추가 결과 . . . 296
주 . . . 297
연습문제 . . . 298

9 **범주론** 301
9.1 범주와 준범주 . . . 302
9.2 함자와 변환 . . . 305
9.3 수반 . . . 309
9.4 동치 . . . 309
9.5 요네다 보조정리 . . . 315
9.6 엄격한 범주 . . . 318
9.7 ŧ-범주 . . . 319
9.8 구조 동일성 원리 . . . 320
9.9 Rezk 완비화 . . . 323
주 . . . 330
연습문제 . . . 331

10 **집합론** 333
10.1 집합의 범주 . . . 333
10.2 기수 . . . 342
10.3 순서수 . . . 345
10.4 고전적 정렬순서 . . . 351
10.5 누적 위계 . . . 354
주 . . . 359
연습문제 . . . 360

11 **실수** 363
11.1 유리수체 . . . 364
11.2 Dedekind 실수 . . . 364
11.3 Cauchy 실수 . . . 371
11.4 Cauchy 실수와 Dedekind 실수의 비교 . . . 389
11.5 구간의 콤팩트성 . . . 390
11.6 초현실수 . . . 396
주 . . . 407
연습문제 . . . 408

부록 411

A **형식적 타입 이론** 413
A.1 첫 번째 제시 방식 . . . 415
A.2 두 번째 제시 방식 . . . 419
A.3 호모토피 타입 이론 . . . 425
A.4 기초 메타이론 . . . 426

주 428

참고문헌 429

기호 색인 437

찾아보기 443

서론

호모토피 타입 이론은 여러 분야의 측면을 놀라운 방식으로 결합하는 새로운 수학 분야입니다. 이 이론은 최근에 발견된 호모토피 이론과 타입 이론 사이의 연관성에 기반합니다. 호모토피 이론은 대수적 위상수학과 호몰로지 대수학에서 발전한 분야로 고차 범주론과도 관련되어 있으며, 타입 이론은 수리논리학과 이론 컴퓨터 과학의 한 분야입니다. 현재 두 분야 사이의 연관성이 집중적으로 연구되고 있지만, 이 연관성은 완전히 이해하기까지 더 많은 시간과 노력이 필요한 주제의 시작에 불과하다는 점이 점점 더 분명해지고 있습니다. 이 주제는 구면의 호모토피 군, 타입 검사 알고리즘, 약한 ∞-그루포이드의 정의처럼 겉보기에는 서로 동떨어진 주제들에 걸쳐 있습니다.

호모토피 타입 이론은 수학의 기초 자체에도 새로운 아이디어를 가져옵니다. 한편으로는 Voevodsky의 섬세하고 아름다운 유니밸런스 공리가 있습니다. 유니밸런스 공리는 특히 동형인 구조들을 동일시할 수 있음을 함의합니다. 이 원리는 기존 기초론의 "공식적인" 교의와 양립하지 않는데도 수학자들이 평소 연구에서 기꺼이 사용해 온 것입니다. 다른 한편으로는 고차 귀납적 타입이 있습니다. 고차 귀납적 타입은 구면, 원기둥, 절단, 국소화 등 호모토피 이론의 기본적인 공간과 구성 일부를 직접적이고 논리적으로 기술합니다. 두 아이디어 모두 고전적인 집합론적 기초에서는 직접 포착할 수 없지만, 호모토피 타입 이론 안에서 결합하면 완전히 새로운 종류의 "호모토피 타입의 논리"가 가능해집니다.

이는 수학의 기초에 대한 새로운 구상을 제시합니다. 이 구상은 내재적인 호모토피적 내용을 지니고, 수학의 대상을 "불변적"으로 이해하며 — 현업 수학자에게 실질적인 도움이 될 수 있는 편리한 기계 구현도 갖추고 있습니다. 이것이 바로 유니밸런트 기초론 프로그램입니다. 이 책은 유니밸런트 기초론의 기본을 처음으로 체계적으로 설명하고 이 새로운 방식의 추론을 보여 주는 예시를 모으기 위해 쓰였습니다 — 다만 독자가 형식 논리를 알거나 배울 필요는 없으며, 컴퓨터 증명 보조기를 사용할 필요도 없습니다.

호모토피 타입 이론은 신생 분야이며 유니밸런트 기초론은 아직 한창 진행 중인 작업이라는 점을 강조합니다. 이 책은 완성된 체계를 다듬어 설명한 것이 아니라, 집필 시점에 이 분야의 일부만을 포착한 "스냅숏"으로 보아야 합니다. 뒤에서 간략히 논의하겠지만, 호모토피 타입 이론에는 아직 완전히 이해되지 않은 측면이 많습니다 — 이 책에서 전혀 다루지 않은 측면도 있습니다. 최종적인 이론은 거의 확실히 이 책에서 기술하는 이론과 똑같은 모습은 아니겠지만, 분명히 적어도 그만큼 유능하고 강력할 것입니다. 따라서 우리는 유니밸런트 기초론이 결국 대부분의 수학자가 하는 비형식화된 수학의 "암묵적 기초"로서 집합론을 대신할 수 있는 실용적인 대안이 되리라고 믿습니다.

타입 이론

타입 이론은 원래 Bertrand Russell이 [Rus08], 당시 연구되던 수학의 논리적 기초에서 발생하는 역설을 차단하기 위한 장치로 고안했습니다. 이후 수십 년 동안 많은 사람이 이를 더 발전시켰으며, 특히 Church [Chu40, Chu41]는 이를 자신의 λ-계산과 결합했습니다. 고전 수학의 기초로는 집합론이

더 관례적이어서 타입 이론이 일반적으로 그 기초로 여겨지지는 않지만, 타입 이론은 여전히 특히 컴퓨터 과학과 프로그래밍 언어 이론에서 수많은 응용을 가지고 있습니다 [Pie02]. Per Martin-Löf [ML98, ML75, ML82, ML84] 등은 Church의 타입 체계를 "술어적"으로 수정한 체계를 개발했으며, 이 체계는 현재 보통 의존 타입 이론, 구성적 타입 이론, 직관주의적 타입 이론, 또는 간단히 Martin-Löf 타입 이론이라고 불립니다. 이것이 이 책에서 다루는 체계의 기반이며, 이 체계는 원래 구성적 수학을 형식화하기 위한 엄밀한 틀로 의도되었습니다. 이하에서는 "타입 이론"이라는 말을 이 체계와 그와 유사한 체계를 구체적으로 가리키는 데 자주 사용하겠지만, 학문 분야로서의 타입 이론은 훨씬 더 넓습니다(타입 이론의 역사에 관해서는 [Som10, KLN04]를 참고하십시오).

타입 이론에서는 집합론과 달리 프로그래밍 언어에서 사용하는 데이터 타입과 비슷한 타입이라는 원시 개념을 사용하여 대상을 분류합니다. 정교하게 구조화된 이러한 타입을 사용하면 분류되는 대상의 명세를 상세히 표현할 수 있으며, 이로부터 그 대상들에 관한 추론 원리가 생겨납니다. 아주 간단한 예를 들면, 곱 타입 $A \times B$의 대상은 (a,b) 꼴임이 알려져 있으므로, 이를 어떻게 구성하고 어떻게 분해하는지를 자동으로 알 수 있습니다. 마찬가지로 함수 타입 $A \to B$의 대상은 타입 A의 대상으로 매개화된 타입 B의 대상으로부터 얻을 수 있으며, 타입 A의 인자에서 값을 계산할 수 있습니다. 모든 대상의 이처럼 엄격하게 예측 가능한 동작은 (비균질 집합을 허용하는 집합론의 더 자유로운 형성 원리와 대조되며) 타입 이론이 컴퓨터 프로그램의 정확성 검증에 널리 사용되게 한 한 가지 측면입니다. 타입의 구성과 관련된 명확한 추론 원리는 현대 컴퓨터 증명 보조기의 기반도 이루며, 컴퓨터 증명 보조기는 수학을 형식화하고 형식화된 증명의 정확성을 검증하는 데 사용됩니다. 타입 이론의 이러한 측면은 아래에서 다시 다루겠습니다.

그러나 수학적 관점에서 타입 이론을 이해할 때 늘 문제가 되어 온 점은, 타입이라는 기본 개념이 집합이라는 개념과 정확히 설명하기 어려운 방식으로 다르다는 것이었습니다. 우리는 타입을 (아마도 고전 논리를 사용하지 않고 구성된) 이상한 집합이 아니라 호모토피 이론의 관점에서 본 공간으로 간주하는 새로운 아이디어가 중요한 진전이라고 믿습니다. 특히 이 아이디어는 타입의 원소들 사이의 같음 개념이 집합의 원소들 사이의 같음 개념과 어떻게 다른지 이해하는 문제를 해결합니다.

호모토피 이론에서는 공간과 그 사이의 연속 사상을 호모토피 차이를 무시하고 다룹니다. 두 연속 사상 $f : X \to Y$와 $g : X \to Y$ 사이의 호모토피 는 $H(x,0) = f(x)$와 $H(x,1) = g(x)$를 만족하는 연속 사상 $H : X \times [0,1] \to Y$입니다. 호모토피 H는 f를 g로 바꾸는 "연속적인 변형"으로 생각할 수 있습니다. 공간 X와 Y 사이에 서로 오가는 연속 사상이 있고 그 합성이 각각의 항등 사상과 호모토픽하면, 즉 두 공간이 "호모토피 차이를 무시하면" 동형이면, 두 공간을 호모토피 동치 $X \simeq Y$라고 합니다. 호모토피 동치인 공간들은 같은 대수적 불변량(예를 들어 호몰로지나 기본군)을 가지며, 같은 호모토피 타입을 가진다고 합니다.

호모토피 타입 이론

호모토피 타입 이론(HoTT)은 타입 이론을 호모토피적 관점에서 해석합니다. 호모토피 타입 이론에서는 타입을 (호모토피 이론에서 연구하는) "공간" 또는 고차 그루포이드로 보고, (곱 $A \times B$ 같은) 논리적 구성을 이러한 공간 위의 호모토피 불변 구성으로 봅니다. 이렇게 하면 점집합 위상수학(또는 단체 집합 이론처럼 이를 대체하는 조합론적 이론)을 먼저 전개하지 않고도 공간을 직접 다룰 수 있습니다. 이 관점을 간략히 설명하기 위해, 먼저 타입 이론의 기본 개념, 즉 항 a가 타입 A를 가진다는 개념을 생각해 봅시다. 이는 다음과 같이 씁니다.

$$a : A.$$

이 표현은 전통적으로 다음과 비슷한 것으로 여겨집니다.

"a는 집합 A의 원소입니다".

그러나 호모토피 타입 이론에서는 이를 대신 다음과 같이 생각합니다.

"a는 공간 A의 점입니다".

마찬가지로 타입 이론의 모든 함수 $f : A \to B$는 공간 A에서 공간 B로 가는 연속 사상으로 간주됩니다.

이러한 "공간"은 위상적으로가 아니라 순수하게 호모토피적으로 다룬다는 점을 강조해야 합니다. 예를 들어 타입의 "열린 부분집합"이나 타입 원소들로 이루어진 수열의 "수렴"이라는 개념은 없습니다. 우리에게는 점들 사이의 경로나 경로들 사이의 호모토피처럼 (단체 집합 같은) 호모토피 이론의 다른 모형에서도 의미가 있는 "호모토피적" 개념만 있습니다. 따라서 우리가 타입을 ∞-그루포이드로 다룬다고 말하는 편이 더 정확합니다. 이는 위상 공간, 단체 집합, 또는 호모토피 이론의 다른 어떤 모형으로도 제시할 수 있는 호모토피 이론의 "불변 대상"을 부르는 이름입니다. 그러나 다른 위상적 개념은 적용할 수 없다는 점만 기억한다면, 때때로 "공간"이나 "경로" 같은 위상적 용어를 사용하는 것이 편리합니다.

(이러한 대상에 호모토피 타입 이라는 표현도 쓰고 싶어지는데, 이 표현은 "호모토피적으로 바라본 (타입 이론에서 말하는) 타입"과 "호모토피 이론의 관점에서 고찰한 공간"이라는 이중의 해석을 시사합니다. 후자는 호모토피 동치를 법으로 한 공간들의 동치류라는 "호모토피 타입"의 고전적 의미와 조금 다르지만, "이 두 공간은 같은 호모토피 타입을 가집니다" 같은 문구의 의미는 보존합니다.)

타입을 집합이 아니라 구조를 가진 대상으로 해석한다는 아이디어는 오랜 역사를 지니고 있으며, 타입 이론의 여러 불가사의한 측면을 명확히 해 주는 것으로 알려져 있습니다. 예를 들어, 타입을 층으로 해석하면 타입 이론적 논리의 직관주의적 본성을 설명하는 데 도움이 되고, 부분 동치 관계나 "정의역"으로 해석하면 그 계산적 측면을 설명하는 데 도움이 됩니다. 또한 이는 타입 이론적 추론을 사용하여 구조를 가진 대상을 연구할 수 있음을 함의하며, 이로부터 범주론적 논리라는 풍부한 분야가 생겨났습니다. 호모토피적 해석도 이와 같은 패턴에 들어맞습니다. 이 해석은 타입 이론에서 동일성 (또는 상등)의 본성을 명확히 해 주며, 호모토피 이론 연구에 타입 이론적 추론을 사용할 수 있게 해 줍니다.

호모토피 해석의 핵심적인 새 아이디어는 같은 타입 A에 속한 두 대상 $a, b : A$의 동일성 $a = b$라는 논리적 개념을, 공간 A에서 점 a로부터 점 b로 가는 경로 $p : a \rightsquigarrow b$가 존재한다는 것으로 이해할 수 있다는 것입니다. 이는 또한 두 함수 $f, g : A \to B$가 호모토픽하면 두 함수를 동일시할 수 있다는 뜻이기도 합니다. 호모토피란 각 $x : A$마다 하나씩 주어진 B 안의 경로 $p_x : f(x) \rightsquigarrow g(x)$들의 (연속적인) 족에 지나지 않기 때문입니다. 타입 이론에서는 모든 타입 A에 대해 A의 두 대상의 동일시들로 이루어진 (예전에는 다소 불가사의했던) 타입 Id_A가 있습니다. 호모토피 타입 이론에서 이 타입은 단위 구간에서 가는 모든 연속 사상 $I \to A$로 이루어진 경로 공간 A^I에 지나지 않습니다. 이렇게 하여 항 $p : \mathsf{Id}_A(a, b)$는 A 안의 경로 $p : a \rightsquigarrow b$를 나타냅니다.

호모토피 타입 이론의 아이디어는 2006년경 Awodey와 Warren [AW09], 그리고 Voevodsky [Voe06]의 독립적인 연구에서 등장했지만, 그보다 앞선 Hofmann과 Streicher의 그루포이드 해석 [HS98]에서 영감을 받았습니다. 실제로 고차원 범주론(특히 약한 ∞-그루포이드 이론)은 Grothendieck가 제안한 대로 호모토피 이론과 밀접하게 연결되어 있음이 현재 알려져 있으며, 지금은 두 분야의 수학자들이 이를 집중적으로 연구하고 있습니다. Awodey–Warren과 Voevodsky의 최초 의미론적 모형은 Quillen 모형 범주와 Kan 단체 집합처럼 호모토피 이론에서 잘 알려진 개념과 기법을 사용하며, 이러한 개념과 기법은 현재 고차 범주론에서도 사용되고 있습니다.

특히 Voevodsky는 Kan 단체 집합에서 타입 이론의 해석을 구성하였고, 이 해석이 그가 유니밸런스라고 이름 붙인 또 하나의 핵심적인 성질을 만족한다는 것을 알아차렸습니다. 이 성질은 그전까지 타입 이론에서 고려된 적이 없었습니다(다만 명제에 대한 Church의 외연성 원리가 이 성질의 아주

특수한 경우임이 밝혀졌고, Hofmann과 Streicher도 "유니버스 외연성"이라는 이름으로 또 다른 특수한 경우를 고려한 바 있습니다). 유니밸런스를 새로운 공리의 형태로 타입 이론에 추가하면 광범위한 결과가 따르며, 그중 상당수는 자연스럽고 문제를 단순하게 만들며 설득력이 있습니다. 유니밸런스 공리는 단체 모형 및 이와 관련된 다른 모형에서는 성립하지만 타입을 집합으로 보는 관점에서는 성립하지 않으므로, 타입 이론에 대한 호모토피적 관점을 한층 더 강화합니다.

유니밸런트 기초

유니밸런스 공리의 기본 아이디어를 아주 간단히 설명하면 다음과 같습니다. 타입 이론에서는 원소들이 그 자체로 타입인 타입을 가질 수 있습니다. 이러한 타입을 유니버스라고 하며, 보통 $\mathcal{U}$로 나타냅니다. $\mathcal{U}$의 항인 타입들을 흔히 작은 타입이라고 부릅니다. 다른 모든 타입과 마찬가지로 $\mathcal{U}$에도 동일성 타입 $\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}$가 있으며, 이는 작은 타입들 사이의 동일성 관계 $A = B$를 나타냅니다. 타입을 공간으로 생각하면 $\mathcal{U}$는 그 점들이 공간인 공간입니다. 그 동일성 타입을 이해하려면 $\mathcal{U}$ 안의 공간들 사이의 경로 $p : A \rightsquigarrow B$란 무엇인지 물어야 합니다. 유니밸런스 공리는 앞에서 설명했듯이 (대략적으로) 이러한 경로가 호모토피 동치 $A \simeq B$에 대응한다고 말합니다. 조금 더 정확히 말하면, 임의의 (작은) 타입 A와 B가 주어졌을 때, A와 B의 동일시들로 이루어진 원시 타입 $\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(A, B)$ 외에도 A에서 B로의 동치들로 이루어진, 정의된 타입 $\mathsf{Equiv}(A, B)$가 있습니다. 임의의 대상 위의 항등 사상은 동치이므로, 다음과 같은 표준적인 사상이 존재합니다.

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(A, B) \to \mathsf{Equiv}(A, B).$$

유니밸런스 공리는 이 사상 자체가 동치라고 말합니다. 지나친 단순화의 위험을 무릅쓰고, 이를 다음과 같이 간결하게 서술할 수 있습니다.

유니밸런스 공리: $(A = B) \simeq (A \simeq B)$.

다시 말해, 동일성은 동치와 동치입니다. 특히 "동치인 타입은 동일합니다"라고 말할 수도 있습니다. 그러나 이 표현은 다소 오해의 소지가 있습니다. 동치 개념을 붕괴시켜 동일성과 일치하게 만드는 일종의 "골격성" 조건처럼 들릴 수 있기 때문입니다. 실제로 유니밸런스는 오히려 동일성 개념을 확장하여 (변하지 않은) 동치 개념과 일치하게 만드는 것입니다.

호모토피적 관점에서 유니밸런스는 같은 호모토피 타입을 가진 공간들이 유니버스 $\mathcal{U}$ 안에서 경로로 연결된다는 것을 함의하며, 이는 (작은) 공간들에 대한 분류 공간이라는 직관과 부합합니다. 그러나 논리적 관점에서 이는 근본적으로 새로운 아이디어입니다. 동형인 것들을 동일시할 수 있다고 말하기 때문입니다! 물론 수학자들은 실제로 동형인 구조들을 동일시하는 데 익숙하지만, 관련된 대상들이 "진정으로" 동일하지는 않다는 것을 알면서 보통 "기호의 남용"이나 그 밖의 비형식적인 장치를 통해 그렇게 합니다. 그러나 이 새로운 기초 체계에서는 한쪽에 관한 모든 성질이나 구성이 다른 쪽에도 적용된다는 논리적 의미에서 이러한 구조들을 형식적으로 동일시할 수 있습니다. 실제로 이제 동일시가 명시적으로 이루어지며, 성질과 구성을 그 동일시를 따라 체계적으로 수송할 수 있습니다. 더욱이 이러한 동일시가 이루어질 수 있는 서로 다른 방식들은 그 자체로 우리가 고려할 수 있는 (그리고 고려해야 하는!) 하나의 구조를 이룹니다.

요컨대 유니버스 $\mathcal{U}$의 점 A와 B(즉, 작은 타입)에 대해, 유니밸런스 공리는 다음 세 개념을 동일시합니다.

- (논리적) A와 B의 동일시 $p : A = B$
- (위상적) $\mathcal{U}$ 안에서 A에서 B로 가는 경로 $p : A \rightsquigarrow B$
- (호모토피적) A와 B 사이의 동치 $p : A \simeq B$.

고차 귀납적 타입

타입 이론의 고전적인 장점 중 하나는 귀납적으로 정의된 구조를 다루는 단순하고 효과적인 기법을 갖추고 있다는 점입니다. 가장 단순하면서 자명하지 않은 귀납적으로 정의된 구조는 자연수이며, 자연수는 0과 후속자 함수에 의해 귀납적으로 생성됩니다. 이 서술로부터 자연수를 특징짓는 수학적 귀납법의 원리를 알고리즘적으로 추출할 수 있습니다. 더 일반적인 귀납적 정의는 리스트와 온갖 종류의 정초 트리를 포괄하며, 이들 각각은 그에 대응하는 "귀납 원리"로 특징지어집니다. 여기에는 특정 프로그래밍 언어에서 사용되는 대부분의 자료 구조가 포함되며, 바로 이 때문에 타입 이론은 그러한 자료 구조에 대한 형식적 추론에 유용합니다. 매우 일반적인 의미로 생각한다면, 귀납적 정의에는 서로소 합집합 $A + B$와 같은 예도 포함되는데, 이는 두 단사 $A \to A + B$와 $B \to A + B$에 의해 "귀납적으로" 생성된다고 볼 수 있습니다. 이 경우의 "귀납 원리"는 서로소 합집합을 특징짓는 "경우 분석에 의한 증명"입니다.

호모토피 이론에서는 점의 모임뿐만 아니라 경로와 고차 경로의 모임에 의해서도 생성되는 "귀납적으로 정의된 공간"을 고려하는 것도 자연스럽습니다. 고전적으로 이러한 공간을 CW 복합체라고 부릅니다. 예를 들어, 원 S^1은 하나의 점과 그 점에서 자기 자신으로 가는 하나의 경로에 의해 생성됩니다. 마찬가지로 2-구면 S^2는 하나의 점 b와, b에서의 상수 경로에서 자기 자신으로 가는 하나의 2차원 경로에 의해 생성되며, 토러스 T^2는 하나의 점, 그 점에서 자기 자신으로 가는 두 경로 p와 q, 그리고 $p \cdot q$에서 $q \cdot p$로 가는 하나의 2차원 경로에 의해 생성됩니다.

호모토피 타입 이론에서 경로를 동일성과 동일시하는 것을 이용하면, 이러한 "귀납적으로 정의된 공간"을 자연수나 서로소 합집합 같은 고전적인 예와 완전히 유사하게, 타입 이론 안에서 "귀납 원리"로 특징지을 수 있습니다. 그 결과로 얻어지는 고차 귀납적 타입은 구면과 같은 친숙한 공간에 대해 추론하는 직접적인 "논리적" 방법을 제공하며, 이는 (유니밸런스와 결합하여) 구면의 호모토피 군 계산과 같은 호모토피 이론의 친숙한 논증을 순수하게 형식적인 방식으로 수행하는 데 사용될 수 있습니다. 그 결과로 얻어지는 증명은 고전적인 호모토피 이론의 아이디어와 고전적인 타입 이론의 아이디어의 결합이며, 두 분야 모두에 새로운 통찰을 줍니다.

게다가 이것은 빙산의 일각에 불과합니다. 호모토피 쌍대극한, 현수, 포스트니코프 탑, 국소화, 완비화, 스펙트럼화와 같은 호모토피 이론의 많은 추상적 구성 역시 고차 귀납적 타입으로 표현할 수 있습니다. 이들 중 다수는 고전적으로 Quillen의 "작은 대상 논증"을 사용하여 구성되는데, 이 논증은 "0과 후속자"가 무한한 자연수 집합에 대한 유한한 알고리즘적 기술인 것과 마찬가지로, 공간의 무한한 CW 복합체 표시를 알고리즘적으로 기술하는 유한한 방법으로 볼 수 있습니다. 작은 대상 논증으로 만들어지는 공간은 복잡하고 이해하기 어렵기로 악명이 높습니다. 반면 타입 이론적 접근은 적절한 "귀납 원리"에 직접 접근할 수 있게 해 줌으로써 명시적인 구성의 필요성을 우회하므로, 잠재적으로 훨씬 더 단순합니다. 따라서 유니밸런스와 고차 귀납적 타입의 결합은 호모토피 이론의 실천에 일종의 혁명이 일어날 가능성을 시사합니다.

유니밸런트 기초에서의 집합

우리는 유니밸런트 기초가 결국 "모든" 수학의 기초가 될 수 있다고 주장했지만, 지금까지는 호모토피 이론만 논의했습니다. 물론 호모토피 타입 이론의 새로운 기능 없이 타입 이론을 사용하여 수학을 형식화한 구체적인 예는 많이 있으며, 최근 Coq [GAA+13]에서 이루어진 Feit–Thompson 홀수 위수 정리의 형식화가 그 예입니다.

그러나 전통적인 관점은 모든 수학적 대상과 구성을 체르멜로–프렝켈 집합론(ZF)과 같은 이론으로 부호화할 수 있다는 의미에서 수학이 집합론에 기초를 두고 있다는 것입니다. 그러나 엄밀한 의미의 집합론 바깥에 있는 대부분의 수학에서는 ZF에서 집합이 갖는 복잡한 위계적 소속 구조가 사실상 불필

요하다는 것이 이제는 잘 확립되어 있습니다. Lawvere의 집합의 범주에 대한 초등 이론(Elementary Theory of the Category of Sets) [Law05]과 같은 보다 "구조적인" 이론으로 충분합니다.

유니밸런트 기초에서 기본 대상은 집합이 아니라 "호모토피 타입"이지만, 집합처럼 행동하는 타입들의 부류를 정의할 수 있습니다. 호모토피적으로 이들은 모든 연결 성분이 축약 가능한 공간, 즉 이산 공간과 호모토피 동치인 공간으로 생각할 수 있습니다. 이러한 "집합"들의 범주가 Lawvere의 공리(또는 이론의 세부 사항에 따라 이와 관련된 공리)를 만족한다는 것은 하나의 정리입니다. 따라서 ETCS와 비슷한 이론에서 표현될 수 있는 모든 종류의 수학(경험상 본질적으로 수학 전체입니다)은 유니밸런트 기초에서도 똑같이 잘 표현될 수 있습니다.

이는 유니밸런트 기초가 적어도 기존의 수학 기초만큼 좋다는 주장을 뒷받침합니다. 유니밸런트 기초에서 작업하는 수학자는 친숙한 방식으로 집합으로부터 구조를 쌓아 올릴 수 있으며, 더 일반적인 호모토피 타입은 필요해질 때까지 기초의 배경에서 기다립니다. 이러한 이유로 이 책의 응용 대부분은 유니밸런트 기초가 기존 기초 체계와 구별되는 새로운 기여를 할 수 있는 분야로 선택되었습니다.

당연하게도 호모토피 이론과 범주론이 그중 두 가지이지만, 유니밸런트 기초가 집합론이나 실해석학 같은 분야에서도 새롭고 흥미로운 것을 제공한다는 점은 그만큼 분명하지 않을 수 있습니다. 예를 들어 유니밸런스 공리는 동형인 구조들을 동일시할 수 있게 해 주며, 고차 귀납적 타입은 대상을 그 보편 성질로 직접 서술할 수 있게 해 줍니다. 따라서 우리는 대체로 임의로 선택한 대표원이나 초한 반복 구성에 의존하지 않아도 됩니다. 실제로 ZF 집합론의 연구 대상조차도 유니밸런트 기초의 집합 안에서 이러한 귀납적 보편 성질로 특징지을 수 있습니다.

비형식적 타입 이론

고전 수학자가 타입 이론을 배우려 할 때 흔히 마주치는 어려움 중 하나는, 타입 이론이 대개 완전히 또는 부분적으로 형식화된 연역 체계로 제시된다는 점입니다. 이러한 방식은 증명론적 탐구에는 매우 유용하지만, 응용적이고 비형식적인 추론에 사용하기에는 그다지 편리하지 않습니다. 또한 대부분의 현업 수학자에게는, 수학의 기초에 관심이 있을 수 있는 이들에게조차 익숙하지도 않습니다. 이 책의 목표 중 하나는 유니밸런트 기초에서 수학을 하는 비형식적인 방식을 개발하는 것으로, 이 방식은 엄밀하고 정확하면서도 일상적인 수학의 언어와 서술 방식에 더 가깝습니다.

오늘날의 수학에서는 대개 수학적 대상을 구성하고 그에 대해 추론할 때, 원리적으로는 ZFC와 같은 기초적인 집합론 체계 안에서 형식화할 수 있으리라고 여겨지는 방식을 따릅니다. 적어도 충분한 창의성과 인내가 주어진다면 말입니다. 대부분의 경우 이러한 가능성을 의식할 필요조차 없습니다. 이 가능성은 증명이 "완전히 엄밀"해야 한다는 조건(모든 수학자가 교육과 경험을 통해 직관적으로 이해하게 된 의미에서)과 대체로 일치하기 때문입니다. 그러나 "비형식적 집합론"의 몇 가지 측면에 대해서는 주의하는 법을 배워야 합니다. 집합이 되기에는 너무 크거나 불명확한 모임의 사용, 선택 공리와 그 동치 명제들, (학부생에게는) 심지어 귀류법에 의한 증명 방법 등이 그러합니다. 호모토피 타입 이론과 같은 새로운 기초 체계를 비형식적 추론의 암묵적인 형식적 토대로 채택하려면 자신의 직관과 관행 중 일부를 조정해야 합니다. 이 책은 이러한 "새로운 종류의 수학"의 한 예가 되고자 합니다. 이 수학은 여전히 비형식적이지만, 이제는 원리적으로 ZFC가 아니라 호모토피 타입 이론 안에서 형식화할 수 있습니다. 역시 충분한 창의성과 인내가 주어진다면 말입니다.

이 새로운 체계에서는 이러한 형식화가 실질적인 이점을 가져다줄 수 있다는 점을 강조할 만합니다. 타입 이론이라는 형식 체계는 컴퓨터 시스템에 적합하며, 기존의 증명 보조기에 이미 구현되어 있습니다. 증명 보조기란 타당한 추론 단계만을 허용하면서 사용자가 완전히 형식적인 증명을 구성하도록 안내하는 컴퓨터 프로그램입니다. 증명 보조기는 또한 어느 정도의 자동화를 제공하고, 라이브러리에서 기존 정리를 검색할 수 있으며, 그렇게 얻은 (구성적) 증명으로부터 수치 알고리즘 을

추출할 수도 있습니다.

우리는 유니밸런트 기초 프로그램의 이러한 측면이 이를 다른 기초론적 접근과 구별하며, 현업 수학자에게 새로운 실용적 효용을 제공할 잠재력이 있다고 믿습니다. 실제로 이전의 타입 이론에 기반한 증명 보조기는 이미 4색 정리 와 Feit–Thompson 정리 같은 상당한 규모의 수학적 증명을 형식화하는 데 사용되었습니다. 유니밸런트 기초의 컴퓨터 구현은 (이론 자체와 마찬가지로) 현재 진행 중인 작업입니다. 그러나 현재 사용할 수 있는 구현들(대부분 Coq 및 Agda 같은 기존 증명 보조기를 조금 수정한 것입니다)조차 이미 알려진 증명의 형식화뿐 아니라 새로운 증명의 발견에서도 그 가치를 입증했습니다. 실제로 이 책에 서술된 증명 중 상당수는 처음에는 증명 보조기 안에서 완전히 형식화된 형태로 이루어졌고, 지금에서야 처음으로 "비형식화"되고 있습니다 — 이는 형식적 수학과 비형식적 수학 사이의 통상적인 관계가 뒤집힌 것입니다.

머지않은 미래에 수학자들이 증명 보조기에 형식화된 유니밸런트 기초 체계 안에서 작업함으로써 자신의 논문이 올바른지 검증할 수 있게 되고, 그렇게 하는 일이 자신의 논문을 TEX으로 조판하는 일만큼 자연스러워지리라고 상상해 볼 수 있습니다. 원리적으로는 다른 어떤 기초 체계에서도 마찬가지일 수 있지만, 이 책과 그 형식적 대응물이 보여 주듯이 우리는 유니밸런트 기초를 사용할 때 이것을 실제로 더 쉽게 달성할 수 있다고 믿습니다.

구성성

고전적 기초와 타입 이론 사이의 가장 두드러진 차이 중 하나는 증명 관련성이라는 개념입니다. 이 개념에 따르면 수학적 진술은 물론 그 증명까지도 일급 수학적 대상이 됩니다. 타입 이론에서는 수학적 진술을 타입으로 나타내며, 타입은 수학적 구성인 동시에 수학적 주장으로 간주할 수 있습니다. 이러한 관점은 타입으로서의 명제라고도 알려져 있습니다. 따라서 항 $a : A$를 타입 A의 원소(또는 호모토피 타입 이론에서는 공간 A의 점)로 볼 수 있는 동시에 명제 A의 증명으로도 볼 수 있습니다. 예를 들어 집합 A와 B(이산 공간)가 있다고 하고, "A는 B와 동형"이라는 진술을 생각해 봅시다. 타입 이론에서는 이를 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$\mathsf{Iso}(A,B) :\equiv \sum_{(f:A\to B)} \sum_{(g:B\to A)} \Big(\big(\textstyle\prod_{(x:A)} g(f(x)) = x\big) \times \big(\textstyle\prod_{(y:B)} f(g(y)) = y\big)\Big).$$

여기서 타입 생성자 $\Sigma, \Pi, \times$를 각각 "존재한다", "모든", "그리고"로 읽으면 "A와 B는 동형이다"라는 통상적인 정식화가 얻어집니다. 반면에 이들을 합과 곱으로 읽으면 A와 B 사이의 모든 동형사상의 타입이 얻어집니다! A와 B가 동형임을 증명하려면 증명 $p : \mathsf{Iso}(A,B)$를 구성하는데, 따라서 이는 A와 B 사이의 동형사상을 구성하는 것, 즉 한 쌍의 함수 f, g를 그 합성이 각각 항등 사상이라는 증명과 함께 제시하는 것과 같습니다. 그리고 후자의 증명은 다름 아닌 적절한 종류의 호모토피입니다. 이런 식으로 명제를 증명하는 것은 어떤 특정한 타입의 원소를 구성하는 것과 같습니다. 특히 "A 그리고 B" 꼴의 명제를 증명하는 것은 A를 증명하고 B를 증명하는 것, 즉 타입 $A \times B$의 원소를 제시하는 것에 불과합니다. 그리고 A가 B를 함의함을 증명하는 것은 $A \to B$의 원소, 즉 A에서 B로 가는 함수(A의 증명을 B의 증명으로 보내는 사상을 결정하는 함수)를 찾는 것에 불과합니다.

명제-타입 대응의 논리는 유연하며, 명제를 표현하는 데 타입의 일부 부분 클래스만 사용하는 것과 같은 다양한 변형을 허용합니다. 호모토피 타입 이론에는 그러한 자연스러운 부분 클래스가 존재하는데, 이는 고전적 호모토피 이론의 공간과 마찬가지로 모든 타입의 체계가 그 고차 호모토피 구조가 존재하거나 붕괴하는 차원에 따라 "층화"되어 있다는 사실에서 비롯됩니다. 특히 Voevodsky는 호모토피 n-타입에 대한 순수하게 타입 이론적인 정의를 발견했는데, 이는 차원 n 위에서 자명하지 않은 호모토피 정보를 갖지 않는 공간에 대응합니다. (0-타입은 앞서 Lawvere의 공리를 만족한다고

언급한 "집합"입니다.) 더욱이 고차 귀납적 타입을 사용하면 타입을 보편적으로 n-타입으로 "절단"할 수 있습니다. 고전적 호모토피 이론에서 이것은 그 타입의 n^{th} 포스트니코프 단면에 해당합니다. 논리에서 특히 중요한 것은 호모토피 (-1)-타입의 경우이며, 이를 단순 명제라고 부릅니다. 고전적으로 모든 (-1)-타입은 비어 있거나 축약 가능하며, 우리는 이 두 가능성을 각각 진릿값 "거짓"과 "참"으로 해석합니다.

모든 타입을 명제로 사용하면 매우 "구성적"인 논리 개념을 얻습니다. 이에 대한 자세한 내용은 [Kol32, TvD88a, TvD88b]를 참고하십시오. 예를 들어 무언가가 존재한다는 모든 증명은 그러한 대상을 실제로 찾기에 충분한 정보를 담고 있으며, "A 또는 B"가 성립한다는 모든 증명은 A가 성립한다는 증명이거나 B가 성립한다는 증명입니다. 따라서 모든 증명으로부터 알고리즘을 자동으로 추출할 수 있습니다; 이는 컴퓨터 프로그래밍에 응용할 때 매우 유용할 수 있습니다.

그러나 다른 한편으로 이 논리는 수학에서 존재 증명을 이해하는 전통적인 방식과 분명히 다릅니다. 특히 이 논리는 선택 공리와 배중률 같은 몇 가지 중요한 고전적 추론 원리를 충실하게 표현하지 못합니다. 이러한 원리를 위해서는 호모토피 (-1)-타입만이 명제를 나타내는 "(-1)-절단" 논리를 사용해야 합니다.

더 구체적으로, 한편으로 선택 공리를 생각해 봅시다. "모든 $x : A$에 대해 $R(x,y)$를 만족하는 $y : B$가 존재한다면, 모든 $x : A$에 대해 $R(x, f(x))$가 성립하는 함수 $f : A \to B$가 존재합니다." 순수한 명제-타입 대응에서의 "존재" 개념은 이 명제를 단순히 증명 가능하게 만들 만큼 강력합니다 — 그러나 이 명제는 일반적인 선택 공리가 갖는 모든 귀결을 갖지는 않습니다. 하지만 (-1)-절단된 논리에서는 이 명제가 자동으로 참이 되지 않으며, 고전적 집합론에서의 대응물과 같은 종류의 귀결을 갖는 강한 가정입니다.

다른 한편으로, 배중률을 생각해 봅시다. "모든 A에 대해, A이거나 A가 아니다." 이것을 순수한 명제-타입 대응 논리에서 해석하면 유니밸런스 공리와 모순되는 명제가 얻어집니다. 왜냐하면 "A"를 증명한다는 것은 그 원소를 제시하는 것을 뜻하므로, 이 가정은 공집합이 아닌 모든 타입에서 원소를 하나씩 선택하는 균일한 방법, 즉 일종의 힐베르트식 선택 연산자를 제공하게 되기 때문입니다. 유니밸런스에 의하면, A의 자기 동치들은 자기 동일성과 동일시되고 모든 연산은 동일성을 존중해야 하므로, 그러한 선택 연산자가 선택한 A의 원소는 A의 모든 자기 동치 아래에서 불변이어야 합니다. 그러나 분명히 어떤 타입은 고정점이 없는 자기동형을 가집니다. 예를 들어 원소가 두 개인 타입의 두 원소를 서로 바꿀 수 있습니다. 그러나 "(-1)-절단된 배중률"은 역시 자동으로 참이 되지는 않지만, 고전 수학에서와 대부분 같은 귀결을 가지면서 모순 없이 가정할 수 있습니다.

다시 말해, 순수한 명제-타입 대응 논리는 앞서 언급한 강한 알고리즘적 의미에서 "구성적"인 반면, 기본 (-1)-절단된 논리는 다른 의미(즉, Heyting이 "직관주의적"이라는 이름으로 형식화한 논리의 의미)에서 "구성적"입니다. 그리고 후자에 선택 공리와 배중률을 자유롭게 추가하여 "고전적"이라고 부를 수 있는 논리를 얻을 수 있습니다. 따라서 호모토피 타입 이론은 구성적 논리관과 고전적 논리관 모두와, 그리고 그 밖의 많은 논리관과도 양립할 수 있습니다. 실제로 호모토피적 관점은 고전 논리와 구성적 논리가 서로 다른 체계들로 이루어진 스펙트럼의 양 끝점으로서 공존할 수 있으며, 그 사이에 무한히 많은 가능성(즉, $-1 < n < \infty$에 대한 호모토피 n-타입)이 있음을 보여 줍니다. 우리는 "LEM_n"과 "AC_n"에 대해 말할 수 있는데, AC_∞는 증명 가능하고 LEM_∞ 는 유니밸런스와 모순되며, AC_{-1}과 LEM_{-1}은 고전 수학자에게 익숙한 버전입니다(따라서 대부분의 경우 아래첨자가 주어지지 않으면 (-1)을 가정하는 것이 적절합니다). 실제로 일반적인 타입은 "구성적"으로 남겨 둔 채 특정한 타입만 그러한 추가적인 "고전적" 원리를 만족하는 유용한 체계를 갖는 것도 가능합니다.

유니밸런트 기초가 구성적 논리나 직관주의 논리의 사용을 요구하지는 않는다는 점을 강조할 만합니다. 배중률과 선택 공리에 의존하는 고전 수학의 대부분은 이 두 원리가 (적절한 (-1)-절단 형태로) 성립한다고 가정하기만 하면 유니밸런트 기초 안에서 수행할 수 있습니다. 그러나 타입 이론은

몇 가지 이유로 이러한 원리가 불필요할 때에는 사용을 피하도록 권장합니다.

첫째, 모든 수학자가 알고 있듯이 더 적은 가정으로 증명한 정리는 더 많은 예에 적용되므로 더 강력합니다. AC 와 LEM 의 경우도 다르지 않습니다. 타입 이론은 층 토포스에서와 같은 흥미로운 "비표준" 모형을 많이 허용하는데, 이러한 모형에서는 AC 와 LEM 같은 고전성 원리가 성립하지 않는 경향이 있습니다. 호모토피 타입 이론은 [TV02, Rez05, Lur09]에서 연구하는 것과 같은 고차 토포스에서도 비슷한 모형을 허용합니다. 따라서 이러한 원리의 사용을 피하면, 우리가 증명하는 정리는 그러한 모든 모형 내부에서 타당합니다.

둘째, 타입 이론의 또 다른 장점 중 하나는 계산 가능한 성격입니다. 타입 이론은 수학의 기초일 뿐만 아니라 계산에 관한 형식 이론이기도 하며, 강력한 프로그래밍 언어로 다룰 수 있습니다. 이 관점에서는 집합론의 공리와 달리 체계의 규칙을 임의로 선택할 수 없습니다. 모든 증명을 프로그램으로 "실행"할 수 있도록 규칙들 사이에 조화가 있어야 합니다. 우리는 유니밸런스와 고차 귀납적 타입처럼 호모토피 타입 이론이 도입한 새로운 원리를 이 관점에서 아직 완전히 이해하지는 못하지만, 기본적인 윤곽은 드러나고 있습니다. 예를 들어 [LH12]를 참고하십시오. 그러나 AC 와 LEM 같은 원리가 계산 가능성과 근본적으로 상충한다는 사실은 오래전부터 알려져 있었습니다. 이러한 원리는 어떤 것을 계산하는 방법을 전혀 제시하지 않은 채 그것이 존재한다고 노골적으로 단언하기 때문입니다. 따라서 계산 이론으로서 타입 이론의 성격을 유지하려면 이러한 원리를 피해야 합니다.

다행히도 구성적 추론은 보기만큼 어렵지 않습니다. 어떤 경우에는 몇몇 정의를 바꾸어 표현하기만 해도 정리를 구성적으로 만들고 그 증명을 더 우아하게 만들 수 있습니다. 게다가 유니밸런트 기초에서는 이런 일이 더 자주 일어나는 것으로 보입니다. 예를 들면 다음과 같습니다:

(i) 집합론적 기초에서는 호모토피 이론과 범주론의 여러 지점에서 초한 구성을 수행하기 위해 선택 공리가 필요합니다. 그러나 고차 귀납적 타입을 사용하면 이러한 구성을 직접적이고 구성적으로 부호화할 수 있습니다. 특히 제8장의 "종합적" 호모토피 이론은 어느 부분에서도 LEM 이나 AC 를 필요로 하지 않습니다.

(ii) 집합론적 기초에서는 "모든 충실충만하고 본질적으로 전사인 함자는 범주의 동치"라는 진술이 선택 공리와 동치입니다. 그러나 유니밸런스 공리가 있으면 이 진술은 그냥 참입니다. 제9장를 참고하십시오.

(iii) 집합론에서는 각각 집합과 정렬된 집합의 동형사상에 의한 동치류를 표준적으로 대표하는 "기수"와 "순서수" 개념을 얻기 위해 여러 가지 우회적인 방법이 필요합니다 — 경우에 따라서는 선택 공리나 정칙성 공리가 동원되기도 합니다. 하지만 유니밸런스와 고차 귀납적 타입이 있으면, 유니버스를 절단함으로써 그러한 대표를 직접 얻을 수 있습니다. 제10장를 참조하십시오.

(iv) 집합론적 기초에서 실수를 Cauchy 수열의 동치류로 정의하는 방식이 제대로 작동하려면 배중률이나 (가산) 선택 공리가 필요합니다. 그러나 고차 귀납적 타입을 사용하면 제대로 작동하면서도 어떠한 선택 원리도 사용하지 않는 형태의 정의를 제시할 수 있습니다. 제11장를 참조하십시오.

물론 이러한 단순화는 새로운 방법이 결국 진정으로 구성적이지 않은 것으로 드러나리라는 증거로 받아들일 수도 있습니다. 그러나 독자가 이 책을 읽기 위해 구성성에 신경 쓰거나 걱정할 필요는 없다는 점을 다시 강조합니다. 요점은 위의 모든 예에서 우리가 제시하는 형태의 이론이 LEM 과 AC 를 사용할 수 있다고 가정하든 그렇지 않든 그와 무관한 장점을 갖는다는 것입니다. 구성성은 달성된다면 추가적인 보너스가 될 것입니다.

유니밸런스, 고차 귀납적 타입, AC, LEM 과 같은 새로운 원리를 추가하는 것에 대한 이러한 논의를 접하면, 그 결과로 얻는 체계가 여전히 무모순인지 궁금할 수 있습니다. (집합론에 비해 타입 이론이 원래 지녔던 장점 중 하나는 증명론적 방법으로 그 무모순성을 확인할 수 있다는 점이었습니다). 여느 기초 체계와 마찬가지로 무모순성은 상대적인 질문입니다. "무엇에 대해 무모순입니까?" 간단히

답하자면, 이 책에서 다루는 모든 구성과 공리는 Voevodsky [KLV12]에 의한 Kan 복합체 범주 안의 모형을 갖습니다(고차 귀납적 타입에 대해서는 [LS17]를 참고하십시오). 따라서 이들은 (필요한 중첩된 유니밸런트 유니버스의 수만큼 도달 불가능한 기수 를 추가한) ZFC에 대해 상대적으로 무모순임이 알려져 있습니다. 이 무모순성을 보다 전통적인 타입 이론적 방식으로 설명하는 일은 현재 진행 중인 작업입니다(예를 들어 [LH12, BCH13]를 참고하십시오).

타입 이론적 연산에 대한 여러 관점을 표 1에 요약합니다.

타입	논리	집합	호모토피
A	명제	집합	공간
$a : A$	증명	원소	점
$B(x)$	술어	집합족	올뭉치
$b(x) : B(x)$	조건부 증명	원소족	단면
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$	$\bot, \top$	$\emptyset, \{\emptyset\}$	$\emptyset, *$
$A + B$	$A \vee B$	서로소 합집합	쌍대곱
$A \times B$	$A \wedge B$	순서쌍의 집합	곱공간
$A \to B$	$A \Rightarrow B$	함수의 집합	함수 공간
$\sum_{(x:A)} B(x)$	$\exists_{x:A} B(x)$	서로소 합	전체 공간
$\prod_{(x:A)} B(x)$	$\forall_{x:A} B(x)$	곱	단면 공간
Id_A	상등 $=$	$\{ (x, x) \mid x \in A \}$	경로 공간 A^I

표 1: 타입 이론적 연산에 대한 관점 비교

미해결 문제

이 새로운 수학 분야에 기여하고자 하는 분들께는 흥미로운 미해결 문제가 많다는 사실이 격려가 될 것입니다.

그중 가장 시급한 문제는 아마도 Voevodsky가 [Voe12]에서 제기한 유니밸런스 공리의 "구성성"일 것입니다. 타입 이론의 기본 체계는 Gentzen의 자연 연역 구조를 따릅니다. 논리 결합자는 도입 규칙으로 정의되며, 계산 규칙으로 정당화되는 제거 규칙을 가집니다. 이 패턴을 따르고, 원래 Gödel의 Dialectica 해석을 분석하기 위해 고안된 Tait의 계산 가능성 방법을 사용하면, 타입 이론이 정규화 성질을 가짐을 보일 수 있습니다. 이는 다시 타입 검사의 결정 가능성(타입 검사는 증명 검사에 대응하며, 우리는 "증명을 보면 그것이 증명임을 알아볼 수 있어야" 한다고 주장할 수 있으므로 이는 매우 중요한 성질입니다)과, 자연수 타입의 모든 닫힌 항이 수사(numeral)로 환원된다는 이른바 "정준성 성질" 같은 중요한 성질을 함의합니다. 함수 외연성 공리나 유니밸런스 공리 같은 공리로 타입 이론을 확장하면 이 마지막 성질과 도입/제거 규칙의 균일한 구조가 사라집니다. Voevodsky는 유니밸런스 공리로 확장된 타입 이론의 정준성 문제와 관련하여 정확한 수학적 추측을 정식화했습니다. 즉, 자연수 타입의 닫힌 항이 주어졌을 때, 수사 하나와 이 항이 그 수사와 같다는 증명을 항상 찾을 수 있는가 하는 것이며, 여기서 이 같음의 증명 자체는 유니밸런스 공리를 사용해도 됩니다. 더 일반적으로는, 유니밸런스 공리에 구성적 정당화를 제공할 수 있는지가 중요한 문제입니다. 고차 귀납적 타입처럼 호모토피적 동기를 가진 다른 구성을 추가하면 어떻게 됩니까? 답을 찾기 위한 방법이 현재 개발되고 있지만, 이러한 질문들은 아직 미해결 상태로 남아 있습니다.

또 하나의 기본적인 문제는 자연수처럼 본질적으로 집합(즉, 이산 공간)인 타입, 즉 자명한 경로만을 포함하는 타입을 다루기가 어렵다는 점입니다. 현재 호모토피 타입 이론은 공간을 사실상 호모토피 동치에 이르기까지만 특징지을 수 있으며, 이는 이러한 "이산 공간"이 이산 공간과 호모토피 동치일 뿐일 수도 있다는 뜻입니다. 타입 이론적으로 이는 반사성과 같지만 판단적으로 같지는 않은 경로가 많이 존재한다는 뜻입니다("판단적으로"의 의미는 §1.1를 참조하십시오). 이러한 호모토피 불변성에는 장점도 있지만, 이 "무의미한" 동일성 항들은 논증과 구성에 불필요한 복잡성을 초래하므로, 이를 체계적으로 제거하거나 하나로 합치는 방법이 있다면 편리할 것입니다.

더 전문적이지만 그에 못지않게 중요한 문제는 호모토피 타입 이론과, 현재 고차 범주론과 호모토피 이론의 교차점에서 진행되고 있는 고차 토포스 연구 사이의 관계입니다. 두 분야에 모두 익숙한 사람들 사이에서는 이 둘이 밀접하게 연결되어 있다는 확신이 커지고 있습니다. 예를 들어 유니밸런트 유니버스의 개념은 대상 분류자의 개념과 일치해야 하며, 고차 귀납적 타입은 국소 표현 가능성의 "초등적" 반영이어야 합니다. 더 일반적으로, 직관주의 고차 논리가 일반적인 1-토포스의 내부 언어인 것과 마찬가지로, 호모토피 타입 이론은 $(\infty,1)$-토포스의 "내부 언어"여야 합니다. 그러나 이러한 전반적인 합의에도 불구하고 세부 사항은 아직 규명되어야 하며 — 특히 정합성과 엄격성의 문제가 아직 다루어져야 합니다 — 이를 규명하면 틀림없이 두 개념 모두에 대한 더 깊은 통찰을 얻게 될 것입니다.

그러나 앞으로 해야 할 작업 중 단연 가장 큰 분야는 이 새로운 체계에서 일상적인 수학을 형식화하는, 현재 진행 중인 작업입니다. 기초 호모토피 이론과 범주론의 몇몇 사실을 형식화하는 데 최근 거둔 성공은 고무적이며, 그중 일부는 장 8 및 9에서 설명합니다. 그러나 분명히 아직 해야 할 일이 많이 남아 있습니다.

호모토피 타입 이론 커뮤니티는 http://homotopytypetheory.org에서 웹사이트와 그룹 블로그를 운영하고 있으며, 토론용 이메일 목록도 운영하고 있습니다. 새로운 참여자는 언제나 환영합니다!

이 책을 읽는 방법

이 책은 두 부분으로 나뉩니다. 부 I "기초"에서는 호모토피 타입 이론의 기본 개념을 전개합니다. 이는 구체적인 주제들을 전개하는 토대가 되는 수학적 기초이며, 유니밸런트 기초 접근법을 이해하는 데 필요합니다. 프로그래머에게 이는 "라이브러리 코드"에 해당합니다. 유니밸런트 기초는 새롭고 다른 종류의 수학이므로 그 기본 개념에 익숙해지려면 시간이 좀 필요합니다. 따라서 부 I는 상당히 방대합니다.

부 II "수학"은 부 I의 기본 개념을 바탕으로, 호모토피 이론(제8장), 범주론(제9장), 집합론(제10장), 실해석학(제11장)이라는 네 가지 수학 분야에서 유니밸런트 기초로 할 수 있는 새로운 일들 중 일부를 보여 주는 네 개의 장으로 구성됩니다. 부 II의 장들은 서로 어느 정도 독립적이지만, 가끔 한 장에서 다른 장에서 증명한 보조정리를 사용하기도 합니다.

유니밸런트 기초를 진지하게 이해하고 그 안에서 작업할 수 있기를 원하는 독자라면 결국 부 I의 대부분을 읽고 이해해야 할 것입니다. 그러나 유니밸런트 기초와 그것으로 무엇을 할 수 있는지 맛보기만 원하는 독자라면, 부 II의 "본론"에 도달하기 전에 200쪽이 넘는 분량을 공부해야 한다는 사실에 주춤하는 것도 당연합니다. 다행히 부 II의 장들을 읽는 데 부 I 전체가 필요한 것은 아닙니다. 부 II의 각 장은 해당 주제, 유니밸런트 기초가 그 주제에 기여할 수 있는 바, 그리고 부 I에서 필요한 배경 지식에 대한 간략한 개요로 시작하므로, 용기 있는 독자는 곧바로 자신이 좋아하는 주제의 해당 장으로 넘어갈 수 있습니다. 부 II의 하나 이상의 장을 이보다 더 깊이 이해하고 싶지만 부 I 전체를 읽을 준비는 되지 않은 독자를 위해, 여기서 부 I를 간략히 요약하고 어느 부분이 부 II의 어느 장에 필요한지 설명합니다.

제1장는 호모토피적 해석 이전의 타입 이론의 기본 개념을 다룹니다. Martin-Löf 타입 이론에 익숙한 독자는 이 장을 빠르게 훑어보며 우리가 사용하는 이론의 세부 사항을 파악할 수 있습니다. 그러나 타입 이론과 집합론 같은 다른 기초 사이에는 미묘한 차이가 많으므로, 타입 이론을 접해 본 적이 없는 독자는 제1장를 읽어야 합니다.

제2장는 타입 이론에 대한 호모토피적 관점과 이 관점을 뒷받침하는 기본 개념을 소개하고, 제1장에서 다룬 타입 이론의 각 구성 요소가 호모토피적으로 어떻게 동작하는지 설명합니다. 또한 호모토피 타입 이론의 두 가지 기본적인 혁신 중 첫 번째인 유니밸런스 공리(§2.10)를 소개합니다. 따라서 이 장은 매우 기본적인 내용이므로, 모든 독자에게 이 장을, 특히 §§2.1–2.4를 읽기를 권합니다.

제3장에서는 호모토피 타입 이론에서 논리를 어떻게 표현하는지, 그리고 그것이 고전 논리 및 구성적·직관주의적 논리와 어떻게 연결되는지를 설명합니다. 여기서는 배중률, 선택 공리, 명제적 크기 재조정 공리를 정의하며(다만 책의 나머지 부분에서는 대개 이들 중 어느 것도 가정할 필요가 없습니다), 전통적인 논리를 표현하는 데 필수적인 명제 절단도 정의합니다. 이 장은 장 10 및 11에 필수적인 배경지식이며, 제9장에는 덜 중요하고, 제8장에는 그다지 필요하지 않습니다.

장 4 및 5에서는 두 가지 특별한 주제, 즉 동치(및 관련 개념)와 일반화된 귀납적 정의를 자세히 다룹니다. 이들은 그 자체로 중요한 주제이며 호모토피 타입 이론을 더 깊이 이해하게 해 주지만, 대부분 부 II에는 필요하지 않습니다. 제4장의 보조정리 몇 개만이 여기저기서 사용되며, §§5.1, 5.6 및 5.7의 일반적인 논의는 제6장에 필요한 직관을 얻는 데 도움이 됩니다. §5.7에서 논의하는 일반화된 종류의 귀납적 정의는 장 10 및 11의 몇몇 곳에서도 사용됩니다.

제6장에서는 호모토피 타입 이론의 두 번째 기본적인 혁신 — 고차 귀납적 타입 — 을 많은 예와 함께 소개합니다. 고차 귀납적 타입은 제8장의 주된 연구 대상이며, 그중 특정한 몇몇은 장 10 및 11에서 중요한 역할을 합니다. §9.9에서 한 가지 예가 사용되기는 하지만, 제9장에는 그다지 필요하지 않습니다.

마지막으로 제7장에서는 호모토피 n-타입과 n-연결 타입 같은 관련 개념을 논의합니다. 이 개념들은 제8장에 중요하지만 부 II의 나머지 부분에서는 그다지 중요하지 않습니다. 다만 일부 보조정리의 $n = -1$인 경우가 §10.1에서 사용됩니다.

이로써 부 I가 끝납니다. 앞서 언급했듯이 부 II는 서로 거의 관련이 없는 네 개의 장으로 구성되며, 각 장은 유니밸런트 기초가 특정 주제에 무엇을 제공할 수 있는지 설명합니다.

부 II의 장들 중에서는 아마도 제8장(호모토피 이론)가 가장 급진적일 것입니다. 유니밸런트 기초는 호모토피 이론에 대해 매우 다른 "종합적" 접근을 취하는데, 여기서 호모토피 타입은 위상 공간이나 다른 집합론적 모형을 사용하여 구성되는 것이 아니라 기본 대상(즉, 타입)입니다. 이를 통해 대수적 위상수학의 고전적인 정리들에 대한 새로운 방식의 증명이 가능해지며, 우리는 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$에서부터 프로이덴탈 현수 정리에 이르기까지 그 일부를 소개합니다.

제9장(범주론)에서는 상등은 곧 동형사상이라는 유니밸런스 공리의 원리를 따르면서 기본적인 (1-)범주론을 전개합니다. 이렇게 하면 모든 정의와 구성이 범주의 동치 아래에서 자동으로 불변이 된다는 좋은 효과가 있습니다. 실제로 동치인 타입이 같은 것과 마찬가지로 동치인 범주도 같습니다. (이는 고차 범주론 및 고차 토포스 이론과도 연관이 있습니다.)

제10장(집합론)에서는 유니밸런트 기초에서의 집합을 연구합니다. 집합의 범주는 통상적인 성질을 가지므로, 호모토피적 구조나 고차 범주적 구조가 필요 없는 모든 수학에 기초를 제공합니다. 또한 유니밸런스가 기수와 순서수를 다루기 조금 더 편하게 만들어 준다는 점과, 고차 귀납적 타입이 체르멜로–프렝켈 집합론의 통상적인 공리를 만족하는 누적 위계를 만들어 낸다는 점도 살펴봅니다.

제11장(실수)에서는 Dedekind 실수의 구성을 요약한 다음, 고차 귀납적 타입을 사용하면 구성적 수학에서 발생하는 몇 가지 관련 문제를 피하는 Cauchy 실수의 정의가 가능하다는 점을 살펴봅니다. 이어서 콘웨이의 초현실수에 대한 비슷한 접근을 개략적으로 소개합니다.

이 책의 각 장은 주석 절로 끝나며, 이 절에는 가능한 한 역사적 논평, 참고 문헌, 결과의 출처를 모아 두었습니다. 또한 독자가 유니밸런트 기초 위에서 수학을 하는 데 익숙해지도록 돕기 위해 각 장의 끝에 연습문제를 실었습니다.

끝으로, 이 책은 매우 많은 사람이 대규모로 협업하여 쓴 책이라는 점을 기억해 주십시오. 저희는 용어와 표기를 일관되게 맞추고 수학적 내용을 논리적으로 자연스럽게 이어지는 하나의 순서로 배열하려고 최선을 다했지만, 여전히 불완전한 부분이 남아 있을 가능성이 매우 큽니다. 그러한 미흡한 점에 대해 독자 여러분의 양해를 구하며, 다음 판을 개선하기 위한 제안을 환영합니다.

제I부

기초

제1장

타입 이론

1.1 타입 이론과 집합론

호모토피 타입 이론은 (다른 여러 역할과 더불어) 수학의 기초 언어, 즉 체르멜로–프렝켈 집합론의 대안입니다. 그러나 호모토피 타입 이론은 몇 가지 중요한 점에서 집합론과 다르게 동작하며, 여기에 익숙해지는 데에는 시간이 좀 걸릴 수 있습니다. 이러한 차이를 신중하게 설명하려면 이 절에서는 책의 나머지 부분보다 더 형식적으로 서술해야 합니다. 서론에서 밝혔듯이 우리의 목표는 타입 이론을 비형식적으로 서술하는 것입니다. 그러나 집합론에 익숙한 수학자에게는 처음에 좀 더 정밀하게 설명하는 것이 흔히 빠지는 오해와 실수를 피하는 데 도움이 될 수 있습니다.

집합론적 기초에는 두 개의 "층"이 있다는 점에 주목합시다. 하나는 1차 논리의 연역 체계이고, 다른 하나는 이 체계 안에서 정식화된, ZFC와 같은 특정 이론의 공리들입니다. 따라서 집합론은 단지 집합에 관한 것이 아니라, 집합(두 번째 층의 대상)과 명제(첫 번째 층의 대상) 사이의 상호작용에 관한 것입니다.

이와 대조적으로, 타입 이론은 그 자체로 하나의 연역 체계입니다. 즉, 1차 논리와 같은 상위 구조 안에서 정식화될 필요가 없습니다. 타입 이론에는 집합론의 두 가지 기본 개념인 집합과 명제 대신 단 하나의 기본 개념, 곧 타입이 있습니다. 명제(우리가 증명하거나, 반증하거나, 가정하거나, 부정하는 등의 대상이 되는 진술[1])는 10 쪽의 표 1에 나타낸 대응을 통해 특정한 타입과 동일시됩니다. 따라서 정리를 증명하는 수학적 활동은 대상을 구성하는 수학적 활동의 특수한 경우, 곧 이 경우에는 명제를 나타내는 타입의 원소를 구성하는 것과 동일시됩니다.

이로부터 타입 이론과 집합론의 또 다른 차이가 드러나지만, 이를 설명하려면 연역 체계 일반에 관해 조금 이야기해야 합니다. 비형식적으로 말하면, 연역 체계란 **판단**이라고 불리는 것들을 도출하기 위한 **규칙**의 모음입니다. 연역 체계를 하나의 형식적 게임으로 생각한다면, 판단은 게임 규칙을 따라 도달하는 게임 속 "국면"입니다. 연역 체계를 일종의 대수적 이론으로 생각할 수도 있습니다. 이 경우 판단은 (군의 원소처럼) 원소이고, 연역 규칙은 (군의 곱셈처럼) 연산입니다. 논리적 관점에서 보면, 판단은 이론 자체의 "내부" 진술과 달리 메타이론에 속하는 "외부" 진술로 간주할 수 있습니다.

(집합론의 기반이 되는) 1차 논리의 연역 체계에는 오직 한 종류의 판단, 즉 주어진 명제에 증명이 있다는 판단만 있습니다. 다시 말해, 각 명제 A는 "A에 증명이 있음"이라는 판단을 낳으며, 모든

[1] 혼란스럽게도, (Euclid까지 거슬러 올라가는) "명제"라는 단어를 "정리"와 같은 뜻으로 사용하는 관행 역시 흔합니다. 이 책에서는 논리학자의 용법만을 따르며, 이에 따르면 명제는 증명될 수 있는 진술이고, 정리(또는 "보조정리"나 "따름정리")는 그러한 진술 중 이미 증명된 것입니다. 따라서 "$0 = 1$"과 그 부정 "$\neg(0 = 1)$"은 둘 다 명제이지만, 정리는 후자뿐입니다.

판단은 이러한 형태입니다. "A와 B로부터 $A \wedge B$를 추론함"과 같은 1차 논리의 규칙은 실제로는 "증명 구성"의 규칙으로, "A에 증명이 있음"과 "B에 증명이 있음"이라는 판단이 주어지면 "$A \wedge B$에 증명이 있음"을 연역할 수 있다는 뜻입니다. "A에 증명이 있음"이라는 판단은 이론의 내부 진술인 명제 A 자체와는 다른 수준에 존재한다는 점에 유의하십시오.

"A에 증명이 있음"에 대응하는 타입 이론의 기본 판단은 "$a : A$"로 쓰며, "항 a가 타입 A를 가짐" 또는 좀 더 느슨하게 "a가 A의 원소임"(또는 호모토피 타입 이론에서는 "a가 A의 점임")이라고 읽습니다. A가 명제를 나타내는 타입일 때, a를 A의 증명 가능성에 대한 증인, 또는 A가 참이라는 증거라고 부를 수 있습니다(심지어 A의 증명이라고 부를 수도 있지만, 우리는 이 혼란스러운 용어를 피하려고 합니다). 이 경우, 타입 이론에서 (어떤 a에 대해) 판단 $a : A$를 도출할 수 있는 것은 정확히 1차 논리에서 이에 대응하는 판단 "A에 증명이 있음"을 도출할 수 있을 때입니다(이 책 전반에서 논의하듯이, 가정하는 공리와 수학을 부호화하는 방식의 차이는 제외합니다).

한편, 타입 A를 명제보다는 집합에 가깝게 다루는 경우라면(뒤에서 보겠지만 이 구분은 모호해질 수 있습니다), "$a : A$"는 집합론의 진술 "$a \in A$"에 대응하는 것으로 볼 수 있습니다. 그러나 "$a : A$"는 판단인 반면 "$a \in A$"는 명제라는 점에서 본질적인 차이가 있습니다. 특히 타입 이론 내부에서 작업할 때에는 "$a : A$이면 $b : B$가 아님"과 같은 진술을 할 수 없으며, 판단 "$a : A$"를 "반증"할 수도 없습니다.

이를 이해하는 좋은 방법은 다음과 같습니다. 집합론에서 "소속"은 이미 존재하는 두 대상 "a"와 "A" 사이에 성립할 수도 있고 성립하지 않을 수도 있는 관계입니다. 반면 타입 이론에서는 원소 "a"를 따로 떼어 이야기할 수 없습니다. 모든 원소는 그 본성상 어떤 타입의 원소이며, 그 타입은 (일반적으로 말해) 유일하게 결정됩니다. 따라서 비형식적으로 "x를 자연수라고 합시다"라고 말할 때, 집합론에서 이는 "x를 어떤 것이라 하고 $x \in \mathbb{N}$라고 가정합시다"를 줄인 표현입니다. 반면 타입 이론에서 "$x : \mathbb{N}$라고 합시다"는 원자적 진술입니다. 즉, 타입을 명시하지 않고서는 변수를 도입할 수 없습니다.

언뜻 보기에는 이것이 불편한 제약처럼 보일 수 있지만, 오히려 "x를 자연수라고 합시다"의 직관적인 수학적 의미에 더 가깝다고 할 수 있습니다. 실제로 "$a \in A$"가 판단이 아니라 명제여야 할 필요가 있을 때마다, a가 그 원소이고 A가 그 부분집합임이 알려진 주변 집합 B가 항상 존재하는 것으로 보입니다. 이러한 상황도 타입 이론에서 쉽게 나타낼 수 있습니다. a를 타입 B의 원소로, A를 B 위의 술어로 잡으면 됩니다. §3.5를 참조하십시오.

타입 이론과 집합론의 마지막 차이는 상등을 다루는 방식입니다. 수학에서 익숙한 상등 개념은 명제입니다. 예를 들어 상등을 반증하거나 상등을 가설로 가정할 수 있습니다. 타입 이론에서는 명제가 타입이므로, 이는 상등이 타입이라는 뜻입니다. 즉, 원소 $a, b : A$(곧 $a : A$와 $b : A$ 둘 다)에 대해 타입 "$a =_A b$"가 있습니다. (물론 호모토피 타입 이론에서는 이 상등 명제가 익숙하지 않은 방식으로 동작할 수 있습니다. §1.12 및 제2장와 이 책의 나머지 부분을 참조하십시오.) $a =_A b$에 원소가 있을 때, a와 b가 **(명제적으로) 같다**고 말합니다.

그러나 타입 이론에는 판단 "$x : A$"와 같은 수준에 존재하는 상등 판단도 필요합니다. 이를 **판단적 상등** 또는 **정의적 상등**이라고 부르며, $a \equiv b : A$ 또는 간단히 $a \equiv b$로 씁니다. 이를 "정의에 의해 같음"이라는 뜻으로 생각하면 도움이 됩니다. 예를 들어, 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 등식 $f(x) = x^2$로 정의하면, 식 $f(3)$은 정의에 의해 3^2과 같습니다. 이론 내부에서 정의에 의한 상등을 부정하거나 가정하는 것은 의미가 없습니다. 즉, "x가 정의에 의해 y와 같으면, z는 정의에 의해 w와 같지 않음"이라고 말할 수 없습니다. 두 식이 정의에 의해 같은지 아닌지는 단지 정의를 전개해 보면 되는 문제입니다. 특히 이는 알고리즘적으로 결정 가능합니다(다만 그 알고리즘은 반드시 이론 내부가 아니라 메타이론에 속합니다).

타입 이론이 더 복잡해지면 판단적 상등은 이보다 더 미묘해질 수 있지만, 출발점으로 삼기에는 좋은 직관입니다. 또는 연역 체계를 대수적 이론으로 본다면, 판단적 상등은 단순히 그 이론에서의

상등으로, 군의 원소들 사이의 상등에 해당합니다 — 혼동의 여지가 있는 유일한 점은 타입 이론의 연역 체계 내부에 내부적으로 "상등" 개념처럼 동작하는 대상(즉 타입 "$a = b$")이 또한 있다는 것입니다.

우리가 판단적 상등 개념을 원하는 이유는 이것으로 또 다른 형태의 판단인 "$a : A$"를 제어할 수 있기 때문입니다. 예를 들어, $3^2 = 9$의 증명을 제시했다고, 즉 어떤 p에 대해 판단 $p : (3^2 = 9)$를 도출했다고 합시다. 그러면 $f(3)$은 정의에 의해 3^2이므로, 같은 증인 p가 $f(3) = 9$의 증명으로도 인정되어야 합니다. 이를 나타내는 가장 좋은 방법은 판단 $a : A$와 $A \equiv B$가 주어지면 판단 $a : B$를 도출할 수 있다는 규칙을 두는 것입니다.

따라서 우리에게 타입 이론은 두 가지 형태의 판단에 기반한 연역 체계입니다:

판단	의미
$a : A$	"a는 타입 A의 대상입니다"
$a \equiv b : A$	"a와 b는 타입 A의 정의상 같은 대상입니다"

정의적 상등을 도입할 때, 즉 어떤 것을 다른 것과 같다고 정의할 때에는 기호 ":≡"를 사용하겠습니다. 따라서 위의 함수 f의 정의는 $f(x) :\equiv x^2$로 쓰게 됩니다.

판단들을 결합하여 더 복잡한 진술을 만들 수는 없으므로, 기호 ":"와 "≡"는 다른 어떤 것보다도 약하게 결합합니다.[2] 따라서 예를 들어 "$p : x = y$"는 "$p : (x = y)$"로 해석해야 하며, "$x = y$"가 타입이므로 이 해석은 의미가 있습니다. 반면 "$(p : x) = y$"로 해석해서는 안 되며, "$p : x$"는 판단이어서 어떤 것과도 같을 수 없으므로 이 해석은 무의미합니다. 마찬가지로 "$A \equiv x = y$"는 "$A \equiv (x = y)$"로만 해석될 수 있습니다. 다만 이처럼 극단적인 경우에는 읽기 쉽도록 어쨌든 괄호를 덧붙이는 것이 좋습니다. 더욱이 뒤에서는 상등들을 사슬처럼 잇는 흔한 표기법을 따를 것이며 — 예를 들어 "$a = b$이고 $b = c$이고 $c = d$이므로 $a = d$임"이라는 뜻으로 $a = b = c = d$라고 씁니다 — 이러한 사슬에 판단적 상등도 포함하겠습니다. 대개는 문맥만으로 의도가 충분히 분명해집니다.

여기서 함께 언급해 두기에 적절할 듯한 사실이 있습니다. f가 A에서 B로 가는 함수라는 사실을 나타내는 흔한 수학 표기 "$f : A \to B$"는 타입 판단으로 볼 수 있습니다. "$A \to B$"를 A에서 B로 가는 함수들의 타입에 대한 표기로 사용하기 때문입니다(이는 타입 이론의 표준 관행입니다. §1.4를 참조하십시오).

판단은 $x : A$ 형태의 가정에 의존할 수 있습니다. 여기서 x는 변수이고 A는 타입입니다. 예를 들어, $m, n : \mathbb{N}$라는 가정 아래에서 대상 $m + n : \mathbb{N}$를 구성할 수 있습니다. 또 다른 예로, A가 타입이고 $x, y : A$이며 $p : x =_A y$라고 가정하면 원소 $p^{-1} : y =_A x$를 구성할 수 있습니다. 이러한 모든 가정의 모음을 **문맥**이라고 부릅니다. 위상수학적 관점에서 문맥은 "매개변수 공간"으로 생각할 수 있습니다. 사실 뒤의 가정은 앞의 가정에 의존할 수 있으므로, 엄밀히 말해 문맥은 가정들의 순서 있는 목록이어야 합니다. 즉, 가정 $x : A$는 타입 A에 나타나는 모든 변수에 대한 가정을 한 뒤에야 할 수 있습니다.

가정 $x : A$에서 타입 A가 명제를 나타낸다면, 이 가정은 가설의 타입 이론적 형태입니다. 즉, 명제 A가 성립한다고 가정하는 것입니다. 타입을 명제로 볼 때에는 그 증명의 이름을 생략할 수 있습니다. 따라서 위의 두 번째 예에서는 그 대신 $x =_A y$를 가정하면 $y =_A x$를 증명할 수 있다고 말할 수 있습니다. 그러나 우리는 "증명 관련적" 수학을 하고 있으므로, 증명을 대상으로서 자주 다시 참조할 것입니다. 예를 들어 위의 예에서는 p^{-1}이 추이성과 반사성의 증명들과 함께 그루포이드처럼 동작한다는 것을 보이고 싶을 수 있습니다. 제2장를 참조하십시오.

[2] 형식화된 타입 이론에서는 쉼표와 턴스타일이 이보다 더 약하게 결합할 수 있습니다. 예를 들어, $x : A, y : B \vdash c : C$는 $((x : A), (y : B)) \vdash (c : C)$로 해석됩니다. 그러나 이 책에서는 제A장에 이르기 전까지 이러한 표기를 삼가겠습니다.

가정이라는 단어의 이러한 의미 아래에서, 우리는 (변수 $p : x = y$를 가정함으로써) 명제적 등식을 가정할 수는 있지만, 판단적 상등 $x \equiv y$는 원소를 가질 수 있는 타입이 아니므로 가정할 수 없다는 점에 유의하십시오. 그러나 판단적 상등을 가정하는 것과 다소 비슷해 보이는 다른 일은 할 수 있습니다. 변수 $x : A$를 포함하는 타입이나 원소가 있다면, x 자리에 임의의 특정 원소 $a : A$를 치환하여 더 구체적인 타입이나 원소를 얻을 수 있습니다. 이 치환 과정을 가리키기 위해 때때로 "이제 $x \equiv a$라고 가정합시다"와 같은 표현을 사용하겠지만, 이는 위에서 도입한 기술적 의미의 가정은 아닙니다.

같은 이유로, 판단적 상등을 증명할 수도 없습니다. 판단적 상등은 증인을 제시할 수 있는 타입이 아니기 때문입니다. 그럼에도 우리는 때때로 정리의 일부로 판단적 상등을 서술할 것입니다. 예를 들어 "$f(x) \equiv y$인 $f : A \to B$가 존재함"과 같은 식입니다. 이는 두 개의 별개 판단을 내리는 것으로 보아야 합니다. 먼저 어떤 원소 f에 대해 판단 $f : A \to B$를 내리고, 그다음 $f(x) \equiv y$라는 추가 판단을 내리는 것입니다.

이 장의 나머지 부분에서는 이 책의 목적에 충분한 정도로 타입 이론을 비형식적으로 소개하고자 합니다. 더 형식적인 설명은 제A장에서 제시합니다. (판단적으로 같은 것들은 언제나 서로 대입할 수 있다는 사실과 같은) 꽤 자명한 몇몇 규칙을 제외하면, 타입 이론의 규칙들은 타입 형성자별로 묶을 수 있습니다. 각 타입 형성자는 (이전에 구성한 타입을 활용할 수도 있는) 타입을 구성하는 방법과, 그 타입의 원소를 구성하는 규칙 및 그 원소의 동작에 관한 규칙으로 이루어집니다. 대부분의 경우 이러한 규칙들은 꽤 예측 가능한 패턴을 따르지만, 여기서 이를 엄밀하게 정식화하려고 하지는 않겠습니다. 다만 §1.5의 첫머리와 제5장도 참조하십시오.

이 장에서 제시하는 타입 이론의 중요한 특징은 공리 없이 전적으로 규칙만으로 이루어져 있다는 점입니다. 판단을 통해 연역 체계를 기술할 때, 규칙은 다른 여러 판단으로부터 하나의 판단을 결론지을 수 있게 해 주는 것이고, 공리는 처음부터 주어지는 판단입니다. 연역 체계를 형식적 게임으로 생각한다면 규칙은 게임의 규칙이고 공리는 시작 배치입니다. 그리고 연역 체계를 대수적 이론으로 생각한다면 규칙은 그 이론의 연산이고, 공리는 그 이론의 어떤 특정한 자유 모형의 생성원입니다.

집합론에서 유일한 규칙은 1차 논리의 규칙(예를 들어 "A는 증명을 가진다"와 "B는 증명을 가진다"로부터 "$A \wedge B$는 증명을 가진다"를 연역할 수 있게 해 주는 규칙 등)뿐이며, 집합의 거동에 관한 모든 정보는 공리에 담겨 있습니다. 이와 대조적으로, 타입 이론에서는 보통 규칙이 모든 정보를 담고 있으며, 공리는 필요하지 않습니다. 예를 들어, §1.5에서 우리는 "$a : A$"와 "$b : B$"로부터 판단 "$(a, b) : A \times B$"를 연역할 수 있게 해 주는 규칙이 있음을 보게 될 것이며, 집합론에서 이에 대응하는 진술은 짝 공리(의 귀결)일 것입니다.

규칙만을 사용하여 타입 이론을 정식화하는 것의 장점은 규칙이 "절차적"이라는 점입니다. 특히 "정준성"과 같은 타입 이론의 좋은 계산적 성질을 가능하게 하는 것이 바로 이 성질입니다(다만 자동으로 보장해 주지는 않습니다). 그러나 이러한 방식이 전통적인 타입 이론에서는 잘 작동하지만, 호모토피 타입 이론에 필요한 모든 것을 이런 방식으로 정식화하는 방법은 아직 알지 못합니다. 특히 §§2.9 및 2.10 및 제6장에서는 추가적인 공리, 특히 유니밸런스 공리를 도입하여 이 장에서 제시하는 타입 이론의 규칙을 보강해야 합니다. 하지만 이 장에서는 전통적인 규칙 기반 타입 이론으로 범위를 한정합니다.

1.2 함수 타입

타입 A와 B가 주어지면, 정의역이 A이고 공역이 B인 **함수** 들의 타입 $A \to B$를 구성할 수 있습니다. 함수를 **사상**이라고 부르기도 합니다. 집합론에서와 달리 함수는 함수적 관계로 정의되지 않으며, 오히려 타입 이론의 원시 개념입니다. 함수로 무엇을 할 수 있는지, 함수를 어떻게 구성하는지, 함수가 어떤 등식을 유도하는지를 규정함으로써 함수 타입을 설명합니다.

함수 $f : A \to B$와 정의역의 원소 $a : A$가 주어지면, 함수를 **적용** 하여 공역 B의 원소를 얻을 수 있으며, 이를 $f(a)$로 표기하고 a에서 f의 **값**이라고 부릅니다. 타입 이론에서는 괄호를 생략하고 $f(a)$를 간단히 fa로 표기하는 경우가 많으며, 이 책에서도 때때로 그렇게 할 것입니다.

그렇다면 $A \to B$의 원소는 어떻게 구성할 수 있습니까? 서로 동치인 두 가지 방법이 있습니다. 직접 정의하는 방법과 λ-추상화를 사용하는 방법입니다. 정의에 의해 함수를 도입한다는 것 은 함수에 이름 — 이를테면 f — 을 붙여 함수를 도입하고, 다음 등식을 제시하여 $f : A \to B$를 정의한다고 말하는 것을 의미합니다

$$f(x) :\equiv \Phi \tag{1.2.1}$$

여기서 x는 변수 이고 Φ는 x를 사용할 수 있는 식입니다. 이것이 유효하려면 $x : A$를 가정했을 때 $\Phi : B$임을 확인해야 합니다.

이제 Φ 안의 변수 x를 a로 대체하여 $f(a)$를 계산할 수 있습니다. 예를 들어 $f(x) :\equiv x + x$로 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 생각해 봅시다. ($\mathbb{N}$과 $+$는 §1.9에서 정의합니다.) 그러면 $f(2)$는 $2 + 2$와 판단적으로 같습니다.

함수에 이름을 붙이고 싶지 않다면 λ-**추상화**를 사용할 수 있습니다. 위와 같이 $x : A$를 사용할 수 있는 타입 B의 식 Φ가 주어지면, (1.2.1)로 정의된 것과 같은 함수를 나타내기 위해 $\lambda(x : A).\Phi$라고 씁니다. 따라서 다음이 성립합니다

$$(\lambda(x : A).\Phi) : A \to B.$$

앞 문단의 예에 대해서는 다음 타이핑 판단이 성립합니다

$$(\lambda(x : \mathbb{N}).x + x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

또 다른 예로, 임의의 타입 A와 B 및 임의의 원소 $y : B$에 대해 **상수 함수** $(\lambda(x : A).y) : A \to B$가 있습니다.

타이핑 $x : A$는 함수 $\lambda x.\Phi$가 타입 $A \to B$를 가진다는 판단으로부터 추론할 수 있으므로, 일반적으로 λ-추상화에서 변수 x의 타입을 생략하고 $\lambda x.\Phi$라고 씁니다. 관례상 변수 바인딩 "$\lambda x.$"의 "유효 범위" 는 괄호로 구분되지 않는 한 식의 나머지 전체입니다. 따라서 예를 들어 $\lambda x.x + x$는 $(\lambda x.x) + x$가 아니라 $\lambda x.(x + x)$로 해석해야 합니다(이 경우 전자는 어차피 타입이 맞지 않습니다).

동치인 또 다른 표기법은 다음과 같습니다

$$(x \mapsto \Phi) : A \to B.$$

때로는 암묵적인 λ-추상화를 나타내기 위해 식 Φ에서 변수 대신 빈칸 "$-$"를 사용하기도 합니다. 예를 들어 $g(x, -)$는 $\lambda y.g(x, y)$를 달리 쓰는 방법입니다.

이제 λ-추상은 함수이므로, 이를 인자 $a : A$에 적용할 수 있습니다. 그러면 다음과 같은 **계산 규칙**[3]을 얻으며, 이는 정의적 상등입니다:

$$(\lambda x.\Phi)(a) \equiv \Phi'$$

여기서 Φ'은 식 Φ에서 x가 나타나는 모든 곳을 a로 대체한 식입니다. 위의 예를 이어 가면 다음이 성립합니다

$$(\lambda x.x + x)(2) \equiv 2 + 2.$$

[3] 이 등식을 사용하는 것을 흔히 β-**변환** 또는 β-**축약**이라고 부릅니다.

임의의 함수 $f : A \to B$로부터 람다 추상화 함수 $\lambda x. f(x)$를 구성할 수 있다는 점에 유의하십시오. 이것은 정의상 "f를 그 인자에 적용하는 함수"이므로, 이를 f와 정의적으로 같다고 간주합니다:[4]

$$f \equiv (\lambda x. f(x)).$$

이 등식은 f가 그 값들에 의해 유일하게 결정됨을 보여 주므로 **함수 타입의 유일성 원리**입니다.

명시적 매개변수를 사용하는 정의에 의한 함수 도입은 λ-추상화를 사용하여 단순한 정의로 환원할 수 있습니다. 즉, 다음과 같은 $f : A \to B$의 정의를

$$f(x) :\equiv \Phi$$

다음과 같이 읽을 수 있습니다

$$f :\equiv \lambda x. \Phi.$$

변수가 포함된 계산을 할 때에는 식의 바인딩 구조를 보존해야 하므로, 변수를 역시 변수가 포함된 식으로 대체할 때 주의해야 합니다. 바인딩 구조란 λ, Π, Σ(뒤의 둘은 곧 만나게 됩니다)와 같은 바인더가 변수가 도입되는 곳과 사용되는 곳 사이에 만들어 내는 보이지 않는 연결을 뜻합니다. 예를 들어 다음과 같이 정의된 $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$을 생각해 봅시다

$$f(x) :\equiv \lambda y. x + y.$$

이제 어딘가에서 $y : \mathbb{N}$라고 가정했다면, $f(y)$는 무엇입니까? $f(x)$를 정의하는 표현식 "$\lambda y. x + y$"의 모든 곳에서 x를 단순히 y로 바꾸어 $\lambda y. y + y$를 얻는 것은 잘못입니다. 이렇게 하면 y가 **포획**되기 때문입니다. 이전에는 치환된 y가 우리의 가정을 가리키고 있었지만, 이제는 λ-추상의 인자를 가리키게 됩니다. 따라서 이러한 단순한 치환은 바인딩 구조를 파괴하여, 의미론적으로 건전하지 않은 계산을 수행할 수 있게 만듭니다.

그렇다면 이 예에서 $f(y)$는 무엇입니까? 식 $\lambda y. x + y$의 y와 같은 속박(또는 "더미") 변수 는 국소적인 의미만을 가지며, 바인딩 구조를 보존하면서 다른 어떤 변수로든 일관되게 대체할 수 있다는 점에 유의하십시오. 실제로 $\lambda y. x + y$는 $\lambda z. x + z$와 판단적으로 같다고[5] 선언됩니다. 따라서 $f(y)$는 $\lambda z. y + z$와 판단적으로 같으며, 이것이 질문에 대한 답입니다. (z 대신 y와 다른 어떤 변수를 사용하더라도 같은 결과를 얻습니다.)

물론 이 모든 내용은 수학자라면 누구에게나 익숙할 것입니다. 이는 $f(x) :\equiv \int_1^2 \frac{dt}{x-t}$일 때 $f(t)$가 $\int_1^2 \frac{dt}{t-t}$가 아니라 $\int_1^2 \frac{ds}{t-s}$라는 사실과 같은 현상입니다. λ-추상화는 적분과 정확히 같은 방식으로 더미 변수를 속박합니다.

지금까지 한 변수 함수를 정의하는 방법을 살펴보았습니다. 여러 변수 함수를 정의하는 한 가지 방법은 나중에 도입할 데카르트 곱을 사용하는 것입니다. 이 경우 매개변수가 A와 B에 속하고 결과가 C에 속하는 함수에는 $f : A \times B \to C$라는 타입이 주어집니다. 그러나 곱 타입을 사용하지 않는 또 다른 방법이 있으며, 이를 (수학자 Haskell Curry의 이름을 따서) **커링** 이라고 합니다.

커링의 아이디어는 두 입력 $a : A$와 $b : B$를 받는 함수를, 하나의 입력 $a : A$를 받아 또 다른 함수를 반환하고, 그 함수가 다시 두 번째 입력 $b : B$를 받아 결과를 반환하는 함수로 나타내는 것입니다. 즉, 두 변수 함수를 반복된 함수 타입 $f : A \to (B \to C)$에 속하는 것으로 간주합니다. 이를 괄호 없이 $f : A \to B \to C$로 쓸 수도 있으며, 이때 기본 관례로 오른쪽 결합을 따릅니다. 그러면 $a : A$와 $b : B$가 주어졌을 때, f를 a에 적용한 다음 그 결과를 b에 적용하여 $f(a)(b) : C$를 얻을 수 있습니다. 괄호가

[4] 이 등식을 사용하는 것을 흔히 η-**변환** 또는 η-**확장이라고 부릅니다.**

[5] 이 등식을 사용하는 것을 흔히 α-**변환이라고 부릅니다.**

넘쳐나는 것을 피하기 위해, 곱이 전혀 관여하지 않더라도 $f(a)(b)$를 $f(a,b)$로 쓰는 것을 허용합니다. 함수 인자를 둘러싼 괄호를 완전히 생략할 때는 $(f\,a)\,b$를 $f\,a\,b$로 쓰며, 이때 기본 결합 방향은 왼쪽이 되어 f가 올바른 순서로 인자에 적용됩니다.

명시적 매개변수를 사용한 정의 표기법은 이 상황으로도 확장됩니다. 다음과 같은 등식을 제시하여 이름 붙은 함수 $f : A \to B \to C$를 정의할 수 있습니다.

$$f(x,y) :\equiv \Phi$$

여기서 $x : A$와 $y : B$를 가정하면 $\Phi : C$입니다. λ-추상화를 사용하면 이는 다음에 해당합니다.

$$f :\equiv \lambda x.\, \lambda y.\, \Phi,$$

이는 다음과 같이 쓸 수도 있습니다.

$$f :\equiv x \mapsto y \mapsto \Phi.$$

빈칸을 여러 개 써서 여러 변수에 대해 암묵적으로 추상화할 수도 있습니다. 예를 들어 $g(-,-)$는 $\lambda x.\, \lambda y.\, g(x,y)$를 뜻합니다. 인자가 셋 이상인 함수의 커링은 방금 설명한 내용을 그대로 확장한 것입니다.

1.3 유니버스와 족

지금까지 우리는 "A는 타입이다"라는 표현을 비형식적으로 사용해 왔습니다. 이제 **유니버스**를 도입하여 이를 더 엄밀하게 만들겠습니다. 유니버스는 그 원소가 타입인 타입입니다. 소박한 집합론에서처럼, 자기 자신을 포함하는(즉, $\mathcal{U}_\infty : \mathcal{U}_\infty$인) 모든 타입의 유니버스 $\mathcal{U}_\infty$를 원할 수도 있습니다. 그러나 집합론에서와 마찬가지로 이는 건전하지 않습니다. 즉, 이로부터 명제 거짓을 나타내는 빈 타입(§1.7 참조)을 포함한 모든 타입이 원소를 가진다는 것을 연역할 수 있습니다. 예를 들어, 집합을 트리로 표현하는 방법을 사용하면 Russell의 역설을 직접 부호화할 수 있습니다 [Coq92a].

이 역설을 피하기 위해 다음과 같은 유니버스의 위계를 도입합니다

$$\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \cdots$$

여기서 모든 유니버스 $\mathcal{U}_i$는 다음 유니버스 $\mathcal{U}_{i+1}$의 원소입니다. 또한 우리의 유니버스가 **누적적**이라고 가정합니다. 즉, i^{th} 유니버스의 모든 원소는 $(i+1)^{\text{st}}$ 유니버스의 원소이기도 합니다. 다시 말해 $A : \mathcal{U}_i$이면 $A : \mathcal{U}_{i+1}$이기도 합니다. 이는 편리하지만, 원소가 더 이상 유일한 타입을 갖지 않는다는 다소 불편한 결과를 낳으며, 여기서 신경 쓸 필요가 없는 다른 면에서도 약간 까다롭습니다. 주석을 참조하십시오.

A가 타입이라고 할 때, 이는 A가 어떤 유니버스 $\mathcal{U}_i$에 속한다는 뜻입니다. 보통은 레벨 i를 명시적으로 언급하지 않고, 레벨을 일관되게 부여할 수 있다고 가정하기만 합니다. 따라서 레벨을 생략하고 $A : \mathcal{U}$로 쓸 수 있습니다. 이렇게 하면 $\mathcal{U} : \mathcal{U}$라고 쓸 수도 있는데, 이는 첨자를 암묵적으로 남겨 둔 $\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}$로 읽을 수 있습니다. 이런 방식으로 유니버스를 쓰는 것을 **타입적 모호성**이라고 합니다. 이는 편리하지만 약간 위험합니다. 자기 지시의 역설을 재현하는, 겉보기에 타당한 증명을 쓸 수 있게 해 주기 때문입니다. 어떤 논증이 올바른지 의심스럽다면, 그 논증에 나타나는 모든 유니버스에 레벨을 일관되게 부여해 보는 것으로 확인할 수 있습니다. 어떤 유니버스 $\mathcal{U}$를 가정할 때, $\mathcal{U}$에 속하는 타입을 **작은 타입**이라고 부를 수 있습니다.

주어진 타입 A에 따라 달라지는 타입들의 모음을 모델링하기 위해, 공역이 유니버스인 함수 $B : A \to \mathcal{U}$를 사용합니다. 이러한 함수를 **타입 족**(또는 때로 의존 타입)이라고 합니다. 이는 집합론에서 사용하는 집합족에 대응합니다.

타입 족의 한 예로 유한 집합의 족 $\mathsf{Fin} : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$가 있으며, 여기서 $\mathsf{Fin}(n)$은 정확히 n개의 원소를 갖는 타입입니다. (아직은 족 Fin을 정의할 수 없습니다 — 사실 그 정의역 $\mathbb{N}$조차 아직 도입하지 않았습니다 — 하지만 곧 정의할 수 있게 됩니다. 연습문제 1.9을 참조하십시오.) $\mathsf{Fin}(n)$의 원소를 $0_n, 1_n, \dots, (n-1)_n$으로 나타낼 수 있는데, 첨자는 n과 m이 다르면 $\mathsf{Fin}(n)$의 원소가 $\mathsf{Fin}(m)$의 원소와 다르며, 이들이 모두 (§1.9에서 도입할) 일반적인 자연수와도 다르다는 점을 강조하기 위한 것입니다.

타입 족의 더 자명한(그러나 매우 중요한) 예로 타입 $B : \mathcal{U}$에서의 **상수** 타입 족 이 있으며, 이는 물론 상수 함수 $(\lambda(x:A).B) : A \to \mathcal{U}$입니다.

예가 아닌 경우로, 우리가 다루는 타입 이론에는 "$\lambda(i:\mathbb{N}).\mathcal{U}_i$"라는 타입 족이 없습니다. 실제로 그 공역이 될 만큼 큰 유니버스가 없습니다. 게다가 유니버스 $\mathcal{U}_i$의 첨자 i를 타입 이론의 자연수 $\mathbb{N}$(후자는 §1.9에서 도입합니다)와 동일시하지도 않습니다.

1.4 의존 함수 타입(Π-타입)

타입 이론에서는 **Π-타입** 또는 **의존 함수 타입**이라고 하는, 함수 타입의 더 일반적인 형태를 자주 사용합니다. Π-타입의 원소는 함수가 적용되는 정의역의 원소에 따라 공역 타입이 달라질 수 있는 함수이며, 이를 **의존 함수**라고 합니다. 이 타입은 주어진 타입에 걸친 데카르트 곱으로도 볼 수 있으므로 "Π-타입"이라는 이름을 사용합니다.

타입 $A : \mathcal{U}$와 족 $B : A \to \mathcal{U}$가 주어지면 의존 함수의 타입 $\prod_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}$를 구성할 수 있습니다. 이 타입에는 다음과 같은 여러 대안적 표기법이 있습니다

$$\textstyle\prod_{(x:A)} B(x) \qquad \prod\limits_{(x:A)} B(x) \qquad \prod(x:A),\ B(x).$$

B가 상수 족이면 의존 곱 타입은 일반적인 함수 타입입니다:

$$\textstyle\prod_{(x:A)} B \equiv (A \to B).$$

실제로 Π-타입의 모든 구성은 일반적인 함수 타입에 대한 대응하는 구성의 일반화입니다.

명시적 정의를 통해 의존 함수를 도입할 수 있습니다. f가 정의하려는 의존 함수의 이름일 때 $f : \prod_{(x:A)} B(x)$를 정의하려면, 변수 $x : A$를 포함할 수도 있는 식 $\Phi : B(x)$가 필요하며, 다음과 같이 씁니다

$$f(x) :\equiv \Phi \qquad \text{for } x : A.$$

또는 **λ-추상화**

$$\lambda x.\Phi \ :\ \prod_{x:A} B(x). \tag{1.4.1}$$

비의존 함수와 마찬가지로, 의존 함수 $f : \prod_{(x:A)} B(x)$를 인자 $a : A$에 **적용**하여 원소 $f(a) : B(a)$를 얻을 수 있습니다. 등식은 일반적인 함수 타입의 경우와 같습니다. 즉, 다음과 같은 계산 규칙이 있습니다. $a : A$가 주어지면 $f(a) \equiv \Phi'$이고 $(\lambda x.\Phi)(a) \equiv \Phi'$입니다. 여기서 Φ'은 Φ에 나타나는 x를 모두 a로 바꾸어 얻은 것입니다(언제나처럼 변수 포획은 피합니다). 마찬가지로 임의의 $f : \prod_{(x:A)} B(x)$에 대해 유일성 원리 $f \equiv (\lambda x.f(x))$가 성립합니다.

예를 들어, §1.3에서 표준 유한 집합들을 값으로 갖고 원소가 $0_n, 1_n, \dots, (n-1)_n : \mathsf{Fin}(n)$인 타입 족 $\mathsf{Fin} : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$가 있었음을 떠올려 보십시오. 그러면 비어 있지 않은 각 유한 타입의 "가장 큰" 원소를 반환하는 의존 함수 $\mathsf{fmax} : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{Fin}(n+1)$, 즉 $\mathsf{fmax}(n) :\equiv n_{n+1}$이 있습니다. Fin 자체의 경우와 마찬가지로 아직은 fmax를 정의할 수 없지만 곧 정의할 수 있게 됩니다. 연습문제 1.9을 참조하십시오.

지금 정의할 수 있는 의존 함수 타입의 또 다른 중요한 부류는 주어진 유니버스에 대해 **다형적**인 함수들입니다. 다형 함수란 타입을 인수 중 하나로 받은 다음 그 타입의 원소들(또는 그 타입으로부터 구성한 다른 타입의 원소들)에 작용하는 함수입니다. 그 예로 다형 항등 함수 $\mathsf{id} : \prod_{(A:\mathcal{U})} A \to A$가 있으며, 이를 $\mathsf{id} :\equiv \lambda(A:\mathcal{U}).\lambda(x:A).x$로 정의합니다. ($\lambda$-추상화와 마찬가지로 Π는 구분 기호로 제한하지 않는 한 자동으로 식의 나머지 부분 전체를 범위로 삼습니다. 따라서 $\mathsf{id} : \prod_{(A:\mathcal{U})} A \to A$는 $\mathsf{id} : \prod_{(A:\mathcal{U})} (A \to A)$를 의미합니다. 이러한 관례는 수학에서는 드물지만 타입 이론에서는 일반적입니다.)

때로는 의존 함수의 일부 인수를 아래 첨자로 씁니다. 예를 들어, 다형 항등 함수를 $\mathsf{id}_A(x) :\equiv x$로 동등하게 정의할 수도 있습니다. 또한 문맥에서 추론할 수 있는 인수는 아예 생략할 수도 있습니다. 예를 들어, $a : A$이면 $\mathsf{id}(a)$라고 써도 모호하지 않습니다. id를 a에 적용할 수 있으려면 id가 id_A를 의미해야 하기 때문입니다.

다형 함수의 또 다른, 덜 자명한 예로는 인수가 두 개인 (커링된) 함수의 인수 순서를 바꾸는 "swap" 연산이 있습니다:

$$\mathsf{swap} : \prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(B:\mathcal{U})} \prod_{(C:\mathcal{U})} (A \to B \to C) \to (B \to A \to C).$$

이는 다음과 같이 정의할 수 있습니다

$$\mathsf{swap}(A, B, C, g) :\equiv \lambda b.\, \lambda a.\, g(a)(b).$$

타입 인수를 아래 첨자로 써서 동등하게 나타낼 수도 있습니다:

$$\mathsf{swap}_{A,B,C}(g)(b, a) :\equiv g(a, b).$$

일반 함수에서와 마찬가지로, (swap과 같이) 인수가 여러 개인 의존 함수를 정의할 때에도 커링을 사용한다는 점에 유의하십시오. 그러나 의존적인 경우에는 두 번째 정의역이 첫 번째 정의역에 의존할 수 있고, 공역은 둘 모두에 의존할 수 있습니다. 즉, $A : \mathcal{U}$와 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$ 및 $C : \prod_{(x:A)} B(x) \to \mathcal{U}$가 주어지면, 인수가 두 개인 함수들의 타입 $\prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} C(x, y)$를 구성할 수 있습니다. B가 상수이고 A와 같은 경우에는 표기를 줄여 $\prod_{(x,y:A)}$로 쓸 수 있습니다. 예를 들어, swap의 타입은 다음과 같이 쓸 수도 있습니다

$$\mathsf{swap} : \prod_{A,B,C:\mathcal{U}} (A \to B \to C) \to (B \to A \to C).$$

마지막으로, $f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} C(x, y)$와 인수 $a : A$ 및 $b : B(a)$가 주어지면 $f(a)(b) : C(a, b)$를 얻으며, 앞에서와 마찬가지로 이를 $f(a, b) : C(a, b)$로 씁니다.

1.5 곱 타입

타입 $A, B : \mathcal{U}$가 주어지면 타입 $A \times B : \mathcal{U}$를 도입하며, 이를 두 타입의 **데카르트 곱**이라고 부릅니다. 또한 **단위 타입** $\mathbf{1} : \mathcal{U}$이라고 부르는 영항 곱 타입도 도입합니다. $A \times B$의 원소는 $a : A$이고 $b : B$인

쌍 $(a, b) : A \times B$가 되고, $\mathbf{1}$의 유일한 원소는 어떤 특정한 대상 $\star : \mathbf{1}$이 되도록 의도합니다. 그러나 순서쌍을 특정한 집합으로 정의한 다음 이들을 모두 모아 데카르트 곱을 만드는 집합론과 달리, 타입 이론에서 순서쌍은 함수와 마찬가지로 원시 개념입니다.

주 1.5.1. 타입 이론에서 새로운 종류의 타입을 도입하는 데에는 일반적인 패턴이 있습니다. 이 패턴은 이미 §§1.2 및 1.4[6]에서 보았으므로, 그 일반적인 형태를 강조해 둘 가치가 있습니다. 타입을 명시하려면 다음을 명시합니다:

(i) **형성 규칙**을 통해 이러한 종류의 새로운 타입을 형성하는 방법. (예를 들어, A가 타입이고 B가 타입이면 함수 타입 $A \to B$를 형성할 수 있습니다. A가 타입이고 $x : A$에 대해 $B(x)$가 타입이면 의존 함수 타입 $\prod_{(x:A)} B(x)$를 형성할 수 있습니다.)

(ii) 그 타입의 원소를 구성하는 방법. 이를 그 타입의 **생성자** 또는 **도입 규칙**이라고 부릅니다. (예를 들어, 함수 타입에는 생성자가 하나 있는데, 바로 λ-추상화입니다. $f(x) :\equiv 2x$와 같은 직접적인 정의는 λ-추상화 $f :\equiv \lambda x.2x$로 동등하게 표현할 수 있음을 떠올려 보십시오.)

(iii) 그 타입의 원소를 사용하는 방법. 이를 그 타입의 **제거자** 또는 **제거 규칙**이라고 부릅니다. (예를 들어, 함수 타입에는 제거자가 하나 있는데, 바로 함수 적용입니다.)

(iv) **계산 규칙**[7]. 이는 제거자가 생성자에 어떻게 작용하는지를 표현합니다. (예를 들어, 함수의 경우 계산 규칙은 $(\lambda x.\Phi)(a)$가 Φ에서 x에 a를 치환한 것과 판단적으로 같다고 말합니다.)

(v) 그 타입으로 들어가거나 그 타입에서 나가는 사상의 유일성을 나타내는, 선택적인 **유일성 원리**[8]. 어떤 타입의 경우, 유일성 원리는 그 타입의 모든 원소가 그 원소에 제거자를 적용한 결과에 의해 유일하게 결정되며 그 결과에 생성자를 적용하여 재구성할 수 있다고 말함으로써 그 타입으로 들어가는 사상을 특징짓습니다 — 이로써 계산 규칙과 쌍대적으로 생성자가 제거자에 어떻게 작용하는지를 나타냅니다. (예를 들어, 함수의 경우 유일성 원리는 임의의 함수 f가 "확장된" 함수 $\lambda x. f(x)$와 판단적으로 같으며, 따라서 그 값들에 의해 유일하게 결정된다고 말합니다.) 다른 타입의 경우, 유일성 원리는 그 타입에서 나가는 모든 사상(함수)이 어떤 데이터에 의해 유일하게 결정된다고 말합니다. (그 예로 §1.7에서 도입하는 쌍대곱 타입이 있으며, 그 유일성 원리는 §2.15에서 언급합니다.)

유일성 원리를 판단적 등식의 규칙으로 채택하지 않더라도, 그 타입의 다른 규칙들로부터 명제적 등식으로서 증명할 수 있는 경우가 많습니다. 이 경우 이를 **명제적 유일성 원리**라고 부릅니다. (이후의 장들에서는 가끔 명제적 계산 규칙도 만나게 됩니다.)

§A.2의 추론 규칙들은 이에 따라 구성되고 이름 붙여져 있습니다. 예를 들어, 각 가능성이 모두 실현되어 있는 §A.2.4를 참조하십시오.

쌍을 구성하는 방법은 명백합니다. $a : A$와 $b : B$가 주어지면 $(a, b) : A \times B$를 형성할 수 있습니다. 마찬가지로 $\mathbf{1}$의 원소를 구성하는 유일한 방법이 있는데, 바로 $\star : \mathbf{1}$입니다. 우리는 "$A \times B$의 모든 원소는 쌍"이라고 기대하며, 이것이 곱의 유일성 원리입니다. 이를 타입 이론의 규칙으로 가정하지는 않지만, 나중에 명제적 등식으로서 증명할 것입니다.

이제 쌍을 어떻게 사용할 수 있습니까? 즉, 곱 타입에서 나가는 함수를 어떻게 정의할 수 있습니까? 먼저 비의존 함수 $f : A \times B \to C$의 정의를 생각해 봅시다. $A \times B$의 원소는 쌍뿐이도록 의도했으므로, f를 쌍 (a, b)에 적용했을 때의 결과를 지정함으로써 그러한 함수를 정의할 수 있으리라 기대합니다. 이러한 결과는 함수 $g : A \to B \to C$를 제공함으로써 지정할 수 있습니다. 따라서 새로운 규칙(곱의

[6] 앞서 다룬 유니버스에 대한 설명은 예외입니다.
[7] β-**축약**이라고도 합니다.
[8] η-**확장**이라고도 합니다.

제거 규칙)을 도입하는데, 이 규칙에 따르면 그러한 임의의 g에 대해 함수 $f : A \times B \to C$를 다음과 같이 정의할 수 있습니다

$$f((a,b)) :\equiv g(a)(b).$$

여기서 $g(a,b)$라고 쓰지 않는 것은 g가 곱 위의 함수가 아님을 강조하기 위해서입니다. (하지만 이 책의 뒷부분에서는 곱 위의 함수와 두 변수의 커링된 함수 모두에 대해 $g(a,b)$라고 자주 씁니다.) 이 정의 등식이 곱 타입의 계산 규칙입니다.

집합론에서는 $A \times B$의 모든 원소가 순서쌍이므로 그러한 쌍에 대해 f를 정의하는 것으로 충분하다는 사실로 위의 f 정의를 정당화한다는 점에 유의하십시오. 반면 타입 이론은 상황을 뒤집습니다. $A \times B$ 위의 함수는 쌍에서의 값을 지정하기만 하면 잘 정의된다고 가정하고, 이로부터(더 정확히는 아래에 나오는 의존 함수에 대한 더 일반적인 형태로부터) $A \times B$의 모든 원소가 쌍임을 증명할 수 있게 됩니다. 범주론적 관점에서는 곱 $A \times B$를 이미 도입한 "지수" $B \to C$의 왼쪽 수반으로 정의한다고 말할 수 있습니다.

예를 들어, 다음과 같은 **사영** 함수들을 유도할 수 있습니다

$$\mathsf{pr}_1 : A \times B \to A$$
$$\mathsf{pr}_2 : A \times B \to B$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다

$$\mathsf{pr}_1((a,b)) :\equiv a$$
$$\mathsf{pr}_2((a,b)) :\equiv b.$$

함수를 정의할 때마다 이 함수 정의 원리를 적용하는 대신, 보편적인 경우에 한 번만 적용한 다음 그 결과로 얻은 함수를 나머지 모든 경우에 적용하기만 하는 방법도 있습니다. 즉, 다음 타입의 함수를 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{rec}_{A\times B} : \prod_{C:\mathcal{U}} (A \to B \to C) \to A \times B \to C \tag{1.5.2}$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{A\times B}(C, g, (a,b)) :\equiv g(a)(b).$$

그러면 pr_1와 pr_2 같은 함수를 정의 등식으로 직접 정의하는 대신, 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{pr}_1 :\equiv \mathsf{rec}_{A\times B}(A, \lambda a.\, \lambda b.\, a)$$
$$\mathsf{pr}_2 :\equiv \mathsf{rec}_{A\times B}(B, \lambda a.\, \lambda b.\, b).$$

함수 $\mathsf{rec}_{A\times B}$를 곱 타입의 **재귀자**라고 부릅니다. 여기서는 실제로 재귀가 일어나지 않으므로 "재귀자"라는 이름은 다소 적절하지 않습니다. 이 이름은 곱 타입이 귀납적 타입이라는 일반적인 틀의 퇴화된 예라는 사실에서 비롯되었으며, 자연수와 같은 타입에서는 재귀자가 실제로 재귀적입니다. 또한 데카르트 곱의 **재귀 원리**라는 말도 쓸 수 있는데, 이는 쌍에서의 값을 지정하여 위와 같이 함수 $f : A \times B \to C$를 정의할 수 있다는 사실을 뜻합니다.

재귀자를 사영으로부터 유도할 수 있고 그 역도 성립함을 보이는 것은 간단한 연습 문제로 남겨 둡니다.

단위 타입에도 다음과 같은 재귀자가 있습니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}} : \prod_{C:\mathcal{U}} C \to \mathbf{1} \to C$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(C, c, \star) :\equiv c.$$

타입 정의의 패턴을 유지하기 위해 포함하기는 하지만, $\mathbf{1}$의 재귀자는 전혀 쓸모가 없습니다. 이러한 함수는 $\mathbf{1}$ 타입의 인자를 무시하기만 하면 직접 정의할 수 있기 때문입니다.

곱 타입 위의 의존 함수를 정의할 수 있으려면 재귀자를 일반화해야 합니다. $C : A \times B \to \mathcal{U}$가 주어지면, 함수 $g : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B)} C((x,y))$를 제공함으로써 함수 $f : \prod_{(x:A\times B)} C(x)$를 정의할 수 있으며, 그 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$f((x,y)) :\equiv g(x)(y).$$

예를 들어, 이 방법으로 $A \times B$의 모든 원소가 어떤 쌍과 같다는 명제적 유일성 원리를 증명할 수 있습니다. 구체적으로는 다음 함수를 구성할 수 있습니다.

$$\mathsf{uniq}_{A\times B} : \prod_{x:A\times B} ((\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) =_{A\times B} x).$$

여기서는 아래 §1.12에서 소개할 동일성 타입을 사용합니다. 하지만 지금은 임의의 $x : A$에 대해 반사성 원소 $\mathsf{refl}_x : x =_A x$가 존재한다는 사실만 알면 충분합니다. 이를 바탕으로 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{uniq}_{A\times B}((a,b)) :\equiv \mathsf{refl}_{(a,b)}.$$

이 구성이 성립하는 이유는 $x :\equiv (a,b)$인 경우 다음과 같이 계산할 수 있기 때문입니다.

$$(\mathsf{pr}_1((a,b)), \mathsf{pr}_2((a,b))) \equiv (a,b)$$

이는 사영의 정의 등식을 사용한 것입니다. 따라서,

$$\mathsf{refl}_{(a,b)} : (\mathsf{pr}_1((a,b)), \mathsf{pr}_2((a,b))) = (a,b)$$

등식의 양변이 판단적으로 같으므로 타입이 올바릅니다.

더 일반적으로, 이런 방식으로 의존 함수를 정의할 수 있다는 것은 곱의 모든 원소에 대해 어떤 성질을 증명하려면 그 표준 원소인 순서쌍에 대해서만 증명하면 충분하다는 뜻입니다. 자연수와 같은 귀납적 타입에서는 이에 대응하는 성질이 귀납법으로 증명을 작성할 수 있다는 것입니다. 따라서 위에서 한 것처럼 이 원리를 보편적인 경우에 한 번 적용하면, 그 결과로 얻은 함수를 곱 타입의 **귀납**이라고 부릅니다. $A, B : \mathcal{U}$가 주어지면 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{ind}_{A\times B} : \prod_{C:A\times B\to\mathcal{U}} \left(\prod_{(x:A)} \prod_{(y:B)} C((x,y)) \right) \to \prod_{x:A\times B} C(x)$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ind}_{A\times B}(C, g, (a,b)) :\equiv g(a)(b).$$

마찬가지로, 쌍 위에서 정의된 의존 함수가 데카르트 곱의 **귀납 원리**로부터 얻어진다고 말할 수 있습니다. 재귀자는 족 C가 상수인 경우에 해당하는 귀납의 특수한 경우일 뿐임을 쉽게 알 수 있습니다. 귀납은 곱 타입의 원소를 사용하는 방법을 기술하므로 **(의존) 제거자**라고도 부르며, 재귀는 **비의존 제거자**라고 부릅니다.

단위 타입의 귀납은 재귀자보다 더 유용합니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}} : \prod_{C:\mathbf{1}\to\mathcal{U}} C(\star) \to \prod_{x:\mathbf{1}} C(x)$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(C, c, \star) :\equiv c.$$

귀납을 이용하면 $\mathbf{1}$의 유일한 원소가 $\star$임을 주장하는 $\mathbf{1}$의 명제적 유일성 원리를 증명할 수 있습니다. 즉, 다음을 구성할 수 있습니다.

$$\mathsf{uniq}_{\mathbf{1}} : \prod_{x:\mathbf{1}} x = \star$$

다음 정의 등식을 사용합니다.

$$\mathsf{uniq}_{\mathbf{1}}(\star) :\equiv \mathsf{refl}_{\star}$$

또는 동등하게, 다음과 같이 귀납을 사용하여 구성할 수도 있습니다.

$$\mathsf{uniq}_{\mathbf{1}} :\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(\lambda x.\, x = \star, \mathsf{refl}_{\star}).$$

1.6 의존 쌍 타입(Σ-타입)

함수 타입(§1.2)을 의존 함수 타입(§1.4)으로 일반화했던 것처럼, §1.5의 곱 타입도 쌍의 두 번째 성분의 타입이 첫 번째 성분의 선택에 따라 달라질 수 있도록 일반화하면 유용한 경우가 많습니다. 이를 **의존 쌍 타입** 또는 **Σ-타입**이라고 부르는데, 집합론에서 이는 주어진 타입 위의 첨자 합(쌍대곱 또는 서로소 합집합이라는 의미에서)에 대응하기 때문입니다.

타입 $A : \mathcal{U}$와 족 $B : A \to \mathcal{U}$가 주어지면, 의존 쌍 타입은 $\sum_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}$로 씁니다. 다른 표기법은 다음과 같습니다.

$$\sum_{(x:A)} B(x) \qquad \sum_{(x:A)} B(x) \qquad \sum(x : A),\ B(x).$$

λ-추상화나 Π 같은 다른 결합 구성과 마찬가지로, Σ도 따로 범위를 한정하지 않으면 자동으로 식의 나머지 전체를 유효 범위로 삼습니다. 따라서 예를 들어 $\sum_{(x:A)} B(x) \to C$는 $\sum_{(x:A)}(B(x) \to C)$를 의미합니다.

의존 쌍 타입의 원소는 쌍을 만들어 구성합니다. 즉, $a : A$와 $b : B(a)$가 주어지면 $(a, b) : \sum_{(x:A)} B(x)$를 얻습니다. B가 상수이면 의존 쌍 타입은 일반적인 데카르트 곱 타입이 됩니다:

$$\left(\sum_{x:A} B\right) \equiv (A \times B).$$

Σ-타입에 대한 모든 구성은 곱 타입에 대한 구성을 그대로 일반화하여 얻으며, 이때 비의존 함수 대신 의존 함수가 쓰이는 경우가 많습니다.

예를 들어 재귀 원리에 따르면, Σ-타입에서 나가는 비의존 함수 $f : (\sum_{(x:A)} B(x)) \to C$를 정의하려면 함수 $g : \prod_{(x:A)} B(x) \to C$를 제공하면 됩니다. 그러면 다음 정의 등식을 통해 f를 정의할 수 있습니다.

$$f((a, b)) :\equiv g(a)(b).$$

예를 들어 Σ-타입에서 첫 번째 사영을 다음과 같이 유도할 수 있습니다:

$$\mathsf{pr}_1 : \left(\sum_{x:A} B(x)\right) \to A$$

이는 다음 정의 등식으로 주어집니다.

$$\mathsf{pr}_1((a, b)) :\equiv a.$$

그러나 쌍 $(a, b) : \sum_{(x:A)} B(x)$의 두 번째 성분의 타입은 $B(a)$이므로, 두 번째 사영은 그 타입에 첫 번째 사영 함수가 들어가는 의존 함수여야 합니다:

$$\mathsf{pr}_2 : \prod_{p:\sum_{(x:A)} B(x)} B(\mathsf{pr}_1(p)).$$

따라서 Σ-타입에 대한 귀납 원리("의존 제거자")가 필요합니다. 이 원리에 따르면, Σ-타입에서 족 $C : (\sum_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U}$로 가는 의존 함수를 구성하려면 다음 함수가 필요합니다.

$$g : \prod_{(a:A)} \prod_{(b:B(a))} C((a, b)).$$

그러면 다음 함수를 유도할 수 있습니다.

$$f : \prod_{p:\sum_{(x:A)} B(x)} C(p)$$

그 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$f((a, b)) :\equiv g(a)(b).$$

이를 $C(p) :\equiv B(\mathsf{pr}_1(p))$로 두고 적용하면 $\mathsf{pr}_2 : \prod_{(p:\sum_{(x:A)} B(x))} B(\mathsf{pr}_1(p))$를 정의할 수 있으며, 그 자명한 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{pr}_2((a, b)) :\equiv b.$$

이것이 올바른지 확인하려면, pr_1의 정의 등식에 의해 $B(\mathsf{pr}_1((a, b))) \equiv B(a)$이고 실제로 $b : B(a)$라는 점에 주목하십시오.

재귀 원리와 귀납 원리를 Σ에 대한 재귀자로 묶을 수 있습니다:

$$\mathsf{rec}_{\sum_{(x:A)} B(x)} : \prod_{(C:\mathcal{U})} \left(\prod_{(x:A)} B(x) \to C\right) \to \left(\sum_{(x:A)} B(x)\right) \to C$$

그 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{\sum_{(x:A)} B(x)}(C, g, (a, b)) :\equiv g(a)(b)$$

그리고 이에 대응하는 귀납 연산자는 다음과 같습니다:

$$\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B(x)} : \prod_{(C:(\sum_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U})} \left(\prod_{(a:A)} \prod_{(b:B(a))} C((a, b))\right) \to \prod_{(p:\sum_{(x:A)} B(x))} C(p)$$

그 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B(x)}(C, g, (a, b)) :\equiv g(a)(b).$$

앞에서와 마찬가지로, 재귀자는 족 C가 상수일 때의 귀납에 해당하는 특수한 경우입니다.

또 다른 예로, A와 B가 타입이고 $R : A \to B \to \mathcal{U}$일 때 다음 원리를 생각해 봅시다:

$$\mathsf{ac} : \left(\prod_{(x:A)} \sum_{(y:B)} R(x, y)\right) \to \left(\sum_{(f:A\to B)} \prod_{(x:A)} R(x, f(x))\right).$$

R은 A와 B 사이의 "증명 관련 관계" 로 볼 수 있으며, 여기서 $R(a, b)$는 $a : A$와 $b : B$가 서로 관련되어 있다는 증거들의 타입입니다. 그러면 ac는 직관적으로, $b : B$이고 $r : R(a, b)$인 의존 쌍 (b, r)을 모든 $a : A$에 대응시키는 의존 함수 g가 있으면, 함수 $f : A \to B$와 모든 $a : A$에 $R(a, f(a))$의 증거를 대응시키는 의존 함수를 얻는다는 것을 말합니다. 직관적으로는 g의 값을 성분별로 나누기만 하면 될 것으로 보입니다. 실제로 방금 정의한 사영을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있습니다:

$$\mathsf{ac}(g) :\equiv \left(\lambda x.\, \mathsf{pr}_1(g(x)),\, \lambda x.\, \mathsf{pr}_2(g(x))\right).$$

이것이 올바르게 타입이 맞는지 확인하려면, $g : \prod_{(x:A)} \sum_{(y:B)} R(x, y)$이면 다음이 성립한다는 점에 주목하십시오.

$$\lambda x.\, \mathsf{pr}_1(g(x)) : A \to B,$$
$$\lambda x.\, \mathsf{pr}_2(g(x)) : \prod_{(x:A)} R(x, \mathsf{pr}_1(g(x))).$$

또한 타입 $\prod_{(x:A)} R(x, \mathsf{pr}_1(g(x)))$는 ac의 공역에서 합을 취하는 대상인 타입 족 $\lambda f.\, \prod_{(x:A)} R(x, f(x))$를 함수 $\lambda x.\, \mathsf{pr}_1(g(x))$에 적용한 결과입니다:

$$\prod_{(x:A)} R(x, \mathsf{pr}_1(g(x))) \equiv \left(\lambda f.\, \prod_{(x:A)} R(x, f(x))\right)(\lambda x.\, \mathsf{pr}_1(g(x))).$$

따라서 다음이 성립합니다.

$$\left(\lambda x.\, \mathsf{pr}_1(g(x)),\, \lambda x.\, \mathsf{pr}_2(g(x))\right) : \sum_{(f:A\to B)} \prod_{(x:A)} R(x, f(x))$$

이로써 원하는 결과를 얻습니다.

Π를 "모든 ⋯에 대하여"로, Σ를 "⋯가 존재함"으로 읽으면, 함수 ac의 타입은 다음을 나타냅니다: 모든 $x : A$에 대하여 $R(x, y)$를 만족하는 $y : B$가 존재하면, 모든 $x : A$에 대하여 $R(x, f(x))$가 성립하는 함수 $f : A \to B$가 존재합니다. 이것은 선택 공리의 한 형태처럼 들리므로 함수 ac는 전통적으로 **타입 이론적 선택 공리**라고 불려 왔으며, 방금 보였듯이 공리로 받아들일 필요 없이 타입 이론의 규칙으로부터 직접 증명할 수 있습니다. 그러나 선택은 이미 전제에서 주어져 있으므로 실제로는 어떤 선택도 일어나지 않는다는 점에 유의하십시오. 우리가 할 일은 그것을 두 함수로 분해하는 것뿐입니다. 하나는 선택을 나타내고, 다른 하나는 그 선택의 올바름을 나타냅니다. §3.8에서는 통상적인 것에 더 가까운 "선택 공리"의 또 다른 정식화를 제시할 것입니다.

의존 쌍 타입은 수학적 구조의 타입을 정의하는 데 자주 사용됩니다. 수학적 구조는 흔히 서로 의존하는 여러 데이터 조각으로 이루어지기 때문입니다. 간단한 예로, **마그마**를 이항 연산 $m : A \to A \to A$가 함께 주어진 타입 A로 정의하려 한다고 합시다. "함께 주어진"(그리고 같은 뜻의 "갖춘")이라는 표현의 정확한 의미는, "마그마"가 타입 $A : \mathcal{U}$와 연산 $m : A \to A \to A$로 이루어진 쌍 (A, m)이라는

것입니다. 이 쌍의 두 번째 성분 m의 타입 $A \to A \to A$가 첫 번째 성분 A에 의존하므로, 이러한 쌍은 의존 쌍 타입에 속합니다. 따라서 "마그마는 이항 연산 $m : A \to A \to A$가 함께 주어진 타입 A입니다"라는 정의는 마그마의 타입을 다음과 같이 정의하는 것으로 읽어야 합니다.

$$\mathsf{Magma} :\equiv \sum_{A:\mathcal{U}} (A \to A \to A).$$

마그마가 주어지면, 첫 번째 사영 pr_1으로 그 바탕 타입(그 "바탕")을 추출하고, 두 번째 사영 pr_2로 그 연산을 추출합니다. 물론 두 개보다 많은 데이터 조각으로 만들어진 구조에는 반복된 쌍 타입이 필요하며, 이는 부분적으로만 의존적일 수도 있습니다. 예를 들어 점을 가진 마그마(기점 $e : A$를 갖춘 마그마 (A, m))의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{PointedMagma} :\equiv \sum_{A:\mathcal{U}} (A \to A \to A) \times A.$$

일반적으로 우리는 이러한 구조에 공리를 부과하고자 하기도 합니다. 예를 들어 점을 가진 마그마를 모노이드나 군으로 만들 때가 그렇습니다. 이것 역시 Σ-타입을 사용하여 할 수 있습니다. §1.11를 참조하십시오.

이 책의 나머지 부분에서는 이러한 종류의 정의를 때때로 명시적으로 제시하겠지만, 결국에는 독자가 이를 영어에서 Σ-타입으로 옮길 수 있으리라 믿겠습니다. 또한 일반적으로 이러한 종류의 구조와 그 바탕에 같은 문자를 사용하는 흔한 수학적 관행을 따릅니다(이는 적절한 사영 함수를 표기에서 암묵적으로 남겨 두는 것과 같습니다). 즉, 연산 $m : A \to A \to A$를 가진 마그마 A라고 말하겠습니다.

$\mathsf{PointedMagma}$의 표준적인 원소는 $A : \mathcal{U}$, $m : A \to A \to A$, $e : A$에 대하여 $(A, (m, e))$ 꼴이라는 점에 유의하십시오. 이런 종류의 반복된 Σ-타입이 자주 등장하므로, 오른쪽으로 결합하는 중첩된 쌍(의존적일 수도 있는)을 나타내기 위해 순서 있는 삼중쌍, 사중쌍 등의 통상적인 표기를 사용합니다. 즉, $(x, y, z) :\equiv (x, (y, z))$, $(x, y, z, w) :\equiv (x, (y, (z, w)))$ 등입니다.

1.7 쌍대곱 타입

$A, B : \mathcal{U}$가 주어지면, 이들의 **쌍대곱** 타입 $A + B : \mathcal{U}$를 도입합니다. 이것은 집합론의 서로소 합집합에 대응하며, 이 이름으로 부를 수도 있습니다. 타입 이론에서는 미리 주어진 "타입의 합집합"이라는 개념이 없으므로, 함수와 곱의 경우와 마찬가지로 쌍대곱은 기본적인 구성이어야 합니다. 또한 0항 버전인 **빈 타입** $\mathbf{0} : \mathcal{U}$도 도입합니다.

$A + B$의 원소를 구성하는 방법은 두 가지입니다. $a : A$에 대하여 $\mathsf{inl}(a) : A + B$로 구성하거나, $b : B$에 대하여 $\mathsf{inr}(b) : A + B$로 구성하는 것입니다. (inl과 inr이라는 이름은 "왼쪽 단사"와 "오른쪽 단사"의 줄임말입니다.) 빈 타입의 원소를 구성하는 방법은 없습니다.

비의존 함수 $f : A + B \to C$를 구성하려면 함수 $g_0 : A \to C$와 $g_1 : B \to C$가 필요합니다. 그러면 f는 다음 정의 등식을 통해 정의됩니다.

$$f(\mathsf{inl}(a)) :\equiv g_0(a),$$
$$f(\mathsf{inr}(b)) :\equiv g_1(b).$$

즉, 함수 f는 **경우 분석**으로 정의됩니다. 앞에서와 마찬가지로 재귀자를 유도할 수 있습니다:

$$\mathsf{rec}_{A+B} : \prod_{(C:\mathcal{U})} (A \to C) \to (B \to C) \to A + B \to C$$

정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{A+B}(C, g_0, g_1, \mathsf{inl}(a)) :\equiv g_0(a),$$
$$\mathsf{rec}_{A+B}(C, g_0, g_1, \mathsf{inr}(b)) :\equiv g_1(b).$$

함수 $f : \mathbf{0} \to C$는 어떠한 정의 등식도 제시하지 않고 언제나 구성할 수 있습니다. f를 정의해야 할 $\mathbf{0}$의 원소가 하나도 없기 때문입니다. 따라서 $\mathbf{0}$의 재귀자는 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{0}} : \textstyle\prod_{(C:\mathcal{U})} \mathbf{0} \to C,$$

이것은 빈 타입에서 다른 임의의 타입으로 가는 표준적인 함수를 구성합니다. 논리적으로 이는 ex falso quodlibet 원리에 대응합니다.

쌍대곱에서 출발하는 의존 함수 $f : \prod_{(x:A+B)} C(x)$를 구성하려면, 족 $C : (A + B) \to \mathcal{U}$가 주어졌다고 가정하고 다음을 요구합니다.

$$g_0 : \prod_{a:A} C(\mathsf{inl}(a)),$$
$$g_1 : \prod_{b:B} C(\mathsf{inr}(b)).$$

이로써 다음 정의 등식을 갖는 f를 얻습니다:

$$f(\mathsf{inl}(a)) :\equiv g_0(a),$$
$$f(\mathsf{inr}(b)) :\equiv g_1(b).$$

이 체계를 쌍대곱에 대한 귀납 원리로 묶습니다:

$$\mathsf{ind}_{A+B} : \prod_{(C:(A+B)\to\mathcal{U})} \left(\textstyle\prod_{(a:A)} C(\mathsf{inl}(a))\right) \to \left(\textstyle\prod_{(b:B)} C(\mathsf{inr}(b))\right) \to \textstyle\prod_{(x:A+B)} C(x).$$

앞에서와 마찬가지로, 재귀자는 족 C가 상수인 경우로서 얻어집니다.

빈 타입에 대한 귀납 원리

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}} : \prod_{(C:\mathbf{0}\to\mathcal{U})} \prod_{(z:\mathbf{0})} C(z)$$

는 빈 타입에서 출발하는 자명한 의존 함수를 정의하는 방법을 제공합니다.

1.8 불리언 타입

불리언 타입 $\mathbf{2} : \mathcal{U}$는 정확히 두 원소 $0_{\mathbf{2}}, 1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$을 갖도록 의도된 타입입니다. 분명히 이 타입은 쌍대곱 타입과 단위 타입을 이용하여 $\mathbf{1} + \mathbf{1}$으로 구성할 수 있습니다. 그러나 자주 사용되므로 여기서 명시적인 규칙을 제시합니다. 실제로 반대 방향으로도 갈 수 있다는 것, 즉 Σ-타입과 $\mathbf{2}$로부터 이항 쌍대곱을 유도할 수 있다는 것을 살펴볼 것입니다.

함수 $f : \mathbf{2} \to C$를 유도하려면 $c_0, c_1 : C$가 필요하며, 다음 정의 등식을 추가합니다

$$f(0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0,$$
$$f(1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1.$$

재귀자는 함수형 프로그래밍의 if-then-else 구문에 대응합니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{2}} : \prod_{C:\mathcal{U}} C \to C \to \mathbf{2} \to C$$

정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0,$$
$$\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1.$$

$C : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때, 의존 함수 $f : \prod_{(x:\mathbf{2})} C(x)$를 유도하려면 $c_0 : C(0_{\mathbf{2}})$와 $c_1 : C(1_{\mathbf{2}})$가 필요하며, 이 경우 다음 정의 등식을 제시할 수 있습니다.

$$f(0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0,$$
$$f(1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1.$$

이를 하나로 묶어 다음 귀납 원리로 정리합니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}} : \prod_{(C:\mathbf{2}\to\mathcal{U})} C(0_{\mathbf{2}}) \to C(1_{\mathbf{2}}) \to \textstyle\prod_{(x:\mathbf{2})} C(x)$$

정의 등식은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 0_{\mathbf{2}}) :\equiv c_0,$$
$$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(C, c_0, c_1, 1_{\mathbf{2}}) :\equiv c_1.$$

예를 들어, 귀납 원리를 사용하면 예상대로 $\mathbf{2}$의 모든 원소가 $1_{\mathbf{2}}$ 또는 $0_{\mathbf{2}}$임을 연역할 수 있습니다. 앞에서와 마찬가지로 이를 진술하기 위해 아직 도입하지 않은 동일성 타입을 사용하지만, 필요한 것은 $\mathsf{refl}_x : x = x$에 의해 모든 것이 자기 자신과 같다는 사실뿐입니다. 따라서 다음 타입의 원소를 구성합니다

$$\prod_{x:\mathbf{2}} (x = 0_{\mathbf{2}}) + (x = 1_{\mathbf{2}}), \tag{1.8.1}$$

즉, 각 $x : \mathbf{2}$에 등식 $x = 0_{\mathbf{2}}$ 또는 등식 $x = 1_{\mathbf{2}}$ 중 하나를 대응시키는 함수입니다. 이 원소는 $C(x) :\equiv (x = 0_{\mathbf{2}}) + (x = 1_{\mathbf{2}})$로 두고 $\mathbf{2}$ 타입에 대한 귀납 원리를 사용하여 정의합니다. 이때 두 입력은 $\mathsf{inl}(\mathsf{refl}_{0_{\mathbf{2}}}) : C(0_{\mathbf{2}})$와 $\mathsf{inr}(\mathsf{refl}_{1_{\mathbf{2}}}) : C(1_{\mathbf{2}})$입니다. 다시 말해, (1.8.1)의 원소는 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}\big(\lambda x.\, (x = 0_{\mathbf{2}}) + (x = 1_{\mathbf{2}}),\, \mathsf{inl}(\mathsf{refl}_{0_{\mathbf{2}}}),\, \mathsf{inr}(\mathsf{refl}_{1_{\mathbf{2}}})\big).$$

앞에서 Σ-타입은 첨자가 붙은 서로소 합집합과 유사한 것으로 볼 수 있고, 쌍대곱은 이항 서로소 합집합이라고 언급했습니다. 이항 서로소 합집합 $A + B$를 두 원소 타입 $\mathbf{2}$ 위에서 첨자화된 서로소 합집합으로 구성할 수 있으리라고 기대하는 것은 자연스럽습니다. 이를 위해서는 $P(0_{\mathbf{2}}) \equiv A$와 $P(1_{\mathbf{2}}) \equiv B$를 만족하는 타입 족 $P : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$가 필요합니다. 실제로 이러한 족은 바로 $\mathbf{2}$에 대한 재귀 원리로 얻을 수 있습니다. (유니버스 $\mathcal{U}$ 자체가 타입이라는 사실을 이용하여 귀납과 재귀로 타입 족을 정의할 수 있다는 점은 타입 이론의 미묘하면서도 중요한 측면입니다.) 따라서 다음과 같이 정의할 수도 있었습니다.

$$A + B :\equiv \sum_{x:\mathbf{2}} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B, x)$$

여기서 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{inl}(a) :\equiv (0_{\mathbf{2}}, a),$$
$$\mathsf{inr}(b) :\equiv (1_{\mathbf{2}}, b).$$

이 정의로부터 쌍대곱 타입의 귀납 원리를 유도하는 것은 연습 문제로 남겨 둡니다. (연습문제 1.5 및 §5.2도 참조하십시오.)

같은 아이디어를 곱과 Π-타입에도 적용할 수 있습니다. 다음과 같이 정의할 수도 있었습니다.

$$A \times B :\equiv \prod_{x:\mathbf{2}} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B, x).$$

그러면 쌍은 **2** 타입에 대한 귀납법을 사용하여 구성할 수 있습니다.

$$(a, b) :\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B), a, b)$$

한편 사영은 다음과 같은 단순한 함수 적용입니다.

$$\mathsf{pr}_1(p) :\equiv p(0_{\mathbf{2}}),$$
$$\mathsf{pr}_2(p) :\equiv p(1_{\mathbf{2}}).$$

이런 방식으로 정의한 이항 곱에 대한 귀납 원리를 유도하는 것은 조금 더 복잡하며, §2.9에서 도입할 함수 외연성이 필요합니다. 또한 동일한 판단적 등식을 얻지 못합니다. 연습문제 1.6을 참조하십시오. 이는 한 타입을 다른 타입으로 인코딩할 때 반복해서 나타나는 문제이며, §5.5에서 다시 다룹니다.

때때로 **2**의 원소 $0_{\mathbf{2}}$와 $1_{\mathbf{2}}$를 각각 "거짓"과 "참"이라고 부르기도 합니다. 그러나 고전 수학과 달리, **2**의 원소를 진릿값 또는 명제로 사용하지 않는다는 점에 유의하십시오. (대신 명제를 타입과 동일시합니다. §1.11을 참조하십시오.) 특히 타입 $A \to \mathbf{2}$은 일반적으로 A의 멱집합이 아니며, A의 "결정 가능한" 부분집합만을 나타냅니다(제3장 참조).

1.9 자연수

지금까지 추상적인 연산으로 새로운 타입을 구성하는 규칙을 살펴보았지만, 구체적인 수학을 전개하려면 수의 타입과 같은 구체적인 타입도 필요합니다. 그중 가장 기본적인 것은 자연수의 타입 $\mathbb{N} : \mathcal{U}$입니다. 이 타입이 있으면 정수, 유리수, 실수 등을 구성할 수 있습니다(제11장 참조).

$\mathbb{N}$의 원소는 $0 : \mathbb{N}$과 후속자 연산 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 사용하여 구성합니다. 자연수를 표기할 때는 $1 :\equiv \mathsf{succ}(0)$, $2 :\equiv \mathsf{succ}(1)$, $3 :\equiv \mathsf{succ}(2)$, $\cdots$와 같은 통상적인 십진 표기법을 사용합니다.

자연수의 본질적인 성질은 재귀로 함수를 정의하고 귀납으로 증명을 수행할 수 있다는 점입니다 — 여기서 "재귀"와 "귀납"이라는 말은 이제 더 익숙한 의미를 갖습니다. 자연수로부터의 비의존 함수 $f : \mathbb{N} \to C$를 재귀로 구성하려면 시작점 $c_0 : C$와 "다음 단계" 함수 $c_s : \mathbb{N} \to C \to C$를 제공하는 것으로 충분합니다. 이로부터 다음 정의 등식을 만족하는 f를 얻습니다.

$$f(0) :\equiv c_0,$$
$$f(\mathsf{succ}(n)) :\equiv c_s(n, f(n)).$$

이때 f가 **원시 재귀**로 정의되었다고 합니다.

예로서, 인자를 두 배로 만드는 자연수 위의 함수를 정의하는 방법을 살펴봅시다. 이 경우 $C :\equiv \mathbb{N}$ 입니다. 먼저 $\mathsf{double}(0)$의 값을 제시해야 하는데, 이는 간단합니다. $c_0 :\equiv 0$으로 둡니다. 다음으로, 자연수 n에 대해 $\mathsf{double}(\mathsf{succ}(n))$의 값을 계산하려면 먼저 $\mathsf{double}(n)$의 값을 계산한 뒤 후속자 연산을 두 번 수행합니다. 이는 점화식 $c_s(n, y) :\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))$로 표현됩니다. c_s의 두 번째 인자 y는 재귀 호출 $\mathsf{double}(n)$의 결과를 나타낸다는 점에 유의하십시오.

따라서 이와 같이 원시 재귀로 $\mathsf{double} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 정의하면 다음 정의 등식을 얻습니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{double}(0) &:\equiv 0 \\ \mathsf{double}(\mathsf{succ}(n)) &:\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(n))). \end{aligned}$$

이는 실제로 올바른 계산 동작을 보입니다. 예를 들어 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{double}(2) &\equiv \mathsf{double}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(0))) \\ &\equiv c_s(\mathsf{succ}(0), \mathsf{double}(\mathsf{succ}(0))) \\ &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(\mathsf{succ}(0)))) \\ &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(c_s(0, \mathsf{double}(0)))) \\ &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(0))))) \\ &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(c_0)))) \\ &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(0)))) \\ &\equiv 4. \end{aligned}$$

커링을 사용하고 C가 함수 타입이 되도록 허용하면 다변수 함수도 원시 재귀로 정의할 수 있습니다. 예를 들어 덧셈 $\mathsf{add} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$은 $C :\equiv \mathbb{N} \to \mathbb{N}$과 다음의 "시작점" 및 "다음 단계" 데이터로 정의합니다.

$$\begin{aligned} c_0 &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ c_0(n) &:\equiv n \\ c_s &: \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \\ c_s(m, g)(n) &:\equiv \mathsf{succ}(g(n)). \end{aligned}$$

이렇게 하여 다음 정의적 상등을 만족하는 $\mathsf{add} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 얻습니다

$$\begin{aligned} \mathsf{add}(0, n) &\equiv n \\ \mathsf{add}(\mathsf{succ}(m), n) &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{add}(m, n)). \end{aligned}$$

늘 그렇듯이 $\mathsf{add}(m, n)$을 $m + n$으로 씁니다. 독자는 $2 + 2 \equiv 4$임을 직접 확인해 보십시오.

앞의 경우들과 마찬가지로, 원시 재귀 원리를 하나의 재귀자로 묶을 수 있습니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathbb{N}} : \prod_{(C:\mathcal{U})} C \to (\mathbb{N} \to C \to C) \to \mathbb{N} \to C$$

다음 정의 등식과 함께

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) &:\equiv c_0, \\ \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, \mathsf{succ}(n)) &:\equiv c_s(n, \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n)). \end{aligned}$$

$\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$를 사용하면 double과 add를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\mathsf{double} :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}\big(\mathbb{N},\, 0,\, \lambda n.\, \lambda y.\, \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))\big) \tag{1.9.1}$$

$$\mathsf{add} :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}\big(\mathbb{N} \to \mathbb{N},\, \lambda n.\, n,\, \lambda m.\, \lambda g.\, \lambda n.\, \mathsf{succ}(g(n))\big). \tag{1.9.2}$$

물론 원시 재귀 원리만을 사용하여 정의할 수 있는 모든 함수는 계산 가능합니다. (그러나 고차 함수 타입 — 즉, 다른 함수를 인자로 받는 함수 — 이 있으므로 통상적인 원시 재귀 함수보다 더 많은 함수를 정의할 수 있습니다. 예를 들어 연습문제 1.10을 참고하십시오.) 이는 구성적 수학에 적합한 성질입니다. §§3.4 및 3.8에서는 더 일반적인 수학적 함수를 정의할 수 있도록 타입 이론을 확장하는 방법을 살펴봅니다.

이제 다른 타입들과 같은 접근을 따라 원시 재귀를 의존 함수로 일반화하여 귀납 원리를 얻습니다. 즉, 족 $C : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$, 원소 $c_0 : C(0)$, 함수 $c_s : \prod_{(n:\mathbb{N})} C(n) \to C(\mathsf{succ}(n))$가 주어졌다고 가정하면, 다음 정의 등식을 갖는 $f : \prod_{(n:\mathbb{N})} C(n)$를 구성할 수 있습니다:

$$f(0) :\equiv c_0,$$
$$f(\mathsf{succ}(n)) :\equiv c_s(n, f(n)).$$

이것 역시 하나의 함수로 묶을 수 있습니다.

$$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}} : \prod_{(C:\mathbb{N}\to\mathcal{U})} C(0) \to \Big(\prod_{(n:\mathbb{N})} C(n) \to C(\mathsf{succ}(n))\Big) \to \prod_{(n:\mathbb{N})} C(n)$$

다음 정의 등식과 함께

$$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, 0) :\equiv c_0,$$
$$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, \mathsf{succ}(n)) :\equiv c_s(n, \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(C, c_0, c_s, n)).$$

여기서 마침내 귀납에 의한 증명이라는 고전적 개념과의 연결을 볼 수 있습니다. 타입 이론에서는 명제를 타입으로 나타내고, 명제를 증명하는 것은 대응하는 타입의 원소를 제시하는 것임을 상기하십시오. 특히 자연수의 성질은 타입족 $P : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$으로 나타냅니다. 이 관점에서 위의 귀납 원리는 $P(0)$을 증명할 수 있고 임의의 n에 대해 $P(n)$을 가정하여 $P(\mathsf{succ}(n))$을 증명할 수 있다면, 모든 n에 대해 $P(n)$이 성립한다는 것을 말합니다. 이는 물론 자연수에 대한 귀납에 의한 증명이라는 통상적인 원리와 정확히 같습니다.

예로서 $+$가 결합적이라는 명시적인 증명을 어떻게 나타낼 수 있는지 살펴봅시다. (실제로 이런 방식으로 증명을 적지는 않겠지만, 타입 이론에서 귀납법이 형식적으로 어떻게 표현되는지 이해하는 데 유용한 예입니다.) 다음을 유도하려면

$$\mathsf{assoc} : \prod_{i,j,k:\mathbb{N}} i + (j + k) = (i + j) + k,$$

다음을 제시하면 충분합니다.

$$\mathsf{assoc}_0 : \prod_{j,k:\mathbb{N}} 0 + (j + k) = (0 + j) + k$$

그리고

$$\mathsf{assoc}_s : \prod_{i:\mathbb{N}} \left(\prod_{j,k:\mathbb{N}} i + (j + k) = (i + j) + k \right) \to \prod_{j,k:\mathbb{N}} \mathsf{succ}(i) + (j + k) = (\mathsf{succ}(i) + j) + k.$$

assoc_0을 유도하기 위해, $0+n \equiv n$임을 상기하십시오. 따라서 $0+(j+k) \equiv j+k \equiv (0+j)+k$입니다. 그러므로 다음과 같이 간단히 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{assoc}_0(j,k) :\equiv \mathsf{refl}_{j+k}.$$

assoc_s에 대해서는 $+$의 정의에 의해 $\mathsf{succ}(m)+n \equiv \mathsf{succ}(m+n)$임을 떠올리십시오. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} &\mathsf{succ}(i)+(j+k) \equiv \mathsf{succ}(i+(j+k)) \qquad \text{그리고} \\ &(\mathsf{succ}(i)+j)+k \equiv \mathsf{succ}((i+j)+k). \end{aligned}$$

따라서 assoc_s의 출력 타입은 $\mathsf{succ}(i+(j+k)) = \mathsf{succ}((i+j)+k)$와 동등합니다. 그런데 그 입력("귀납 가설")은 $i+(j+k) = (i+j)+k$를 주므로, 두 자연수가 같으면 그 후속자들도 같다는 사실을 사용하는 것으로 충분합니다. (이 자명한 사실은 보조정리 2.2.1에서 동일성 타입의 귀납 원리를 사용하여 증명할 것입니다.) 이 후자의 사실을 $\mathsf{ap}_{\mathsf{succ}} : (m =_{\mathbb{N}} n) \to (\mathsf{succ}(m) =_{\mathbb{N}} \mathsf{succ}(n))$라고 부르면, 다음과 같이 정의할 수 있습니다

$$\mathsf{assoc}_s(i,h,j,k) :\equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{succ}}(h(j,k)).$$

이들을 $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}$와 함께 조합하면 결합 법칙의 증명을 얻습니다.

1.10 패턴 매칭과 재귀

자연수에는 지금까지 살펴본 타입들에는 없던 미묘한 점이 하나 더 있습니다. 예를 들어 쌍대곱의 경우에는 함수 $f : A+B \to C$를 재귀자를 사용하여 다음과 같이 정의할 수도 있고

$$f :\equiv \mathsf{rec}_{A+B}(C, g_0, g_1)$$

또는 다음 정의 등식을 제시하여:

$$\begin{aligned} f(\mathsf{inl}(a)) &:\equiv g_0(a) \\ f(\mathsf{inr}(b)) &:\equiv g_1(b). \end{aligned}$$

f의 앞의 표현에서 뒤의 표현으로 가려면 재귀자의 계산 규칙을 사용하기만 하면 됩니다. 반대로, 다음과 같은 임의의 정의 등식이 주어지면

$$\begin{aligned} f(\mathsf{inl}(a)) &:\equiv \Phi_0 \\ f(\mathsf{inr}(b)) &:\equiv \Phi_1 \end{aligned}$$

여기서 Φ_0과 Φ_1이 각각 변수 a와 b를 포함할 수 있는 식이라면, λ-추상화를 사용하여 이 방정식들을 재귀자로 동등하게 나타낼 수 있습니다.

$$f :\equiv \mathsf{rec}_{A+B}(C, \lambda a.\, \Phi_0, \lambda b.\, \Phi_1).$$

그러나 자연수의 경우, double과 같은 함수의 "정의 등식"은

$$\mathsf{double}(0) :\equiv 0 \tag{1.10.1}$$

$$\mathsf{double}(\mathsf{succ}(n)) :\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(n))) \tag{1.10.2}$$

우변에 함수 double 자체를 포함합니다. 그럼에도 이 방정식들이 훨씬 편리하고 읽기 쉬우므로, 우리는 (1.9.1) 대신 이 방정식들을 double의 정의로 제시하고 싶습니다. 해결책은 (1.10.2)의 우변에 있는 식 "$\mathsf{double}(n)$"을 재귀 호출의 결과를 나타내는 것으로 읽는 것입니다. 이 결과는 $\mathsf{double} :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}, c_0, c_s)$ 형태의 정의에서 c_s의 두 번째 인자에 해당합니다.

더 일반적으로, 함수 $f : \mathbb{N} \to C$의 "정의"가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$$f(0) :\equiv \Phi_0$$
$$f(\mathsf{succ}(n)) :\equiv \Phi_s$$

여기서 Φ_0은 타입 C의 식이고, Φ_s는 변수 n과 기호 "$f(n)$"을 포함할 수 있는 타입 C의 식입니다. 이러한 정의는 다음 정의로 번역할 수 있습니다.

$$f :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(C,\ \Phi_0,\ \lambda n.\, \lambda r.\, \Phi'_s)$$

여기서 Φ'_s은 Φ_s에 나타나는 모든 "$f(n)$"을 새 변수 r로 바꾸어 얻은 것입니다.

재귀에 의해 함수를 정의하는(또는 더 일반적으로 귀납에 의해 의존 함수를 정의하는) 이러한 방식은 매우 편리하므로 자주 사용합니다. 이를 **패턴 매칭**에 의한 정의라고 부릅니다. 물론 이는 컴퓨터 프로그래머가 문자 그대로 자기 자신에 대한 재귀 호출을 포함하는 본문을 가진 재귀 함수를 정의하는 방식과 매우 비슷합니다. 그러나 프로그래머와 달리 우리는 어떤 종류의 재귀 호출을 할 수 있는지에 제약을 받습니다. 그러한 정의를 재귀 원리를 사용하여 다시 표현할 수 있으려면, 정의되는 함수 f는 $f(\mathsf{succ}(n))$의 본문에서 합성 기호 "$f(n)$"의 일부로서만 나타날 수 있습니다. 그렇지 않으면 다음과 같은 무의미한 함수를 작성할 수 있게 됩니다

$$f(0) :\equiv 0$$
$$f(\mathsf{succ}(n)) :\equiv f(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(n))).$$

프로그래머가 이러한 함수를 작성한다면, 그 함수는 어떤 양의 입력에 대해서든 자기 자신을 끝없이 호출하여 무한 루프에 빠지고 결코 값을 반환하지 않을 것입니다. 그러나 수학에서 함수라는 이름에 걸맞으려면 모든 입력값에 항상 유일한 출력값을 대응시켜야 하므로, 이는 받아들일 수 없습니다.

이 점은 장 5, 6 및 11에서 더 복잡한 귀납적 타입을 도입할 때 더욱 중요해질 것입니다. 우리는 새로운 종류의 귀납적 정의를 도입할 때마다 항상 그 귀납 원리를 유도하는 것부터 시작합니다. 그런 다음에야 귀납 원리의 축약 표기로 정당화할 수 있는 적절한 종류의 "패턴 매칭"을 도입합니다.

1.11 타입으로서의 명제

서론에서 언급했듯이, 타입 이론에서 명제가 참임을 보이는 것은 그 명제에 대응하는 타입의 원소를 제시하는 것에 해당합니다. 우리는 이 타입의 원소를 그 명제가 참이라는 증거 또는 증인으로 간주합니다. (이들을 증명이라고 부르기도 하지만, 이 용어는 오해를 불러일으킬 수 있으므로 일반적으로 사용을 피합니다.) 그러나 일반적으로 우리는 증인을 명시적으로 구성하지 않을 것입니다. 대신 타입의 원소로 번역될 수 있는 방식으로, 통상적인 수학적 서술을 통해 증명을 제시합니다. 이는 고전적 집합론에서의 추론과 다르지 않습니다. 고전적 집합론에서도 술어 논리의 규칙과 집합론의 공리를 사용한 명시적인 유도를 보게 되리라고 기대하지는 않습니다.

그럼에도 불구하고 증명에 대한 타입 이론적 관점은 중요한 면에서 다릅니다. 타입 이론의 논리가 따르는 기본 원리는 명제가 단순히 참이거나 거짓인 것이 아니라, 그 명제가 참이라는 것에 대한 가능한

모든 증인의 모임으로 볼 수 있다는 것입니다. 이러한 관점에서 증명은 단지 수학을 전달하는 수단이 아니라, 수, 사상, 군 등과 같은 더 친숙한 대상과 동등한 지위를 지닌 그 자체로 수학적 대상입니다. 따라서 타입은 사용 가능한 수학적 대상을 분류하고 그것들이 상호작용하는 방식을 규정하므로, 명제는 특별한 타입 — 즉, 원소가 증명인 타입 — 에 지나지 않습니다.

이러한 동일시를 가능하게 하는 기본적인 관찰은, 영어로 표현된 명제에 대한 논리적 연산과 그에 대응하는 증인들의 타입에 대한 타입 이론적 연산 사이에 다음과 같은 자연스러운 대응이 있다는 것입니다.

영어	타입 이론
참	$\mathbf{1}$
거짓	$\mathbf{0}$
A 그리고 B	$A \times B$
A 또는 B	$A + B$
A이면 B	$A \to B$
A일 때 그리고 오직 그때에만 B	$(A \to B) \times (B \to A)$
A가 아님	$A \to \mathbf{0}$

이 대응의 요점은, 각 경우에 오른쪽 타입의 원소를 구성하고 사용하는 규칙이 왼쪽 명제에 관해 추론하는 규칙에 대응한다는 것입니다. 예를 들어 "A 그리고 B" 형태의 진술을 증명하는 기본적인 방법은 A를 증명하고 B도 증명하는 것이며, $A \times B$의 원소를 구성하는 기본적인 방법은 쌍 (a, b)로 구성하는 것입니다. 여기서 a는 A의 원소(또는 증인)이고 b는 B의 원소(또는 증인)입니다. 또한 "A 그리고 B"를 사용하여 다른 것을 증명하고자 할 때는 그 과정에서 A와 B를 모두 자유롭게 사용할 수 있으며, 이는 $A \times B$에 대한 귀납 원리가 A와 B의 원소를 사용하여 $A \times B$로부터의 함수를 구성할 수 있게 해 주는 것과 유사합니다.

마찬가지로 함의 "A이면 B"를 증명하는 기본적인 방법은 A를 가정하고 B를 증명하는 것이며, $A \to B$의 원소를 구성하는 기본적인 방법은 타입 A의 지정되지 않은 변수 원소(증인)를 포함할 수 있는, B의 원소(증인)를 나타내는 식을 제시하는 것입니다. 또한 함의 "A이면 B"를 사용하는 기본적인 방법은 A를 알 때 B를 연역하는 것이며, 이는 함수 $f : A \to B$를 A의 원소에 적용하여 B의 원소를 만들어 내는 것과 유사합니다. 다른 타입 생성자를 규정하는 규칙들도 논리로 적절하게 번역된다는 것을 확인하는 연습을 해 보시기를 독자께 강력히 권합니다.

특히 주목할 점은 빈 타입 $\mathbf{0}$가 거짓에 대응한다는 것입니다. 논리적으로 말할 때, 우리는 $\mathbf{0}$의 원소를 **모순**이라고 부릅니다. 따라서 모순을 증명할 방법은 없지만,[9] 모순으로부터는 무엇이든 유도할 수 있습니다. 또한 타입 A의 **부정**을 다음과 같이 정의합니다.

$$\neg A \;:\equiv\; A \to \mathbf{0}.$$

따라서 $\neg A$의 증인은 함수 $A \to \mathbf{0}$이며, 이는 $x : A$를 가정하고 $\mathbf{0}$의 원소를 유도함으로써 구성할 수 있습니다. 서론에서 논의했듯이 우리가 얻는 논리는 "구성적"이지만, 이러한 종류의 "귀류법"(A를 가정하고 모순을 유도하여 $\neg A$를 결론짓는 것)은 구성적으로도 완전히 타당하다는 점에 유의하십시오. 이는 단지 "부정"의 의미를 사용하는 것일 뿐입니다. 허용되지 않는 종류의 "귀류법"은 A를 증명하는 방법으로 $\neg A$를 가정하고 모순을 유도하는 것입니다. 구성적으로는 그러한 논증으로

[9] 더 정확히 말하면, 모순을 증명하는 기본적인 방법이 없다는 것, 즉 $\mathbf{0}$에는 생성자가 없다는 것입니다. 만약 우리의 타입 이론이 비일관적이라면, $\mathbf{0}$의 원소를 구성하는 더 복잡한 방법이 존재할 것입니다.

$\neg\neg A$만을 결론지을 수 있으며, 독자께서는 $\neg\neg A$로부터(즉, $(A \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$로부터) A를 얻는 자명한 방법이 없다는 것을 확인할 수 있습니다.

위와 같이 논리 연결사를 타입 형성 연산으로 번역하는 것을 **타입으로서의 명제**라고 부릅니다. 이는 영어로 쓰인 명제와 그 증명을 타입과 그 원소로 번역하는 방법을 제공합니다. 예를 들어 다음 항진명제("드 모르간 법칙" 중 하나)를 증명하고자 한다고 합시다.

"A가 아니고 B도 아니면, (A 또는 B)가 아닙니다". (1.11.1)

이 사실에 대한 일상적인 영어 증명은 다음과 같이 진행될 수 있습니다.

> A가 아니고 B도 아니라고 가정하고, 또한 A 또는 B라고 가정합시다. 모순을 유도하겠습니다. 두 가지 경우가 있습니다. A가 성립하면, A가 아니므로 모순이 생깁니다. 마찬가지로 B가 성립하면, B가 아니므로 역시 모순이 생깁니다. 따라서 어느 경우든 모순이 생기므로, (A 또는 B)가 아닙니다.

이제 위에서 제시한 규칙에 따르면, 우리의 항진명제 (1.11.1)에 대응하는 타입은 다음과 같습니다.

$$(A \to \mathbf{0}) \times (B \to \mathbf{0}) \to (A + B \to \mathbf{0}) \tag{1.11.2}$$

따라서 위의 증명을 이 타입의 원소로 번역할 수 있어야 합니다.

이러한 번역이 어떻게 이루어지는지 보여 주는 예로서, 위의 영어 증명을 읽는 수학자가 어떻게 머릿속에서 동시에 (1.11.2)의 원소를 구성할 수 있는지 설명해 봅시다. 도입 문구 "A가 아니고 B도 아니라고 가정합시다"는 함수를 정의하는 것으로 번역되며, 이때 그 정의역인 데카르트 곱 $(A \to \mathbf{0}) \times (B \to \mathbf{0})$에 대한 재귀 원리가 암묵적으로 적용됩니다. 이로써 타입 $A \to \mathbf{0}$와 $B \to \mathbf{0}$의 이름 없는 변수(가정)가 도입됩니다. 타입 이론으로 번역할 때는 이 변수들에 이름을 붙여야 합니다. 이들을 x와 y라고 부릅시다. 이 시점에서 (1.11.2)의 원소에 대한 우리의 부분적인 정의는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$f((x,y)) :\equiv \ \square \ : A + B \to \mathbf{0}$$

여기서 타입 $A + B \to \mathbf{0}$의 "구멍" $\square$는 아직 해야 할 일을 나타냅니다. (패턴 매칭 대신 재귀자를 사용하여 동등하게 $f :\equiv \mathsf{rec}_{(A\to\mathbf{0})\times(B\to\mathbf{0})}(A + B \to \mathbf{0}, \lambda x.\, \lambda y.\, \square)$라고 쓸 수도 있습니다.) 다음 문구 "또한 A 또는 B라고 가정합시다. 모순을 유도하겠습니다"는 이 구멍을 함수 정의로 채우는 것을 나타내며, 또 다른 이름 없는 가정 $z : A + B$를 도입하여 다음 증명 상태에 이르게 합니다.

$$f((x,y))(z) :\equiv \ \square \ : \mathbf{0}.$$

이제 "두 가지 경우가 있습니다"라고 말하는 것은 경우 분할, 즉 쌍대곱 $A + B$에 대한 재귀 원리의 적용을 나타냅니다. 이를 재귀자를 사용하여 쓰면 다음과 같습니다.

$$f((x,y))(z) :\equiv \mathsf{rec}_{A+B}(\mathbf{0}, \lambda a.\, \square, \lambda b.\, \square, z)$$

반면 패턴 매칭을 사용하여 쓰면 다음과 같습니다.

$$f((x,y))(\mathsf{inl}(a)) :\equiv \ \square \ : \mathbf{0}$$
$$f((x,y))(\mathsf{inr}(b)) :\equiv \ \square \ : \mathbf{0}.$$

두 경우 모두 이제 채워야 할 타입 $\mathbf{0}$의 "구멍"이 두 개 있으며, 이는 모순을 유도해야 하는 두 경우에 대응한다는 점에 유의하십시오. 마지막으로 $a : A$와 $x : A \to \mathbf{0}$로부터 모순을 결론짓는 것은 단순히

함수 x를 a에 적용하는 것이며, 다른 경우도 마찬가지입니다. ("함수를 적용한다"라는 표현이 "가정을 적용한다" 또는 정리를 적용한다는 표현과 편리하게 일치한다는 점에 주목하십시오.) 따라서 우리의 최종 정의는 다음과 같습니다.

$$f((x,y))(\mathsf{inl}(a)) :\equiv x(a)$$
$$f((x,y))(\mathsf{inr}(b)) :\equiv y(b).$$

연습 문제로, 역방향 항진명제 "(A 또는 B)가 아니면, (A가 아님) 그리고 (B가 아님)"을 확인해 보십시오. 이를 위해 다음 타입의 원소를 제시하십시오.

$$((A + B) \to \mathbf{0}) \to (A \to \mathbf{0}) \times (B \to \mathbf{0}),$$

이때 A와 B는 임의의 타입이며, 방금 도입한 규칙을 사용하십시오.

그러나 모든 고전적 항진명제가 이 해석에서 성립하는 것은 아닙니다. 예를 들어, "(A 그리고 B)가 아니면, (A가 아님) 또는 (B가 아님)"이라는 규칙은 타당하지 않습니다. 일반적으로 다음과 같은 대응 타입의 원소를 구성할 수 없기 때문입니다.

$$((A \times B) \to \mathbf{0}) \to (A \to \mathbf{0}) + (B \to \mathbf{0}).$$

이는 타입 이론의 "자연스러운" 명제-타입 대응 논리가 구성적이라는 사실을 반영합니다. 즉, 이 논리에는 배중률(LEM)이나 모순에 의한 증명 같은 일부 고전적 원리가 포함되지 않습니다. 또한 이드 모르간 법칙의 경우처럼 그러한 원리에 의존하는 다른 원리들도 포함되지 않습니다.

철학적으로 구성적 논리가 그렇게 불리는 이유는 실효적으로 수행할 수 있는 구성, 다시 말해 계산적 의미를 지니는 구성만으로 스스로를 제한하기 때문입니다. 너무 엄밀하게 따지지 않고 말하면, 이는 대상을 만드는 방법(그리고 특수한 경우로서, 정리가 참임을 확인하는 방법)을 단계별로 명시하는 일종의 알고리즘이 존재한다는 뜻입니다. 명제가 참인지 거짓인지 판정하는 실효적 절차는 존재하지 않으므로, 이를 위해서는 LEM 을 제외해야 합니다.

타입 이론적 논리의 구성성은 그 논리가 내재적인 계산적 의미를 지닌다는 뜻이며, 이는 컴퓨터 과학자들이 관심을 두는 점입니다. 또한 이는 타입 이론이 공리적 자유를 제공한다는 뜻이기도 합니다. 예를 들어, 기본적으로는 LEM 을 입증하는 구성이 존재하지 않지만, 이 논리는 그러한 구성이 존재하는 것과 여전히 양립할 수 있습니다(§3.4 참고). 따라서 타입 이론은 LEM 을 부정하지 않으므로, 우리는 이를 가정으로 무모순적으로 추가하여 제약 없이 통상적인 방식으로 작업할 수 있습니다. 이러한 점에서 타입 이론은 통상적인 수학적 실천을 제약하기보다는 풍부하게 합니다.

구성적 논리에 익숙하지 않은 독자께서는 이에 익숙해지는 방법으로 예제를 몇 가지 더 풀어 보시기를 권합니다. 몇 가지 제안은 연습문제 1.12 및 1.13을 참고하십시오.

지금까지는 명제 논리만 다루었습니다. 이제 술어 논리를 살펴봅니다. 술어 논리에는 "그리고"와 "또는" 같은 논리 연결사에 더해 "어떤 …가 존재함"과 "모든 …에 대해"라는 양화사가 있습니다. 이 경우 타입은 이중의 역할을 합니다. 타입은 명제의 역할을 하는 동시에 통상적인 의미의 타입, 즉 양화의 대상이 되는 정의역의 역할도 합니다. 타입 A 위의 술어는 족 $P : A \to \mathcal{U}$로 표현되며, 이 족은 각 원소 $a : A$에 P가 a에 대해 성립한다는 명제에 대응하는 타입 $P(a)$를 부여합니다. 이제 위의 번역을 양화사에 대한 설명으로 확장합니다.

영어	타입 이론
모든 $x : A$에 대해 $P(x)$가 성립합니다	$\prod_{(x:A)} P(x)$
$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재합니다	$\sum_{(x:A)} P(x)$

앞서와 마찬가지로, (구성적) 술어 논리의 항진명제가 원소를 가진 타입으로 번역됨을 보일 수 있습니다. 예를 들어, 모든 $x : A$에 대해 $P(x)$ 그리고 $Q(x)$이면, (모든 $x : A$에 대해 $P(x)$) 그리고 (모든 $x : A$에 대해 $Q(x)$)는 다음과 같이 번역됩니다.

$$(\prod_{(x:A)} P(x) \times Q(x)) \to (\prod_{(x:A)} P(x)) \times (\prod_{(x:A)} Q(x)).$$

이 항진명제의 비형식적 증명은 다음과 같이 진행할 수 있습니다.

> 모든 x에 대해 $P(x)$와 $Q(x)$가 성립한다고 가정합시다. 첫째, x가 주어졌다고 가정하고 $P(x)$를 증명합니다. 가정에 의해 $P(x)$와 $Q(x)$가 성립하며, 따라서 $P(x)$가 성립합니다. 둘째, x가 주어졌다고 가정하고 $Q(x)$를 증명합니다. 다시 가정에 의해 $P(x)$와 $Q(x)$가 성립하며, 따라서 $Q(x)$가 성립합니다.

첫 번째 문장은 가설에 대한 증거를 도입함으로써 함의를 함수로 정의하기 시작합니다.

$$f(p) :\equiv \ \square : (\prod_{(x:A)} P(x)) \times (\prod_{(x:A)} Q(x)).$$

이 시점에서 곱 타입의 원소를 만들기 위해 쌍 생성자가 암묵적으로 사용되며, 이 예에서는 "첫째"와 "둘째"라는 말이 이를 어느 정도 드러내 줍니다.

$$f(p) :\equiv \Big(\ \square : \prod_{(x:A)} P(x) \ , \ \square : \prod_{(x:A)} Q(x) \ \Big).$$

이제 "x가 주어졌다고 가정하고 $P(x)$를 증명합니다"라는 구절은 입력에 대한 변수 를 도입하여 통상적인 방식으로 의존 함수를 정의함을 나타냅니다. 이는 쌍 생성자 안에 있으므로, λ-추상으로 쓰는 것이 자연스럽습니다.

$$f(p) :\equiv \Big(\ \lambda x. \ (\square : P(x)) \ , \ \square : \prod_{(x:A)} Q(x) \ \Big).$$

이제 "$P(x)$와 $Q(x)$가 성립하며"는 가설을 불러와 $p(x) : P(x) \times Q(x)$를 얻고, "따라서 $P(x)$가 성립합니다"는 적절한 사영을 암묵적으로 적용합니다.

$$f(p) :\equiv \Big(\ \lambda x. \, \mathsf{pr}_1(p(x)) \ , \ \square : \prod_{(x:A)} Q(x) \ \Big).$$

다음 두 문장은 나머지 빈칸을 자명한 방식으로 채웁니다.

$$f(p) :\equiv \Big(\ \lambda x. \, \mathsf{pr}_1(p(x)) \ , \ \lambda x. \, \mathsf{pr}_2(p(x)) \ \Big).$$

물론 우리가 예로 사용해 온 영어 증명은 수학자들이 실제로 흔히 사용하는 증명보다 훨씬 장황하며, "증명 입문" 수업에서 사용하는 종류의 언어에 더 가깝습니다. 실제로 활동하는 수학자는 빈틈을 채우는 법을 익혔으므로, 실제로는 많은 세부 사항을 생략할 수 있으며 우리도 대개 그렇게 할 것입니다. 그러나 증명의 타당성 기준은 언제나 그 증명을 대응하는 타입의 원소를 구성하는 것으로 다시 번역할 수 있는가입니다.

좀 더 구체적인 예로, 자연수의 부등식을 어떻게 정의할지 생각해 봅시다. 한 가지 자연스러운 정의는 $n + k = m$을 만족하는 $k : \mathbb{N}$가 존재하면 $n \leq m$이라는 것입니다. (여기에서도 다음 절에서 도입할 동일성 타입을 사용하지만, 그에 대해 많은 것을 알 필요는 없습니다.) 명제-타입 대응 번역에 따르면 이는 다음과 같이 됩니다.

$$(n \leq m) :\equiv \sum_{k:\mathbb{N}} (n + k = m).$$

독자께서는 이 정의로부터 $\leq$의 익숙한 성질들을 증명해 보시기 바랍니다. 엄격한 부등식에 대해서는 몇 가지 자연스러운 선택지가 있는데, 예를 들면 다음과 같습니다.

$$(n < m) :\equiv \sum_{k:\mathbb{N}} (n + \mathsf{succ}(k) = m)$$

또는

$$(n < m) :\equiv (n \leq m) \times \neg(n = m).$$

구성적 수학에서는 전자가 더 자연스럽지만, 이 경우에는 $\mathbb{N}$이 "결정 가능한 상등"을 가지므로 실제로 후자와 동치입니다(§3.4 및 정리 7.2.6 참조).

타입 $\sum_{(x:A)} P(x)$에는 또 다른 해석도 있습니다. 이 타입의 원소는 원소 $x : A$와 $P(x)$가 성립한다는 증거를 함께 묶은 것이므로, $\sum_{(x:A)} P(x)$를 "$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재함"이라는 명제로 보는 대신 "$P(x)$를 만족하는 모든 원소 $x : A$의 타입", 즉 A의 "부분 타입"으로 볼 수 있습니다.

이 해석은 §3.5에서 다시 다룰 것입니다. 지금은 이 해석 덕분에 §1.6에서 논의한 수학적 구조로서의 타입의 정의에 공리를 포함할 수 있다는 점만 짚어 둡니다. 예를 들어, **반군**을 이항 연산 $m : A \to A \to A$를 갖춘 타입 A(즉, 마그마)로서 모든 $x, y, z : A$에 대해 $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$를 만족하는 것으로 정의하고 싶다고 합시다. 이 후자의 명제는 다음 타입으로 표현됩니다.

$$\prod_{x,y,z:A} m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z),$$

따라서 반군의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{Semigroup} :\equiv \sum_{(A:\mathcal{U})} \sum_{(m:A\to A\to A)} \prod_{(x,y,z:A)} m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z),$$

즉, 마그마들의 타입 Magma에서 반군들로 이루어진 부분 타입입니다. $\mathsf{Semigroup}$의 원소에 적절한 사영을 적용하면 바탕 A, 연산 m, 그리고 공리의 증거를 추출할 수 있습니다. 이 예제는 §2.14에서 다시 다루겠습니다.

또한 타입 이론의 유니버스를 사용하여 "고차 논리"를 표현할 수 있다는 점에 주목하십시오 — 즉, 모든 명제 또는 모든 술어에 대해 양화할 수 있습니다. 예를 들어 모든 성질 $P : A \to \mathcal{U}$에 대하여, $P(a)$이면 $P(b)$라는 명제를 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\prod_{P:A\to\mathcal{U}} P(a) \to P(b)$$

여기서 $A : \mathcal{U}$이고 $a, b : A$입니다. 그러나 선험적으로 이 명제는 우리가 양화하는 대상인 명제들과는 다른, 더 높은 유니버스에 속합니다. 즉, 다음과 같습니다.

$$\Big(\prod_{P:A\to\mathcal{U}_i} P(a) \to P(b)\Big) : \mathcal{U}_{i+1}.$$

이 문제는 §3.5에서 다시 다루겠습니다.

여기서 우리는 선언과 존재 명제의 증명이 어떤 정보를 담고 있는, 명제의 "증명 관련적" 번역을 기술했습니다. 예를 들어 "A 또는 B"의 증거로 간주되는 $A + B$의 원소가 있다면, 그것이 A에서 왔는지 B에서 왔는지 알 수 있습니다. 마찬가지로 "$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재함"의 증거로

간주되는 $\sum_{(x:A)} P(x)$의 원소가 있다면, 원소 x가 무엇인지 알 수 있습니다(그것은 주어진 원소의 첫 번째 사영입니다).

이 논리의 증명 관련적 성격으로 인해, "A일 때 그리고 그때에만 B"(다시 말하지만, 이는 $(A \to B) \times (B \to A)$를 뜻합니다)가 성립하면서도 타입 A와 B가 서로 다르게 동작할 수 있습니다. 예를 들어 "$\mathbb{N}$일 때 그리고 그때에만 $\mathbf{1}$"임은 쉽게 확인할 수 있지만, $\mathbb{N}$과 $\mathbf{1}$은 분명히 중요한 측면에서 다릅니다. "$\mathbb{N}$일 때 그리고 그때에만 $\mathbf{1}$"이라는 진술은 단순 명제로 간주할 때 타입 $\mathbb{N}$이 $\mathbf{1}$과 같은 명제(이 경우에는 참인 명제)를 나타낸다는 것만을 알려 줍니다. 우리는 때때로 "A일 때 그리고 그때에만 B"를 A와 B가 **논리적으로 동치**라고 말하여 표현합니다. 이는 §2.4 및 제4장에서 도입할 더 강한 개념인 타입의 동치와 구별해야 합니다. $\mathbb{N}$과 $\mathbf{1}$은 논리적으로 동치이지만 동치인 타입은 아닙니다.

제3장에서는 동치와 논리적 동치가 일치하는 "단순 명제"라는 타입의 부류를 도입하겠습니다. 이 타입들을 사용하여 앞에서 기술한 논리를 수정한 형태를 도입할 것인데, 이 형태에서는 선언과 존재 명제에 담긴 추가 정보를 버리며, 이는 때때로 적절합니다.

마지막으로 명제-타입 대응을 거꾸로 볼 수도 있다는 점에 주목합시다. 그러면 임의의 타입 A를 명제로 간주할 수 있으며, 이 명제는 A의 원소를 제시함으로써 증명합니다. 때때로 이 명제를 "A가 **거주됨**"이라고 진술하겠습니다. 즉, A가 거주된다고 말할 때 이는 A의 (특정한) 원소를 제시했지만 그 원소에 이름을 붙이지 않기로 했다는 뜻입니다. 마찬가지로 A가 거주되지 않는다고 말하는 것은 $\neg A$의 원소를 제시하는 것과 같습니다. 특히 $\neg\mathbf{0} \equiv (\mathbf{0} \to \mathbf{0})$가 $\mathsf{id}_{\mathbf{0}}$에 의해 거주되므로, 빈 타입 $\mathbf{0}$는 명백히 거주되지 않습니다.[10]

1.12 동일성 타입

앞의 구성들은 표준적인 집합론적 구성의 일반화로 볼 수 있지만, 동일성을 다루는 우리의 방식은 타입 이론에 고유한 것으로 보입니다. 명제-타입 대응 개념에 따르면, 같은 타입의 두 원소 $a, b : A$가 같다는 명제는 어떤 타입에 대응해야 합니다. 이 명제는 a와 b가 무엇인지에 의존하므로, 이러한 **동일성 타입** 또는 **동일성 타입**은 A의 두 복사본에 의존하는 타입 족이어야 합니다.

이 족을 $\mathsf{Id}_A : A \to A \to \mathcal{U}$로 쓸 수 있으며(항등 함수 id_A와 혼동하지 마십시오), 그러면 $\mathsf{Id}_A(a, b)$는 a와 b 사이의 상등 명제를 나타내는 타입이 됩니다. 그러나 명제-타입 대응에 익숙해지면, 이를 위해 표준적인 등호 기호도 사용하는 것이 편리합니다. 따라서 "$a = b$"도 a가 b와 같다는 명제에 대응하는 타입 $\mathsf{Id}_A(a, b)$에 대한 표기가 됩니다. 명확성을 위해 타입 A를 명시하여 "$a =_A b$"로 쓸 수도 있습니다. $a =_A b$의 원소를 가지고 있으면, a와 b가 **같다**고 말하거나, §1.1에서 논의한 판단적 상등 $a \equiv b$와 다르다는 것을 강조하고자 할 때는 때때로 **명제적으로 같다**고 말합니다.

§1.11에서 "또는"과 "존재한다"의 명제-타입 대응 버전이 명제가 참이라는 사실 이상의 정보를 포함할 수 있다고 언급했듯이, 타입 $a = b$도 더 많은 정보를 포함하지 못할 이유가 없습니다. 실제로 이것이 호모토피적 해석의 초석이며, 여기서는 $a = b$의 증거를 공간 A에서 a와 b 사이의 경로 또는 동치로 간주합니다. 공간의 두 점 사이에 경로가 둘 이상 있을 수 있듯이, 두 대상이 같다는 증거도 둘 이상 있을 수 있습니다. 달리 말하면, $a = b$를 a와 b의 동일시들의 타입으로 볼 수 있으며, a와 b를 동일시하는 서로 다른 방법이 많이 있을 수 있습니다. 이 해석은 제2장에서 다시 다룰 것이며, 지금은 동일성 타입의 기본 규칙에 집중합니다. 이 장에서 고려한 다른 모든 타입과 마찬가지로, 동일성 타입에도 형성, 도입, 제거, 계산 규칙이 있으며 이들은 형식적으로 정확히 같은 방식으로 작동합니다.

형성 규칙은 타입 $A : \mathcal{U}$와 두 원소 $a, b : A$가 주어지면 같은 유니버스에 속하는 타입 $(a =_A b) : \mathcal{U}$

[10] 이를 타입 이론이 무모순이라는 진술과 혼동해서는 안 됩니다. 그 진술은 타입 이론의 규칙을 따라서는 $\mathbf{0}$의 원소를 얻을 수 없다는 메타이론적 주장입니다.

를 형성할 수 있다고 말합니다. $a = b$의 원소를 구성하는 기본적인 방법은 a와 b가 동일하다는 것을 아는 것입니다. 따라서 도입 규칙은 다음과 같은 의존 함수입니다.

$$\mathsf{refl} : \prod_{a:A} (a =_A a)$$

이를 **반사성**이라 부르며, 이는 A의 모든 원소가 (지정된 방식으로) 자기 자신과 같다는 것을 말합니다. 우리는 refl_a를 점 a에서의 상수 경로로 간주합니다.

특히 이는 a와 b가 판단적으로 같으면, 즉 $a \equiv b$이면, 원소 $\mathsf{refl}_a : a =_A b$도 갖는다는 뜻입니다. 이것이 올바르게 타입이 지정되는 이유는 $a \equiv b$이면 타입 $a =_A b$도 refl_a의 타입인 $a =_A a$와 판단적으로 같기 때문입니다.

동일성 타입의 귀납 원리(즉, 제거 규칙)는 타입 이론에서 가장 미묘한 부분 중 하나이며 호모토피 해석에 결정적입니다. 먼저 그 중요한 귀결인 "같은 것은 같은 것으로 치환할 수 있다"는 원리를 살펴보는 것으로 시작합니다. 이는 다음과 같이 표현됩니다:

동일자의 식별 불가능성: 모든 족

$$C : A \to \mathcal{U}$$

에 대하여 다음과 같은 함수

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x) \to C(y)$$

가 존재하며, 다음을 만족합니다.

$$f(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{id}_{C(x)}.$$

이는 모든 타입족 C가 등식을 존중한다는 것을 말하며, 이는 A의 같은 원소들에 C를 적용하면 그 결과로 얻은 타입들 사이의 함수도 얻는다는 의미입니다. 위에 제시된 등식은 반사성에 대응하는 함수가 항등 함수라는 것을 말합니다(그리고 일반적으로 함수 $f(x, y, p) : C(x) \to C(y)$가 항상 타입의 동치임을 보게 될 것입니다).

동일자의 식별 불가능성은 위에서 불리언과 자연수에 대해 제시한 것과 유사하게 동일성 타입에 대한 재귀 원리로 볼 수 있습니다. $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$가 특정 종류의 임의의 다른 타입 C에 대해 지정된 사상 $\mathbb{N} \to C$를 주듯이, 동일자의 식별 불가능성은 $x =_A y$로부터 A 위의 특정한 다른 반사적 이항 관계, 즉 어떤 단항 술어 $C(x)$에 대해 $C(x) \to C(y)$ 꼴인 관계로 가는 지정된 사상을 줍니다. 더 일반적인 꼴 $C(x, y)$의 반사적 관계에 대해 더 일반적인 재귀 원리를 정식화할 수도 있습니다. 그러나 동일성 타입을 완전히 특징짓기 위해서는 이 재귀 원리를 귀납 원리로 일반화해야 하며, 귀납 원리는 $x =_A y$에서 나가는 사상뿐 아니라 그 위의 족도 고려합니다. 달리 말하면, 같은 것을 같은 것으로 치환하는 것을 허용하는 것뿐 아니라 상등에 대한 증거 p도 고려합니다.

1.12.1 경로 귀납법

동일성 타입의 귀납 원리는 제2장의 도입부에서 설명할 호모토피적 해석을 고려하여 **경로 귀납법**이라고 부릅니다. 이는 동일성 타입의 족이 $\mathsf{refl}_x : x = x$ 형태의 원소들에 의해 자유롭게 생성된다는 진술로 볼 수 있습니다.

경로 귀납법: 다음과 같은 족과

$$C : \prod_{x,y:A} (x =_A y) \to \mathcal{U}$$

다음과 같은 함수가 주어지면

$$c : \prod_{x:A} C(x, x, \mathsf{refl}_x),$$

다음과 같은 함수가 존재하며

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x, y, p)$$

이 함수는 다음을 만족합니다.

$$f(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c(x).$$

곱, 쌍대곱, 자연수 등의 귀납 원리와 마찬가지로, 경로 귀납법을 사용하면 적절한 계산적 거동을 보이는 특정한 함수를 정의할 수 있다는 점에 유의하십시오. $c_0 : C$와 $c_s : \mathbb{N} \to C \to C$로부터 재귀로 정의되며 $f(0) \equiv c_0$과 $f(\mathsf{succ}(n)) \equiv c_s(n, f(n))$도 만족하는 바로 그 함수 $f : \mathbb{N} \to C$가 있는 것처럼, $c : \prod_{(x:A)} C(x, x, \mathsf{refl}_x)$로부터 경로 귀납법으로 정의되며 $f(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv c(x)$도 만족하는 바로 그 함수 $f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x, y, p)$가 있습니다.

이 원리의 의미를 이해하기 위해, 먼저 C가 p에 의존하지 않는 더 단순한 경우를 생각해 봅시다. 그러면 $C : A \to A \to \mathcal{U}$가 되며, 이는 A의 두 원소에 의존하는 술어로 볼 수 있습니다. 우리의 관심사는 어떤 원소 쌍 $x, y : A$에 대해 명제 $C(x, y)$가 언제 성립하는지 아는 것입니다. 이 경우 경로 귀납법의 가정은 모든 $x : A$에 대해 $C(x, x)$가 성립함을 안다는 것, 즉 C를 쌍 x, x에서 평가하면 참인 명제를 얻는다는 것입니다 — 따라서 C는 반사 관계입니다. 그러면 결론은 $x = y$일 때마다 $C(x, y)$가 성립한다는 것을 알려 줍니다. 이것이 바로 앞서 언급한 반사 관계에 대한 더 일반적인 재귀 원리입니다.

이 규칙의 일반적인 귀납적 형태에서는 C가 x와 y 사이의 동일성에 대한 증거 $p : x = y$에도 의존할 수 있습니다. 전제에서 우리는 x, y를 x, x로 대체할 뿐 아니라 동시에 p를 반사성으로 대체합니다. 즉, 모든 원소 x, y와 그 사이의 경로 $p : x = y$에 대해 어떤 성질을 증명하려면, 원소가 x, x이고 경로가 $\mathsf{refl}_x : x = x$인 모든 경우를 고려하는 것으로 충분합니다. 타입을 단지 집합으로만 본다면 이것이 어떤 이득을 주는지 분명하지 않겠지만, x와 y 사이에는 서로 다른 동일시 $p : x = y$가 많이 있을 수 있으므로, 타입 $x =_A y$ 위의 족을 고려할 때 이들을 추적하는 것은 의미가 있습니다. 제2장에서 이것이 호모토피 해석에 매우 중요하다는 것을 보게 될 것입니다.

경로 귀납법을 하나의 함수로 묶으면 다음과 같은 형태가 됩니다.

$$\mathsf{ind}_{=_A} : \prod_{(C:\prod_{(x,y:A)}(x=_A y)\to\mathcal{U})} \left(\prod_{(x:A)} C(x, x, \mathsf{refl}_x)\right) \to \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x, y, p)$$

그리고 다음 등식이 성립합니다.

$$\mathsf{ind}_{=_A}(C, c, x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c(x).$$

함수 $\mathsf{ind}_{=_A}$는 전통적으로 J라고 부릅니다. 보조정리 2.3.1에서 동일자의 식별 불가능성이 경로 귀납법의 한 사례임을 보이고, 이에 새로운 이름과 표기법도 부여할 것입니다.

증명 $p : a = b$가 주어지면, 경로 귀납법은 a와 b를 모두 같은 미지의 원소 x로 대체할 것을 요구합니다. 따라서 A의 같은 원소들로 이루어진 모든 쌍에 대해 족 C의 원소를 정의하려면, 대각선 위에서 정의하는 것으로 충분합니다. 그러나 일부 증명에서는 b의 모든 출현을 a로 (또는 그 반대로) 대체하여 등식 $p : a = b$를 활용하는 것이 더 간단합니다. 증명의 나머지 부분을 일반적인 미지의 x보다는 등식에 언급된 특정 원소 a에 대해 수행하는 것이 때로는 더 쉽기 때문입니다. 이로부터 동일성 타입에 대한 두 번째 귀납 원리가 나오며, 이 원리는 타입족 $a =_A x$가 원소 $\mathsf{refl}_a : a = a$에 의해 생성된다고 말합니다. 아래에서 보이듯이 이 두 번째 원리는 첫 번째 원리와 동치이며, 단지 때때로 더 편리한 정식화일 뿐입니다.

기점 경로 귀납법: 원소 $a : A$를 고정하고, 다음과 같은 족과

$$C : \prod_{x:A} (a =_A x) \to \mathcal{U}$$

다음과 같은 원소가 주어졌다고 합시다.

$$c : C(a, \mathsf{refl}_a).$$

그러면 다음과 같은 함수를 얻으며

$$f : \prod_{(x:A)} \prod_{(p:a=x)} C(x, p)$$

이 함수는 다음을 만족합니다.

$$f(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c.$$

여기서 $C(x, p)$는 타입족이며, A의 고정된 원소 a에 대하여 x는 A의 원소이고 p는 동일성 타입 $a =_A x$의 원소입니다. 기점 경로 귀납법 원리에 따르면, 모든 x와 p에 대하여 이 족의 원소를 정의하려면 x가 a이고 p가 $\mathsf{refl}_a : a = a$인 경우만 고려하면 충분합니다.

함수로 묶으면 기점 경로 귀납법은 다음과 같이 됩니다.

$$\mathsf{ind}'_{=_A} : \prod_{(a:A)} \prod_{(C:\prod_{(x:A)}(a=_A x)\to\mathcal{U})} C(a, \mathsf{refl}_a) \to \prod_{(x:A)} \prod_{(p:a=_A x)} C(x, p)$$

그리고 다음 등식이 성립합니다.

$$\mathsf{ind}'_{=_A}(a, C, c, a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c.$$

아래에서 경로 귀납법과 기점 경로 귀납법이 동치임을 보입니다. 이 때문에 때로는 엄밀하지 않게 기점 경로 귀납법도 단순히 "경로 귀납법"이라고 부를 것이며, 어느 원리를 의미하는지는 독자가 증명의 형태로부터 추론하리라고 기대하겠습니다.

주 1.12.1. 직관적으로, 자연수에 대한 귀납 원리는 모든 자연수가 0이거나 어떤 자연수 n에 대해 $\mathsf{succ}(n)$ 꼴이라는 사실을 표현하며, 따라서 이 경우들에 대해(두 번째 경우에는 귀납 가정과 함께) 어떤 성질을 증명하면 모든 자연수에 대해 그것을 증명한 것이 됩니다. 마찬가지로 $A + B$에 대한 귀납 원리는 $A + B$의 모든 원소가 $\mathsf{inl}(a)$ 꼴이거나 $\mathsf{inr}(b)$ 꼴이라는 사실을 표현하며, 다른 경우도 이와 같습니다. 이와 같은 해석을 경로 귀납법에 적용하면, 경로 귀납법은 모든 경로가 refl_a 꼴이라는 사실을 표현하며, 따라서 반사성 경로에 대해 어떤 성질을 증명하면 모든 경로에 대해 그것을 증명한 것이 된다고 말할 수도 있을 것입니다.

그러나 이러한 해석은 경로의 호모토피 해석이라는 맥락에서 상당히 혼란스럽습니다. 호모토피 해석에서는 두 원소 a와 b가 동일시될 수 있는 방법이 여러 가지일 수 있고, 따라서 동일성 타입의 서로 다른 원소가 많이 있을 수 있기 때문입니다! 서로 다른 경로가 많이 있을 수 있는데, 어떻게 동시에 유일한 경로는 반사성뿐이라고 주장하는 귀납 원리가 있을 수 있겠습니까?

핵심적인 관찰은, 귀납적으로 정의되는 것이 동일성 타입이 아니라 동일성 족이라는 점입니다. 특히 경로 귀납법은 x, y가 A의 모든 원소에 걸쳐 변할 때 타입들의 족 $(x =_A y)$가 refl_x 꼴의 원소들에 의해 귀납적으로 정의된다고 말합니다. 이는 동일성 족의 일반적인 원소 (x, y, p)에 의존하는 다른 임의의 족 $C(x, y, p)$의 원소를 주려면 (x, x, refl_x) 꼴의 경우들을 고려하는 것으로 충분하다는 뜻입니다. 호모토피 해석에서 이는 x와 y가 경로 p의 끝점인 세 쌍 (x, y, p)들의 타입(다시 말해 Σ-타입 $\sum_{(x,y:A)}(x = y)$)이 각 점 x에서의 상수 루프들에 의해 귀납적으로 생성된다는 것을 말합니다. 제2장에서 보게 되듯이, 호모토피 이론에서 $\sum_{(x,y:A)}(x = y)$에 대응하는 공간은 자유 경로 공간 — 끝점이 변할 수 있는 A 안의 경로들의 공간 — 이며, 실제로 이 공간의 임의의 점은 어떤 점에서의 상수 루프와 호모토픽합니다. 주어진 경로를 따라 끝점 중 하나를 단순히 수축시키면 되기 때문입니다. 이와 유사한 사실이 타입 이론에서도 성립합니다. 즉, $p : x = y$에 대한 경로 귀납법으로 $(x, y, p) =_{\sum_{(x,y:A)}(x=y)} (x, x, \mathsf{refl}_x)$임을 증명할 수 있습니다.

마찬가지로, 기점 경로 귀납법에 따르면 고정된 $a : A$에 대해 y가 A의 모든 원소에 걸쳐 변할 때 타입들의 족 $(a =_A y)$는 원소 refl_a에 의해 귀납적으로 정의됩니다. 따라서 이 족의 일반적인 원소 (y, p)에 의존하는 임의의 다른 족 $C(y, p)$의 원소를 제시하려면 (a, refl_a)인 경우만 고려하면 충분합니다. 호모토피적으로 이는 선택한 어떤 점에서 시작하는 경로들의 공간(그 점에서의 기점 경로 공간으로, 타입 이론적으로는 $\sum_{(y:A)}(a = y)$입니다)이 선택한 점 위의 상수 루프로 축약 가능하다는 사실을 표현합니다. 이번에도 대응하는 사실이 타입 이론에서도 성립합니다. $p : a = y$에 대한 기점 경로 귀납법으로 $(y, p) =_{\sum_{(y:A)}(a=y)} (a, \mathsf{refl}_a)$임을 증명할 수 있습니다. 또한 §1.11에서 언급한, Σ-타입을 부분 타입으로 보는 해석에 따르면 타입 $\sum_{(y:A)}(a = y)$를 "a와 같은 A의 모든 원소들의 타입"으로 볼 수 있다는 점에 유의하십시오. 이는 "한원소 부분집합" $\{a\}$의 타입 이론적 버전입니다.

경로 귀납법도 기점 경로 귀납법도 p가 두 개의 고정된 끝점 a와 b를 가지는 족 $C(p)$의 원소를 제시하는 방법을 제공하지 않습니다. 특히 루프에 의존하는 족 $C : (a =_A a) \to \mathcal{U}$에 대해서는 경로 귀납법을 적용하여 $C(\mathsf{refl}_a)$인 경우만 고려하는 것이 불가능하며, 따라서 모든 루프가 반사성이라는 것을 증명할 수 없습니다. 그러므로 동일성 족을 귀납적으로 정의한다고 해서 동일성 타입의 특정 사례에서 반사성이 아닌 경로가 금지되는 것은 아닙니다. 다시 말해, 경로 $p : x = x$는 $(x = x)$의 원소로서 반사성과 같지 않을 수 있지만, 그럼에도 쌍 (x, p)는 $\sum_{(y:A)}(x = y)$의 원소로서 쌍 (x, refl_x)와 같습니다.

위상수학적 예로, 구멍 뚫린 원판 $\{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 2 \}$ 안에서 $(1, 0)$에서 출발하여 $(0, 0)$에 있는 구멍 주위를 한 바퀴 돈 뒤 $(1, 0)$으로 되돌아오는 루프를 생각해 봅시다. 양 끝점을 모두 $(1, 0)$에 고정하면 이 루프는 구멍 뚫린 원판 안에 머무르면서 상수 경로로 변형될 수 없습니다. 이는 기둥에 감긴 밧줄의 양 끝을 모두 붙잡고 있으면 밧줄을 끌어당길 수 없는 것과 같습니다. 그러나 한쪽 끝점이 움직이도록 허용하면 루프를 다시 상수로 축약할 수 있습니다. 이는 밧줄의 한쪽 끝만 붙잡고 있으면 언제든 밧줄을 걷어 들일 수 있는 것과 같습니다.

1.12.2 경로 귀납법과 기점 경로 귀납법의 동치

앞에서 도입한 동일성 타입에 대한 두 귀납 원리는 동치입니다. 경로 귀납법이 기점 경로 귀납법 원리로부터 따라 나온다는 것은 쉽게 알 수 있습니다. 실제로, 경로 귀납법의 전제들을 가정합시다:

$$C : \prod_{x,y:A} (x =_A y) \to \mathcal{U},$$
$$c : \prod_{x:A} C(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

이제 원소 $x : A$가 주어지면 위의 두 가지를 모두 구체화하여 다음을 얻을 수 있습니다.

$$C' : \prod_{y:A} (x =_A y) \to \mathcal{U},$$
$$C' :\equiv C(x),$$
$$c' : C'(x, \mathsf{refl}_x),$$
$$c' :\equiv c(x).$$

분명히 C'와 c'는 기점 경로 귀납법의 전제들에 부합하므로 다음을 구성할 수 있습니다.

$$g : \prod_{(y:A)} \prod_{(p:x=y)} C'(y, p)$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$g(x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c'.$$

이제 g의 공역이 $C(x, y, p)$와 같다는 것을 관찰합니다. 따라서 가정 $x : A$를 해소하면 다음 함수를 유도할 수 있습니다.

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} C(x, y, p)$$

이 함수는 요구되는 판단적 등식 $f(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv g(x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c' :\equiv c(x)$를 만족합니다.

이 사실의 또 다른 증명은 그러한 모든 f를 $\mathsf{ind}_{=_A}$의 사례로 얻을 수 있음을 관찰하는 것입니다. 따라서 $\mathsf{ind}'_{=_A}$를 사용하여 $\mathsf{ind}_{=_A}$를 다음과 같이 정의하면 충분합니다.

$$\mathsf{ind}_{=_A}(C, c, x, y, p) :\equiv \mathsf{ind}'_{=_A}(x, C(x), c(x), y, p).$$

반대 방향은 조금 더 까다롭습니다. 경로 귀납법의 특정 사례를 사용하여 기점 경로 귀납법의 특정 사례를 어떻게 유도할 수 있는지가 분명하지 않기 때문입니다. 대신 우리가 할 수 있는 것은 기점 경로 귀납법의 가능한 모든 구체화를 한꺼번에 보여 주는 경로 귀납법의 사례 하나를 구성하는 것입니다. 다음과 같이 정의합시다.

$$D : \prod_{x,y:A} (x =_A y) \to \mathcal{U},$$
$$D(x, y, p) :\equiv \prod_{C:\prod_{(z:A)}(x=_A z)\to\mathcal{U}} C(x, \mathsf{refl}_x) \to C(y, p).$$

그러면 다음 함수를 구성할 수 있습니다.

$$d : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x),$$
$$d :\equiv \lambda x.\, \lambda C.\, \lambda(c : C(x, \mathsf{refl}_x)).\, c$$

따라서 경로 귀납법을 사용하여 다음을 얻습니다.

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} D(x, y, p)$$

이때 $f(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv d(x)$ 입니다. D의 정의를 풀어 쓰면 f의 타입을 다음과 같이 전개할 수 있습니다.

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} \prod_{(C:\prod_{(z:A)}(x=_A z)\to\mathcal{U})} C(x, \mathsf{refl}_x) \to C(y, p).$$

이제 $a : A$와 함께 $x : A$와 $p : a =_A x$가 주어지면 기점 경로 귀납법의 결론을 유도할 수 있습니다.

$$f(a, x, p, C, c) : C(x, p).$$

올바른 정의적 상등도 얻는다는 점에 주목하십시오.

또 다른 증명은 기점 경로 귀납법의 모든 사용이 $\mathsf{ind}'_{=_A}$의 사례임을 관찰하고 다음과 같이 정의하는 것입니다.

$$\mathsf{ind}'_{=_A}(a, C, c, x, p) :\equiv \mathsf{ind}_{=_A}\big((\lambda x, y.\, \lambda p.\, \textstyle\prod_{(C:\prod_{(z:A)}(x=_A z)\to\mathcal{U})} C(x, \mathsf{refl}_x) \to C(y, p)\big),$$
$$(\lambda x.\, \lambda C.\, \lambda d.\, d), a, x, p\big)(C, c).$$

위에서 제시한 구성은 유니버스를 사용한다는 점에 유의하십시오. 즉, $C : \prod_{(x:A)}(a =_A x) \to \mathcal{U}_i$에 대한 $\mathsf{ind}'_{=_A}$를 모델링하려면 다음과 같이 두고 $\mathsf{ind}_{=_A}$를 사용해야 합니다.

$$D : \prod_{x,y:A} (x =_A y) \to \mathcal{U}_{i+1}$$

이는 D가 주어진 타입의 모든 C에 대해 양화하기 때문입니다. 이것은 우리의 유니버스 정의와 양립하지만, 유니버스를 사용하지 않고 $\mathsf{ind}'_{=_A}$를 유도하는 것도 가능합니다. $\mathsf{ind}_{=_A}$가 보조정리 2.3.1 및 3.11.8를 함의하고, 이 두 원리가 $\mathsf{ind}'_{=_A}$를 직접 함의한다는 것을 보일 수 있습니다. 자세한 내용은 연습문제 1.7로 독자에게 남겨 둡니다.

앞서 제시한 동일성 타입의 두 정식화 중 어느 것을 사용하든, 등식이 동치 관계이고, 모든 함수가 등식을 보존하며, 모든 족이 등식을 존중한다는 것을 확립할 수 있습니다. 자세한 내용은 다음 장으로 미루며, 그곳에서 이를 호모토피 타입 이론의 맥락에서 유도하고 설명할 것입니다.

주 1.12.2. 몇 가지 낯선 특징이 있음에도 불구하고, 호모토피 타입 이론에서는 명제적 등식이 바로 그 수학의 등식이라는 점을 강조합니다. 이 지위는 판단적 등식에 속하지 않으며, 판단적 등식은 오히려 타입 이론 규칙들의 메타이론적 특징입니다. 예를 들어 §1.9에서 증명한 자연수 덧셈의 결합법칙은 판단적 등식이 아니라 명제적 등식입니다. 교환법칙(연습문제 1.16)도 마찬가지입니다. 매우 단순한 교환성 $n + 1 = 1 + n$조차 일반적인 n에 대해서는 판단적 등식이 아닙니다(다만 임의의 특정한 n에 대해서는 판단적입니다. 예를 들어 $3 + 1 \equiv 1 + 3$인데, $+$를 정의하는 계산 규칙에 의해 양쪽 모두 4와 판단적으로 같기 때문입니다). 이러한 사실은 동일성 타입을 사용해서만 증명할 수 있는데, $\mathbb{N}$에 대한 귀납 원리는 (판단이 아니라) 타입을 출력으로 하는 경우에만 적용할 수 있기 때문입니다.

1.12.3 비등식

끝으로 **비등식**에 대해서도 조금 이야기해 봅시다. 비등식은 등식의 부정이며 다음과 같습니다.[11]

$$(x \neq_A y) :\equiv \neg(x =_A y).$$

$x \neq y$이면, x와 y가 **서로 다르다** 또는 **같지 않다**고 말합니다. 부정과 마찬가지로, 비등식은 고전 수학에서보다 여기서 덜 중요한 역할을 합니다. 예를 들어, 두 대상이 같지 않은 것이 아님을 증명함으로써 두 대상이 같다는 것을 증명할 수는 없습니다. 그것은 고전적인 이중 부정 법칙을 적용하는 것이 되기 때문입니다. §3.4을 참조하십시오.

때로는 비등식을 긍정적인 방식으로 표현하는 것이 유용합니다. 예를 들어, 정리 11.2.4에서 우리는 실수 x가 역을 가질 필요충분조건이 0으로부터의 거리가 양수라는 것임을 증명할 것이며, 이는 $x \neq 0$보다 강한 요구 조건입니다.

주

여기서 제시하는 타입 이론은 Martin-Löf의 직관주의 타입 이론 [ML98, ML75, ML82, ML84]의 한 버전이며, 이 이론 자체는 Brouwer [Bee85], Heyting [Hey66], Scott [Sco70], de Bruijn [dB73], Howard [How80], Tait [Tai67, Tai68], Lawvere [Law06]의 기초론적 연구에 기반을 두고 그 영향을 받았습니다. Martin-Löf 타입 이론의 세 가지 주요 변형이 타입 이론의 컴퓨터 구현인 NuPRL [CAB+86], Coq [Coq12], Agda [Nor07]의 토대를 이룹니다. 여기서 제시하는 이론은 여러 측면에서 이러한 정식화들과 다르며, 그중 일부는 호모토피 해석에 결정적이고, 나머지는 기술적인 편의이거나 아직 호모토피적 맥락에서 연구되지 않은 개념과 관련된 것입니다.

가장 중요한 점은, 여기서 기술하는 타입 이론이 Martin-Löf 타입 이론의 외연적 버전 [ML82]이 아니라 내포적 버전 [ML75]에서 유래했다는 것입니다. 외연적 이론은 판단적 상등과 명제적 등식을 구별하지 않는 반면, 내포적 이론은 판단적 상등을 순전히 정의적인 것으로 간주하며, 호모토피 해석의 핵심이 되는, 훨씬 더 넓고 증명 관련적인 동일성 타입 해석을 허용합니다. 호모토피적 관점에서 보면, 외연적 타입 이론은 호모토피적으로 이산적인 집합(§3.1 참조)에 국한되는 반면, 내포적 이론은 고차원 구조를 갖는 타입을 허용합니다. NuPRL 체계 [CAB+86]는 외연적인 반면, Coq [Coq12]와 Agda [Nor07]는 모두 내포적입니다. 내포적 타입 이론들 중에는 동일성 증명의 구조가 서로 다른 여러 변형이 있습니다. 여기서 우리가 의존하는 가장 관대한 해석은 상등에 대한 증명 관련적 해석을 허용하는 반면, 더 제한된 변형들은 동일성 증명의 유일성(UIP) [Str93], 즉 상등의 임의의 두 증명이 판단적으로 같다는 원리나, 공리 K [Str93], 즉 상등의 유일한 증명은 (판단적 상등을 법으로 하여) 반사성뿐이라는 원리와 같은 제한을 부과합니다. 이러한 추가 요구 조건은 Coq 와 Agda 체계에서 선택적으로 부과할 수 있습니다.

내포적 이론들 사이의 또 다른 차이점은 판단적 상등의 강도이며, 특히 함수 타입의 대상에 관한 것입니다. 여기서 우리는 유일성 원리(η-변환) $f \equiv \lambda x.\, f(x)$를 판단적 상등의 원리로 포함합니다. 이 원리는 예를 들어 §4.9에서 유니밸런스가 명제적 함수 외연성을 함의함을 보이는 데 사용됩니다. 유일성 원리는 때때로 다른 타입에 대해서도 고려됩니다. 예를 들어, 데카르트 곱 $A \times B$에 대한 유일성 원리는 §1.5에서 구성한 명제적 등식 $\mathsf{uniq}_{A\times B}$의 판단적 버전, 즉 $u \equiv (\mathsf{pr}_1(u), \mathsf{pr}_2(u))$라는 원리가 될 것입니다. 이것과 의존 쌍에 대한 대응하는 버전은 합리적인 선택이었겠지만(우리는 그렇게 선택하지 않았습니다), 이러한 규칙을 모두 포함할 수는 없습니다. 동일성 타입에 대한 대응하는 유일성 원리는

[11] "부등식"이라는 말은 $<$와 $\leq$를 가리킬 때 사용합니다. 또한 이것은 명제적 동일성 타입의 부정이라는 점에 유의하십시오. 물론 판단적 등식 $\equiv$를 부정하는 것은 의미가 없는데, 판단은 논리 연산의 대상이 아니기 때문입니다.

모든 고차 호모토피적 구조를 자명하게 만들 것이기 때문입니다. 따라서 우리는 그것을 제외할 수밖에 없으며, 그러면 문제는 어디에 선을 그을 것인가가 됩니다. 귀납적 타입과 관련해서는 §5.5에서 이 점들을 더 논의합니다.

우리의 목적상 함수의 (명제적) 상등이 (위에서 사용한 것과는 다른 의미로!) 외연적이라고 간주되는 것이 중요합니다. 이는 이 장의 규칙들로부터 따라 나오는 것이 아니며, 공리 2.9.3로 표현될 것입니다. 이 결정은 함수의 상등이 수학에서 기대하는 그대로임을 명시하므로 우리의 목적에 중요합니다. 공리 2.9.3를 공리로 포함하기는 하지만, 이는 유니밸런스 공리와 함수에 대한 유일성 원리(§4.9 참고)로부터 유도할 수 있으며, 구간 타입의 존재(보조정리 6.3.2 참고)로부터도 유도할 수 있습니다.

곱, Σ-타입, 쌍대곱, 자연수 등과 같은 귀납적 타입(제5장 참고)에 관해서는 귀납과 재귀의 정식화에 대해 추가적인 선택지가 있습니다. 우리는 귀납 원리를 기본으로 삼고 패턴 매칭을 그로부터 유도되는 것으로 취했지만, 그 반대로 할 수도 있습니다. 제A장를 참고하십시오. 보통 후자의 경우에는 깊은 패턴 매칭도 허용합니다. 자세한 내용은 [Coq92b]을 참고하십시오. 우리가 이렇게 선택한 데에는 몇 가지 이유가 있습니다. 한 가지 이유는 귀납 원리가 범주론적 의미론에서 자연스럽게 얻어지는 것이기 때문입니다. 또 다른 이유는 허용 가능한 (깊은) 패턴 매칭의 종류를 명시하는 것이 꽤 까다롭기 때문입니다. 예를 들어 Agda 의 패턴 매칭은 기본적으로 공리 K를 증명할 수 있지만, –without-K 플래그를 사용하면 이를 막을 수 있습니다 [CDP14]. 마지막으로, 깊은 패턴 매칭은 고차 귀납적 타입(제6장 참고)에 대해서는 잘 이해되어 있지 않습니다. 따라서 우리는 §1.10에서 기술한 것처럼 귀납 원리의 적용과 직접적으로 동치인 패턴 매칭만을 사용할 것입니다.

Coq 의 타입 이론과 달리, 우리는 명제의 원시 타입을 포함하지 않습니다. 대신 §1.11에서 논의한 것처럼, 명제를 타입과 동일시하는 명제-타입 대응(PAT) 원리를 받아들입니다. 이는 원래 de Bruijn [dB73], Howard [How80], Tait [Tai68], Martin-Löf [ML98]가 제안한 것입니다. (우리의 결정은 §§3.2 및 3.3에서 더 자세히 설명합니다.)

그러나 우리는 유니버스의 완전한 누적 위계를 포함하므로, 타입 형성 판단과 등식 판단은 유니버스에 대한 소속 판단과 등식 판단의 사례가 됩니다. 편의상 우리는 유니버스의 대상을 타입의 코드가 아니라 타입 자체로 간주합니다. [ML84]의 용어로 말하면, 이는 "Tarski 스타일 유니버스"가 아니라 "Russell 스타일 유니버스"를 사용한다는 뜻입니다. 대안으로는 Tarski 스타일 유니버스를 사용하면서, 유니버스의 원소 $A : \mathcal{U}$를 타입 $\mathsf{El}(A)$로 만드는 명시적인 강제 변환 함수를 요구하고, 비형식적으로 작업할 때는 그 강제 변환을 생략한다고 말하는 방법이 있습니다.

또한 우리는 유니버스 위계를 누적적인 것으로 취급합니다. 즉 $\mathcal{U}_i$에 속하는 모든 타입은 각 $j \geq i$에 대해 $\mathcal{U}_j$에도 속합니다. 누적성을 형식적으로 구현하는 방법은 여러 가지가 있습니다. 가장 간단한 방법은 $A : \mathcal{U}_i$이면 $A : \mathcal{U}_j$라는 규칙을 포함하는 것입니다. 그러나 이 방법에는 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}_i$에 대해 $\lambda a.\, B(a) : A \to \mathcal{U}_j$는 결론지을 수 있지만 $B : A \to \mathcal{U}_j$는 결론지을 수 없다는 성가신 결과가 따릅니다. 이 문제를 해결하는 더 정교한 접근법은 $\mathcal{U}_i <: \mathcal{U}_j$로 생성되는 판단적 부분 타입 관계 $<:$를 도입하는 것이지만, 이렇게 하면 타입 이론을 연구하기가 더 복잡해집니다. 또 다른 대안은 명시적인 강제 변환 함수 $\uparrow : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j$를 포함하고, 비형식적으로 작업할 때는 이를 생략할 수 있도록 하는 것입니다.

또한 유니버스가 자연수로 첨자가 붙고 선형적으로 순서가 매겨질 필요도 없습니다. 어떤 목적에서는, 모든 유니버스가 더 큰 어떤 유니버스의 원소라는 것과, 임의의 두 유니버스가 함께 더 큰 어떤 유니버스에 포함된다는 "유향성" 성질만을 가정하는 것이 더 적절합니다. 그 밖에도 가능한 변형이 많은데, 예를 들어 모든 $\mathcal{U}_i$를 포함하는 유니버스 "$\mathcal{U}_\omega$"(또는 그보다 더 높은 "큰 기수" 타입 유니버스)를 포함하거나, 위계를 타입 족 $\lambda i.\, \mathcal{U}_i$로 내재화하는 것입니다. 후자는 실제로 Agda 에서 이루어집니다.

동일성 타입에 대한 경로 귀납법 원리는 Martin-Löf [ML75]가 정식화했습니다. Martin-Löf 타

입 이론의 틀에서 기점 경로 귀납법 규칙은 Paulin-Mohring [PM93]이 제시했습니다. 이 규칙은 NuPRL [CAB+86, Section 8.1]에 나오는 가설적 판단에 대한 "점별 함수성" 개념을 내포적으로 일반화한 것으로 볼 수 있습니다. Martin-Löf의 규칙이 Paulin-Mohring의 규칙을 함의한다는 사실은 Streicher가 공리 K를 사용하여 증명했고(§7.2 참고), Altenkirch와 Goguen이 §1.12에서와 같은 방식으로 증명했으며, 마지막으로 Hofmann이 유니버스 없이 증명했습니다(연습문제 1.7에서와 같이). 자세한 내용은 [Str93, §1.3 and Addendum]을 참고하십시오.

연습문제

연습문제 1.1. 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 주어졌을 때, 이들의 **합성** $g \circ f : A \to C$를 정의하십시오. $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$가 성립함을 보이십시오.

연습문제 1.2. 사영만을 사용하여 곱에 대한 재귀 원리 $\mathsf{rec}_{A\times B}$를 유도하고, 정의적 상등들이 성립함을 확인하십시오. Σ-타입에 대해서도 같은 작업을 하십시오.

연습문제 1.3. 사영과 명제적 유일성 원리 $\mathsf{uniq}_{A\times B}$만을 사용하여 곱에 대한 귀납 원리 $\mathsf{ind}_{A\times B}$를 유도하십시오. 정의적 상등들이 성립함을 확인하십시오. $\mathsf{uniq}_{A\times B}$를 Σ-타입으로 일반화하고, Σ-타입에 대해서도 같은 작업을 하십시오. (이 문제에는 제2장의 개념이 필요합니다.)

연습문제 1.4. 자연수에 대한 반복자

$$\mathsf{iter} : \prod_{C:\mathcal{U}} C \to (C \to C) \to \mathbb{N} \to C$$

다음 정의 등식과 함께

$$\mathsf{iter}(C, c_0, c_s, 0) :\equiv c_0,$$
$$\mathsf{iter}(C, c_0, c_s, \mathsf{succ}(n)) :\equiv c_s(\mathsf{iter}(C, c_0, c_s, n)),$$

재귀자 $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$의 타입을 갖는 함수를 유도하십시오. $\mathbb{N}$에 대한 귀납 원리를 사용하여, 재귀자의 정의 등식이 이 함수에 대해 명제적으로 성립함을 보이십시오.

연습문제 1.5. $A + B :\equiv \sum_{(x:\mathbf{2})} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B, x)$로 정의하면, §1.7에서 제시한 정의적 상등들이 성립하도록 ind_{A+B}를 정의할 수 있음을 보이십시오.

연습문제 1.6. $A \times B :\equiv \prod_{(x:\mathbf{2})} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B, x)$로 정의하면, §1.5에서 서술한 정의적 상등이 명제적으로(즉 동일성 타입을 사용하여) 성립하도록 $\mathsf{ind}_{A\times B}$의 정의를 줄 수 있음을 보이십시오. (이를 위해서는 §2.9에서 도입하는 함수 외연성 공리가 필요합니다.)

연습문제 1.7. 유니버스를 사용하지 않고 $\mathsf{ind}_{=_A}$로부터 $\mathsf{ind}'_{=_A}$를 유도하는 다른 방법을 제시하십시오. (이후 장들의 개념을 사용하면 가장 쉽습니다.)

연습문제 1.8. $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$를 사용하여 곱셈과 거듭제곱을 정의하십시오. $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}$만을 사용하여 $(\mathbb{N}, +, 0, \times, 1)$이 반환임을 확인하십시오. 아마 상등의 대칭성과 추이성(보조정리 2.1.1 및 2.1.2)도 사용해야 할 것입니다.

연습문제 1.9. §1.3의 끝에서 언급한 타입 족 $\mathsf{Fin} : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$와 §1.4에서 언급한 의존 함수 $\mathsf{fmax} : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{Fin}(n+1)$을 정의하십시오.

연습문제 1.10. 아커만 함수 $\mathsf{ack} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 다음 등식들을 만족하도록 $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$만을 사용하여 정의할 수 있음을 보이십시오:

$$\begin{aligned} \mathsf{ack}(0, n) &\equiv \mathsf{succ}(n), \\ \mathsf{ack}(\mathsf{succ}(m), 0) &\equiv \mathsf{ack}(m, 1), \\ \mathsf{ack}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n)) &\equiv \mathsf{ack}(m, \mathsf{ack}(\mathsf{succ}(m), n)). \end{aligned}$$

연습문제 1.11. 임의의 타입 A에 대해 $\neg\neg\neg A \to \neg A$가 성립함을 보이십시오.

연습문제 1.12. 타입으로서의 명제 해석을 사용하여 다음 항진명제들을 유도하십시오.

(i) A이면, (B이면 A)입니다.
(ii) A이면, (A가 아님)이 아닙니다.
(iii) (A가 아니거나 B가 아님)이면, (A이고 B임)이 아닙니다.

연습문제 1.13. 명제-타입 대응을 사용하여 배중률 원리의 이중 부정을 유도하십시오. 즉, ((P 또는 P가 아님)이 아님)이 아님을 증명하십시오.

연습문제 1.14. 동일성 타입에 대한 귀납 원리로는 왜 다음 정의 등식을 갖는 함수 $f : \prod_{(x:A)} \prod_{(p:x=x)} (p = \mathsf{refl}_x)$를 구성할 수 없습니까?

$$f(x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} \quad ?$$

연습문제 1.15. 동일자의 식별 불가능성이 경로 귀납법으로부터 따라 나옴을 보이십시오.

연습문제 1.16. 자연수의 덧셈이 교환법칙을 만족함을 보이십시오: $\prod_{(i,j:\mathbb{N})} (i + j = j + i)$.

제2장

호모토피 타입 이론

호모토피 타입 이론의 핵심적인 새 아이디어는 타입을 호모토피 이론의 공간으로, 또는 범주론의 고차원 그루포이드로 볼 수 있다는 것입니다.

먼저 호모토피 이론과 고차원 범주론 사이의 연관성을 간략히 요약하는 것으로 시작합니다. 고전적 호모토피 이론에서 공간 X는 위상이 주어진 점들의 집합이며, 점 x와 y 사이의 경로는 $p(0) = x$이고 $p(1) = y$인 연속 사상 $p : [0,1] \to X$로 표현됩니다. 이 함수는 각 "시간의 순간"마다 X의 한 점을 주는 것으로 생각할 수 있습니다. 많은 목적에 있어서 경로의 엄격한 상등(즉, 점별로 같은 함수)은 지나치게 세밀한 개념입니다. 예를 들어 경로 이어붙이기 연산(p가 x에서 y로 가는 경로이고 q가 y에서 z로 가는 경로이면, 이어붙이기 $p \cdot q$는 x에서 z로 가는 경로입니다)과 역 연산(p^{-1}는 y에서 x로 가는 경로입니다)을 정의할 수 있습니다. 그러나 이 연산들 사이에는 엄격한 상등으로는 성립하지 않는 자연스러운 등식들이 있습니다. 예를 들어 경로 $p \cdot p^{-1}$(시간이 0에서 1로 흐르는 동안 x에서 y로 걸어간 뒤 같은 길을 따라 되돌아오는 경로)는 항등 경로(모든 시간에 x에 가만히 머무르는 경로)와 엄격하게 같지 않습니다.

해결책은 호모토피라고 하는, 경로의 같음에 대한 더 성긴 개념을 고려하는 것입니다. 두 연속 사상 $f : X_1 \to X_2$와 $g : X_1 \to X_2$ 사이의 호모토피는 $H(x,0) = f(x)$와 $H(x,1) = g(x)$를 만족하는 연속 사상 $H : X_1 \times [0,1] \to X_2$입니다. 특히 x에서 y로 가는 경로 p와 q의 경우, 호모토피는 모든 $s \in [0,1]$에 대해 $H(s,0) = p(s)$이고 $H(s,1) = q(s)$인 연속 사상 $H : [0,1] \times [0,1] \to X$입니다. 이 경우에는 모든 $t \in [0,1]$에 대해 $H(0,t) = x$이고 $H(1,t) = y$일 것도 요구하여, 각 t에 대해 함수 $H(-,t)$가 다시 x에서 y로 가는 경로가 되도록 합니다. 이러한 호모토피를 끝점을 보존하는 호모토피 또는 끝점에 상대적인(rel endpoints) 호모토피라고 합니다. 단순한 경우에는 H에 의한 정사각형 $[0,1] \times [0,1]$의 상이 p와 q 사이의 "공간을 채운다"고 생각할 수 있지만, 일반적인 X에 대해서는 이것이 실제로 의미가 통하지 않습니다. H를 끝점을 움직이지 않으면서 p를 q로 연속적으로 변형하는 것으로 생각하는 편이 더 좋습니다. $[0,1] \times [0,1]$은 2차원이므로, H를 2차원 경로 사이의 경로라고도 부릅니다.

예를 들어, $p \cdot p^{-1}$는 같은 길을 따라 나갔다가 돌아오므로, $p \cdot p^{-1}$를 연속적으로 줄여 항등 경로로 만들 수 있다는 것을 알 수 있습니다 — 예컨대 공간의 구멍에 걸리는 일은 없습니다. 호모토피는 동치 관계이며, 이어붙이기, 역 등의 연산은 이 관계를 보존합니다. 더욱이, 어떤 점 x_0에서의 루프들의 호모토피 동치류(여기서 두 루프 p와 q는 그 사이에 기점을 보존하는 호모토피, 즉 위와 같은 호모토피 H로서 모든 t에 대해 $H(0,t) = H(1,t) = x_0$을 추가로 만족하는 것이 있을 때 같은 것으로 봅니다)는 기본군이라고 하는 군을 이룹니다. 이 군은 공간의 대수적 불변량으로서, 두 공간이 호모토피 동치인지(양방향으로 가는 연속 사상들이 있고 그 합성들이 항등 사상과 호모토픽한지) 조사하는 데 사용할 수

있습니다. 동치인 공간들은 동형인 기본군을 갖기 때문입니다.

호모토피 자체가 일종의 2차원 경로이므로, 3차원 호모토피 사이의 호모토피라는 자연스러운 개념이 있고, 이어서 호모토피 사이의 호모토피 사이의 호모토피 등이 있습니다. 점, 경로, 호모토피, 호모토피 사이의 호모토피, …로 이루어지고 기본군과 같은 대수적 연산을 갖춘 이 무한한 탑은 (약한) ∞-그루포이드라고 하는 대수적 구조의 한 예입니다. ∞-그루포이드는 대상들의 모임, 대상들 사이의 사상들의 모임, 이어서 사상 사이의 사상들의 모임 등으로 이루어지며, 어떤 복잡한 대수적 구조를 갖춥니다. 수준 k의 사상을 k-**사상**이라고 부릅니다. 각 수준의 사상들에는 항등, 합성, 역 연산이 있는데, 이 연산들은 그루포이드 법칙(합성의 결합법칙, 항등이 합성의 단위원이라는 법칙, 역의 상쇄 법칙)을 다음 수준의 사상을 통한 동일시하에서만 만족한다는 의미에서 약하며, 이러한 약함은 추가적인 구조를 낳습니다. 예를 들어, 사상 합성의 결합법칙 $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ 자체가 고차원 사상이므로, 결합법칙의 여러 증명을 서로 연관시키는 추가 연산이 필요합니다. $p \cdot (q \cdot (r \cdot s))$를 $((p \cdot q) \cdot r) \cdot s$로 다시 결합하는 여러 방법은 맥 레인의 오각형을 낳습니다. 약함은 또한 수준들 사이에 자명하지 않은 상호작용을 만들어 냅니다.

모든 위상 공간 X에는 기본 ∞-그루포이드 가 있으며, 그 k-사상들은 X의 k-차원 경로들입니다. ∞-그루포이드의 약함은 경로들이 호모토피를 통한 동일시하에서만 군을 이룬다는 사실에 직접 대응하며, 이때 $(k+1)$-경로들은 k-경로들 사이의 호모토피 역할을 합니다. 더욱이, 공간을 ∞-그루포이드로 보는 관점은 호모토피 이론을 전개하기에 충분할 만큼 공간의 여러 측면을 보존합니다. 즉, 기본 ∞-그루포이드 구성은 ∞-그루포이드를 공간으로 나타내는 기하학적 실현과 수반 관계에 있으며, 이 수반 관계는 호모토피 이론을 보존합니다(이를 호모토피 가설/정리라고 부르는데, 이것이 가설인지 정리인지는 ∞-그루포이드를 어떻게 정의하느냐에 달려 있기 때문입니다). 예를 들어, ∞-그루포이드의 기본군은 쉽게 정의할 수 있으며, 어떤 공간의 기본 ∞-그루포이드의 기본군을 계산하면 그 결과는 그 공간의 기본군에 대한 고전적인 정의와 일치합니다. 이러한 대응 때문에 호모토피 이론과 고차원 범주론은 서로 밀접하게 연관되어 있습니다.

이제 호모토피 타입 이론에서는 각 타입이 ∞-그루포이드의 구조를 가진다고 볼 수 있습니다. 임의의 타입 A와 임의의 $x, y : A$에 대해 동일성 타입 $x =_A y$가 있으며, 이를 $\mathsf{Id}_A(x,y)$ 또는 간단히 $x = y$로도 쓴다는 것을 상기하십시오. 논리적으로는 $x = y$의 원소들을 x와 y가 같다는 증거로, 또는 x와 y의 동일시로 생각할 수 있습니다. 더 나아가, 타입 이론에서는 (예컨대 1차 논리와 달리) $x =_A y$의 그러한 원소들을 또 다른 명제의 대상이 될 수 있는 개체로도 다룰 수 있습니다. 따라서 동일성 타입을 반복할 수 있습니다. 즉, 동일시 p, q 사이의 동일시들의 타입 $p =_{(x=_A y)} q$를 만들 수 있고, 타입 $r =_{(p=_{(x=_A y)} q)} s$ 등도 만들 수 있습니다. 이 동일성 타입들의 탑의 구조는 공간 안의 연속 경로들과 그 사이의 (고차) 호모토피들의 구조, 또는 ∞-그루포이드의 구조에 정확히 대응합니다.

따라서 원소 $p : x =_A y$를 x에서 y로 가는 **경로** 라고 자주 부르겠습니다. x를 이 경로의 **시작점**이라고 하고, y를 **끝점**이라고 합니다. 시작점과 끝점이 같은 두 경로 $p, q : x =_A y$를 **평행**하다고 하며, 이 경우 원소 $r : p =_{(x=_A y)} q$를 호모토피, 또는 사상 사이의 사상으로 생각할 수 있습니다. 이를 흔히 2-**경로** 또는 2**차원 경로**라고 부르겠습니다. 마찬가지로 $r =_{(p=_{(x=_A y)} q)} s$는 평행한 두 2차원 경로 사이의 3**차원 경로** 들의 타입이며, 이런 식으로 계속됩니다. 타입 A가 $\mathbb{N}$ 처럼 "집합과 같은" 타입이라면 이렇게 반복된 동일성 타입들은 흥미롭지 않지만(§3.1을 참조하십시오), 일반적인 경우에는 자명하지 않은 호모토피 타입을 모형화할 수 있습니다.

호모토피 타입 이론과 고전적 호모토피 이론의 중요한 차이점은 호모토피 타입 이론이 다음과 같은 의미에서 공간에 대한 종합적 기술을 제공한다는 것입니다. 종합 기하학은 Euclid [EucBC] 방식의 기하학입니다. 즉, 몇 가지 기본 개념(점과 직선), 작도(임의의 두 점을 잇는 직선), 공리(모든 직각은 서로 같다)에서 출발하여 논리적으로 결론을 연역합니다. 이는 해석 기하학과 대조됩니다.

해석 기하학에서는 점과 직선 같은 개념이 $\mathbb{R}^n$의 데카르트 좌표를 사용하여 구체적으로 표현되고 — 직선은 점들의 집합입니다 — 기본 작도와 공리는 이 표현으로부터 도출됩니다. 고전적 호모토피 이론이 해석적인(공간과 경로가 점들로 이루어진) 반면, 호모토피 타입 이론은 종합적입니다. 즉, 점, 경로, 그리고 경로 사이의 경로는 기본적이고 더 이상 나눌 수 없는 원시적 개념입니다.

더욱이, 호모토피 타입 이론의 놀라운 점 중 하나는 모든 기본 구성과 공리 — 고차 그루포이드 구조 전체 — 가 동일성 타입의 귀납 원리로부터 자동으로 생겨난다는 것입니다. §1.12에서 이 원리가 다음과 같은 내용이었음을 상기하십시오. 만약

- 모든 $x, y : A$와 모든 $p : x =_A y$에 대해 타입 $D(x, y, p)$가 있고,
- 모든 $a : A$에 대해 원소 $d(a) : D(a, a, \mathsf{refl}_a)$가 있다면,

다음이 성립합니다.

- 모든 두 원소 $x, y : A$와 $p : x =_A y$에 대해 원소 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : D(x, y, p)$가 존재하며, $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, a, a, \mathsf{refl}_a) \equiv d(a)$입니다.

다시 말해, 다음 의존 함수들이 주어지면

$$D : \prod_{x,y:A} (x = y) \to \mathcal{U}$$
$$d : \prod_{a:A} D(a, a, \mathsf{refl}_a)$$

다음 의존 함수가 존재하며,

$$\mathsf{ind}_{=_A}(D, d) : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=y)} D(x, y, p)$$

이 함수는 다음을 만족합니다.

$$\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, a, a, \mathsf{refl}_a) \equiv d(a) \tag{2.0.1}$$

이는 모든 $a : A$에 대해 성립합니다. 보통 이 귀납 규칙을 적용할 때마다, 정의되는 구체적인 함수에는 관심을 두지 않거나 곧바로 그 함수에 다른 이름을 붙이게 됩니다.

비형식적으로 말하면, 동일성 타입에 대한 귀납 원리는 동일성 타입의 원소 $p : x =_A y$에 의존하는 대상을 구성하고(또는 명제를 증명하고) 싶을 때, x와 y가 (판단적으로) 같고 p가 (판단적으로) 반사성 원소 $\mathsf{refl}_x : x = x$인 특수한 경우에만 그 구성(또는 증명)을 수행하면 충분하다는 것입니다. 비형식적으로 서술할 때에는 "귀납에 의해 다음을 가정하면 충분합니다…"와 같은 문구로 이를 표현할 수 있습니다. 이렇게 "반사성 경우"로 환원하는 것은 자연수에 대한 일반적인 귀납 증명에서 "기저 사례"와 "귀납 단계"로 환원하는 것, 그리고 서로소 합집합이나 선언에 대한 경우 분석 증명에서 "왼쪽 경우"와 "오른쪽 경우"로 환원하는 것과 유사합니다.

"변환 규칙" (2.0.1)은 자연수에 대한 귀납법 증명의 맥락에서는 덜 익숙하지만, 이와 관련된 재귀적 정의라는 개념에 유사한 개념이 있습니다. 수열 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$을 a_0을 주고 a_{n+1}을 a_n으로 나타내어 정의하면, 실제로 그 결과로 얻는 수열의 0^{th} 항은 주어진 항이며, a_{n+1}과 a_n을 관계 짓는 주어진 점화식이 그 결과로 얻는 수열에 대해 성립합니다. (이는 너무 자명하여 말할 가치조차 없어 보일 수 있지만, 재귀적 정의를 수열의 값을 계산하는 알고리즘으로 본다면, 이것이 바로 그 알고리즘을 실행하는 과정입니다.) 규칙 (2.0.1)도 이와 유사합니다. 이 규칙은 p가 $\mathsf{refl}_x : x = x$일 때의 값이 무엇이어야 하는지를 지정하여 모든 $p : x = y$에 대해 대상 $f(p)$를 정의하면, 우리가 지정한 값이 실제로 $f(\mathsf{refl}_x)$의 값이라는 것을 말합니다.

이 귀납 원리는 각 타입에 ∞-그루포이드의 구조를 부여하고, 두 타입 사이의 각 함수에 그러한 두 그루포이드 사이의 ∞-함자의 구조를 부여합니다. 이는 ∞-그루포이드를 다루는 새로운 방법을 제공하므로 수학적 관점에서 흥미롭습니다. 또한 각 타입과 함수에 연관된 새로운 연산들을 드러내므로 타입 이론적 관점에서도 흥미롭습니다. 이 장의 나머지 부분에서는 이 구조를 탐구하기 시작합니다.

2.1 타입은 고차 그루포이드입니다

이제 귀납 원리로부터 고차 그루포이드 구조의 첫 부분을 유도하겠습니다. 먼저 같음의 대칭성부터 시작하는데, 이는 위상수학의 언어로 말하면 "경로를 뒤집을 수 있다"는 것을 의미합니다.

보조정리 2.1.1. 모든 타입 A와 모든 $x, y : A$에 대하여 다음과 같은 함수가 존재합니다.

$$(x = y) \to (y = x)$$

이 함수는 $p \mapsto p^{-1}$로 표기하며, 각 $x : A$에 대하여 $\mathsf{refl}_x{}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$를 만족합니다. p^{-1}를 p의 **역**이라고 부릅니다.

무언가를 "보조정리"나 "정리"로 서술하는 것은 이번이 처음이므로, 잠시 멈추어 그것이 무엇을 의미하는지 살펴봅시다. 명제(증명의 대상이 될 수 있는 진술)는 타입과 동일시되는 반면, 보조정리와 정리(이미 증명된 진술)는 원소를 가진 타입과 동일시된다는 것을 상기하십시오. 따라서 보조정리나 정리의 진술은 §1.11에서처럼 타입으로 옮겨야 하고, 그 증명은 그 타입의 원소로 옮겨야 합니다. 보편 양화사 "모든 에 대해"의 해석에 따르면, 보조정리 2.1.1에 대응하는 타입은 다음과 같습니다.

$$\prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to (y = x).$$

보조정리 2.1.1의 증명은 이 타입의 원소를 구성하는 것, 즉 어떤 f에 대하여 판단 $f : \prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to (y = x)$를 유도하는 것으로 이루어집니다. 그런 다음 이 원소 f에 대하여 표기법 $(-)^{-1}$를 도입하며, 여기서 인자 A, x, y는 생략되고 문맥으로부터 추론됩니다. (§1.1에서 언급했듯이, 부차적인 진술 "각 $x : A$에 대하여 $\mathsf{refl}_x{}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$"는 별개의 판단으로 간주해야 합니다.)

첫 번째 증명. $A : \mathcal{U}$가 주어졌다고 가정하고, $D : \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to \mathcal{U}$를 $D(x, y, p) :\equiv (y = x)$로 정의된 타입 족이라고 합시다. 다시 말해 D는 임의의 $x, y : A$와 $p : x = y$에 타입, 즉 타입 $y = x$를 대응시키는 함수입니다. 그러면 다음 원소가 있습니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_x : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

따라서 동일성 타입에 대한 귀납 원리는 각 $p : (x = y)$에 대해 원소 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (y = x)$를 줍니다. 이제 원하는 함수 $(-)^{-1}$를 $\lambda p.\, \mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$로 정의할 수 있습니다. 즉, $p^{-1} :\equiv \mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p)$로 놓습니다. 변환 규칙 (2.0.1)에 의해 요구한 대로 $\mathsf{refl}_x{}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$를 얻습니다. □

이 증명은 매우 형식적인 방식으로 작성하였으며, 이는 동일성 타입에 대한 귀납 규칙이 아직 익숙하지 않을 때 도움이 될 수 있습니다. 더욱 형식적으로 말하자면, 보조정리 2.1.1와 그 증명은 함께 다음 판단으로 이루어진다고 할 수 있습니다.

$$\lambda A.\, \lambda x.\, \lambda y.\, \lambda p.\, \mathsf{ind}_{=_A}((\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda p.\, (y = x)), (\lambda x.\, \mathsf{refl}_x), x, y, p) : \prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to (y = x)$$

(추가적인 등식 판단과 함께). 그러나 궁극적으로는 다음의 동치인 증명에서처럼 보다 자연스러운 언어를 사용하는 것을 선호합니다.

두 번째 증명. 각 $x, y : A$와 $p : x = y$에 대하여 원소 $p^{-1} : y = x$를 구성하고자 합니다. 귀납법에 의해, y가 x이고 p가 refl_x인 경우에 이를 수행하는 것으로 충분합니다. 그런데 이 경우 p의 타입 $x = y$와 p^{-1}를 구성하려는 타입 $y = x$는 둘 다 단순히 $x = x$입니다. 따라서 "반사성 경우"에는 ${\mathsf{refl}_x}^{-1}$를 단순히 refl_x로 정의할 수 있습니다. 그러면 일반적인 경우는 귀납 원리로부터 따라 나오며, 변환 규칙 ${\mathsf{refl}_x}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$는 바로 앞서 제시한 반사성 경우의 증명입니다. □

독자가 후자의 방식에 익숙해지도록 돕기 위해, 이어지는 몇 개의 증명은 두 방식 모두로 작성하겠습니다. 다음으로 등식의 추이성을 증명합니다. 동치적으로 말하면 "경로를 이어 붙입니다".

보조정리 2.1.2. 모든 타입 A와 모든 $x, y, z : A$에 대하여 다음과 같은 함수가 존재합니다.

$$(x = y) \to (y = z) \to (x = z),$$

이를 $p \mapsto q \mapsto p \mathbin{\blacksquare} q$로 쓰며, 이 함수는 임의의 $x : A$에 대해 $\mathsf{refl}_x \mathbin{\blacksquare} \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$를 만족합니다. $p \mathbin{\blacksquare} q$를 p와 q의 **이어붙이기** 또는 **합성**이라고 부릅니다.

경로 이어붙이기를 함수 합성과 반대 순서로 표기하기로 했다는 점에 유의하십시오. $p : x = y$와 $q : y = z$로부터는 $p \mathbin{\blacksquare} q : x = z$를 얻는 반면, $f : A \to B$와 $g : B \to C$로부터는 $g \circ f : A \to C$를 얻습니다(연습문제 1.1 참조).

첫 번째 증명. 원하는 함수의 타입은 $\prod_{(x,y,z:A)} (x = y) \to (y = z) \to (x = z)$입니다. 대신 이와 동치인 타입 $\prod_{(x,y:A)} (x = y) \to \prod_{(z:A)} (y = z) \to (x = z)$를 갖는 함수를 정의하겠습니다. 이렇게 하면 경로 귀납법을 두 번 적용할 수 있습니다. $D : \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to \mathcal{U}$를 다음 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv \prod_{(z:A)} \prod_{(q:y=z)} (x = z).$$

$D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv \prod_{(z:A)} \prod_{(q:x=z)} (x = z)$임에 유의하십시오. 따라서 이 D에 동일성 타입에 대한 귀납 원리를 적용하려면 다음 타입의 함수가 필요합니다.

$$\prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x) \tag{2.1.3}$$

즉, 다음 타입의 함수가 필요합니다.

$$\prod_{(x,z:A)} \prod_{(q:x=z)} (x = z).$$

이제 $E : \prod_{(x,z:A)} \prod_{(q:x=z)} \mathcal{U}$를 타입 족 $E(x, z, q) :\equiv (x = z)$라고 합시다. $E(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv (x = x)$임에 유의하십시오. 따라서 다음 함수가 있습니다.

$$e(x) :\equiv \mathsf{refl}_x : E(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

E에 동일성 타입에 대한 귀납 원리를 적용하면 다음 함수를 얻습니다.

$$d : \prod_{(x,z:A)} \prod_{(q:x=z)} E(x, z, q).$$

그런데 $E(x,z,q) \equiv (x = z)$이므로 d의 타입은 (2.1.3)입니다. 따라서 이 함수 d를 사용하여 D에 동일성 타입에 대한 귀납 원리를 적용하면, 원하는 다음 타입의 함수를 얻을 수 있습니다.

$$\prod_{x,y:A} (x = y) \to \prod_{z:A} (y = z) \to (x = z)$$

따라서 $\prod_{(x,y,z:A)} (y = z) \to (x = y) \to (x = z)$도 얻습니다. 두 귀납 원리의 변환 규칙에 의해 임의의 $x : A$에 대하여 $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$가 성립합니다. □

두 번째 증명. 모든 $x,y,z : A$와 모든 $p : x = y$ 및 $q : y = z$에 대해 $x = z$의 원소를 구성하고자 합니다. p에 대한 귀납법에 의해 y가 x이고 p가 refl_x라고 가정하면 충분합니다. 이 경우 q의 타입 $y = z$는 $x = z$입니다. 이제 q에 대한 귀납법에 의해 z 역시 x이고 q가 refl_x라고 가정하면 충분합니다. 그런데 이 경우 $x = z$는 $x = x$이며, 우리에게는 $\mathsf{refl}_x : (x = x)$가 있습니다. □

독자는 우리가 이 보조정리에 대해 지나치게 복잡한 증명을 제시했다고 느낄 수도 있습니다. 사실 p에 대한 귀납법 이후에 멈출 수도 있었습니다. 그 시점에서 우리가 만들고자 하는 것은 등식 $x = z$이고, 우리는 이미 그러한 등식, 즉 q를 가지고 있기 때문입니다. 그런데 왜 계속해서 q에 대해 또 한 번 귀납법을 수행합니까?

그 답은, 서론에서 설명했듯이 우리가 증명 유관 수학을 하고 있기 때문입니다. 보조정리를 증명할 때 우리는 어떤 타입의 거주자를 정의하는 것이며, 그 원소가 거주하는 타입(즉 보조정리의 진술)뿐 아니라 증명 과정에서 구체적으로 어떤 원소를 정의했는지도 중요할 수 있습니다. 보조정리 2.1.2에는 세 가지 자명한 증명이 있습니다. p에 대한 귀납법, q에 대한 귀납법, 또는 둘 모두에 대한 귀납법을 수행할 수 있습니다. 세 가지 서로 다른 방식으로 증명했다면 같은 타입의 서로 다른 세 원소를 얻게 됩니다. 이 세 원소가 같음을 보이는 것은 어렵지 않지만(연습문제 2.1 참조), 이들은 정의상 같지는 않으므로 어느 하나를 다른 것보다 선호할 이유가 여전히 있을 수 있습니다.

보조정리 2.1.2의 경우, 그 차이는 계산 규칙에 달려 있습니다. p에 대한 한 번의 귀납법으로 보조정리를 증명했다면 $\mathsf{refl}_y \cdot q \equiv q$ 형태의 계산 규칙을 얻게 됩니다. q에 대한 한 번의 귀납법으로 증명했다면 대신 $p \cdot \mathsf{refl}_y \equiv p$를 얻게 되며, (우리가 한 것처럼) 이중 귀납법으로 증명하면 $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$만을 얻습니다.

비대칭적인 계산 규칙은 형식화된 수학을 할 때 컴퓨터가 더 많은 것을 자동으로 단순화할 수 있게 해 주므로 때때로 편리할 수 있습니다. 그러나 비형식적 수학에서는, 그리고 어쩌면 형식화된 경우에서조차도, 비대칭적으로 동작하는 이어붙이기 연산을 두고 어느 쪽이 "특별한" 쪽인지 기억해야 하는 것은 혼란스러울 수 있습니다. 양쪽을 대칭적으로 다루면 증명이 더 견고해집니다. 이것이 우리가 위와 같은 증명을 제시한 이유입니다. (물론 이는 어디까지나 스타일상의 선택임을 인정합니다.)

아래 표는 지금까지 우리가 한 것에 대한 "등식", "호모토피적", "고차 그루포이드" 관점을 요약합니다.

동등성	호모토피	∞-그루포이드
반사성	상수 경로	항등 사상
대칭성	경로의 역	역사상
추이성	경로의 이어붙이기	사상의 합성

실제로 추이성은 일련의 중간 단계를 거쳐 등식을 증명하는 데 자주 적용됩니다. 이를 위해 $a = b = c = d$와 같은 일반적인 표기법을 사용하겠습니다. 중간 식이 길거나 각 등식의 증거를 명시하고자 할 때는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned} a &= b && (p\text{에 의해}) \\ &= c && (q\text{에 의해}) \\ &= d && (r\text{에 의해}). \end{aligned}$$

어느 경우든 이 표기법은 원소 $(p \cdot q) \cdot r : (a = d)$의 구성을 나타냅니다. (구체성을 위해 왼쪽 결합을 택하지만, 아래 보조정리 2.1.4(iv)에 비추어 보면 큰 차이는 없습니다.) 만약 예를 들어 b와 c가 판단적으로 같다면, 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned} a &= b && (p\text{에 의해}) \\ &\equiv c \\ &= d && (r\text{에 의해}) \end{aligned}$$

이는 $p \cdot r : (a = d)$의 구성을 나타냅니다. 또한 우리는 일반적인 수학 관행에 따라, 이 표기법의 정당화("p에 의해"와 "r에 의해")가 필요한 정확한 증거를 제공할 것을 요구하지 않습니다. 대신 그 증거를 구성하는 데 가장 중요한(또는 가장 덜 자명한) 요소를 언급하기만 해도 되도록 합니다. 예를 들어 "보조정리 A"가 모든 x와 y에 대해 $f(x) = g(y)$가 성립한다고 진술한다면, 보조정리 A를 $x :\equiv a$와 $y :\equiv b$로 적용한다는 점을 독자가 추론할 수 있으리라 믿고 단계 $f(a) = g(b)$의 정당화로 "보조정리 A에 의해"라고 쓸 수 있습니다. 독자가 정당화를 짐작할 수 있으리라 믿는 경우에는 정당화를 완전히 생략할 수도 있습니다.

이제 증명 관련성 때문에 상등의 "대칭성"과 "추이성"을 증명한 것으로 멈출 수는 없습니다. 상등에 대한 이 연산들이 잘 동작한다는 것을 알아야 합니다. (이 문제는 집합론에서는 드러나지 않습니다. 집합론에서 대칭성과 추이성은 경로 위의 구조가 아니라 상등의 단순한 성질이기 때문입니다.) 호모토피 이론적 관점에서 보면, 이어붙이기와 역은 고차 그루포이드 구조의 "첫 번째 단계"에 불과합니다. 이 연산들에 대한 정합성 법칙과 더 높은 차원에서의 유사한 연산들도 필요합니다. 예를 들어, 이어붙이기가 결합적이라는 것과 역이 이어붙이기에 대해 역원을 준다는 것을 알아야 합니다.

보조정리 2.1.4. $A : \mathcal{U}$이고, $x, y, z, w : A$이며, $p : x = y$, $q : y = z$, $r : z = w$라고 가정합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

(i) $p = p \cdot \mathsf{refl}_y$이고 $p = \mathsf{refl}_x \cdot p$입니다.
(ii) $p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$이고 $p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x$입니다.
(iii) $(p^{-1})^{-1} = p$.
(iv) $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.

특히 (i)–(iv) 자체가 명제적 등식이며, $p, q : x = y$에 대한 $p =_{x=y} q$와 같이 동일성 타입의 동일성 타입에 속한다는 점에 유의하십시오. 위상적으로 이들은 경로의 경로, 즉 호모토피입니다. 경로 p를 역경로 p^{-1}와 연접하면 문자 그대로 상수 경로(타입 이론에서 등식 refl에 해당합니다)를 얻는 것이 아니라는 것은 위상수학에서 잘 알려진 사실입니다 — 대신 $p \cdot p^{-1}$에서 상수 경로로 가는 호모토피, 즉 고차 경로를 얻습니다.

보조정리 2.1.4의 증명. 모든 증명은 등식에 대한 귀납 원리를 사용합니다.

(i) 첫 번째 증명: $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 주어진 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv (p = p \cdot \mathsf{refl}_y).$$

그러면 $D(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 $\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x$입니다. $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$이므로 $D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv (\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x)$가 따라 나옵니다. 따라서 다음과 같은 함수가 존재합니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

이제 동일성 타입에 대한 귀납 원리는 각 $p : x = y$에 대해 원소 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (p = p \cdot \mathsf{refl}_y)$를 제공합니다. 다른 등식도 비슷하게 증명됩니다.

두 번째 증명: p에 대한 귀납법에 의해 y가 x이고 p가 refl_x라고 가정하면 충분합니다. 그런데 이 경우 $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$입니다.

(ii) 첫 번째 증명: $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 주어진 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv (p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y).$$

그러면 $D(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 ${\mathsf{refl}_x}^{-1} \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x$입니다. ${\mathsf{refl}_x}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$이고 $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$이므로 $D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv (\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x)$를 얻습니다. 따라서 다음 함수를 얻습니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

이제 경로 귀납법은 A의 각 $p : x = y$에 대해 원소 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$를 제공합니다. 다른 등식도 비슷합니다.

두 번째 증명: 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정하면 충분합니다. 그런데 이 경우 $p^{-1} \cdot p \equiv {\mathsf{refl}_x}^{-1} \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$입니다.

(iii) 첫 번째 증명: $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 주어지는 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv ((p^{-1})^{-1} = p).$$

그러면 $D(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 타입 $(({\mathsf{refl}_x}^{-1})^{-1} = \mathsf{refl}_x)$입니다. 그런데 각 $x : A$에 대하여 ${\mathsf{refl}_x}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$이므로 $({\mathsf{refl}_x}^{-1})^{-1} \equiv {\mathsf{refl}_x}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$이고, 따라서 $D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv (\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x)$입니다. 그러므로 다음 함수를 얻습니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

이제 경로 귀납법에 의해 각 $p : x = y$에 대하여 원소 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : (p^{-1})^{-1} = p$를 얻습니다.

두 번째 증명: 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 그런데 이 경우 $(p^{-1})^{-1} \equiv ({\mathsf{refl}_x}^{-1})^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$입니다.

(iv) 첫 번째 증명: $D_1 : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 주어지는 타입 족이라고 합시다.

$$D_1(x, y, p) :\equiv \prod_{(z,w:A)} \prod_{(q:y=z)} \prod_{(r:z=w)} \big(p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r\big).$$

그러면 $D_1(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 다음과 같습니다.

$$\prod_{(z,w:A)} \prod_{(q:x=z)} \prod_{(r:z=w)} \big(\mathsf{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathsf{refl}_x \cdot q) \cdot r\big).$$

이 타입의 원소를 구성하기 위해 $D_2 : \prod_{(x,z:A)}(x = z) \to \mathcal{U}$를 다음과 같은 타입 족이라고 합시다.

$$D_2(x, z, q) :\equiv \prod_{(w:A)} \prod_{(r:z=w)} \big(\mathsf{refl}_x \cdot (q \cdot r) = (\mathsf{refl}_x \cdot q) \cdot r\big).$$

그러면 $D_2(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 다음과 같습니다.

$$\prod_{(w:A)} \prod_{(r:x=w)} \big(\mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot r) = (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot r\big).$$

이 타입의 원소를 구성하기 위해 $D_3 : \prod_{(x,w:A)}(x = w) \to \mathcal{U}$를 다음과 같은 타입 족이라고 합시다.

$$D_3(x, w, r) :\equiv \big(\mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot r) = (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot r\big).$$

그러면 $D_3(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 다음과 같습니다.

$$\big(\mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) = (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot \mathsf{refl}_x\big)$$

이는 타입 $(\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x)$와 정의상 같으므로 $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$를 원소로 갖습니다. 따라서 경로 귀납법 규칙을 세 번 적용하면 최종적으로 원하는 타입의 원소를 얻습니다.

두 번째 증명: 귀납법에 의해 p, q, r가 모두 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 그런데 이 경우 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} p \cdot (q \cdot r) &\equiv \mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \\ &\equiv \mathsf{refl}_x \\ &\equiv (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot \mathsf{refl}_x \\ &\equiv (p \cdot q) \cdot r. \end{aligned}$$

따라서 $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$가 이 타입의 원소입니다. □

주 2.1.5. 이러한 고차 경로를 정의하는 다른 방법들도 있습니다. 예를 들어 보조정리 2.1.4(iv)에서 세 경로 모두가 아니라 한두 경로에 대해서만 귀납법을 적용할 수도 있습니다. 각각의 방법은 정의상 서로 다른 증명을 만들어 내지만, 그 증명들은 모두 서로 같습니다. 임의의 두 특정 증명 사이의 이러한 등식 역시 귀납법으로 증명할 수 있습니다. 해당 경로들을 모두 반사성으로 환원한 다음, 두 증명 자체도 반사성으로 환원됨을 확인하면 됩니다.

보조정리 2.1.4(iv)에 비추어, $(p \cdot q) \cdot r$를 흔히 $p \cdot q \cdot r$로 쓰고, 마찬가지로 $((p \cdot q) \cdot r) \cdot s$를 $p \cdot q \cdot r \cdot s$로 쓰는 식으로 표기하겠습니다. 명확성을 위해 왼쪽 결합을 택하지만, 실질적인 차이는 없습니다. 이러한 식의 결합 순서를 바꾸는 데 필요한 보조정리 2.1.4(iv)의 사례는 대개 독자가 필요에 따라 채워 넣을 수 있으리라 믿습니다.

고차 그루포이드 구조에 대한 논의는 사실 아직 끝나지 않았습니다. 경로 (i)–(iv) 역시 자체적인 고차 정합성 법칙들을 만족해야 하며, 이 법칙들은 그 자체로 고차 경로이고, 이러한 과정이 "무한대까지 계속"됩니다(예를 들어 구형 오페라드 개념을 이용하면 이를 엄밀하게 서술할 수 있습니다). 그러나 대부분의 목적에서는 무한 차원 구조 전체를 명시적으로 드러낼 필요가 없습니다. 호모토피 타입 이론의 좋은 점 중 하나는 동일성 타입의 귀납적 성질만으로 출발하여 이 모든 구조를 증명할 수 있다는 것이며, 따라서 필요한 만큼만 많게 또는 적게 명시적으로 드러낼 수 있습니다.

특히 이 책에서는 "모든 고차 수준에서의 정합적 구조"와 같은 개념을 엄밀하게 만드는 데 수반되는 복잡한 조합론이 전혀 필요하지 않습니다. 일반적인 경로 외에도 경로의 경로(즉, 타입 $p =_{x=_A y} q$의 원소)를 사용할 것이며, 앞서 언급했듯이 이를 2-경로 또는 2차원 경로라고 부릅니다. 또한 경우에 따라 경로의 경로의 경로(즉, 타입 $r =_{p=_{x=_A y} q} s$의 원소)도 사용할 것이며, 이를 3-경로 또는 3차원 경로라고 부릅니다. n차원 경로 의 일반적인 개념을 정의할 수도 있지만(연습문제 2.4 참조), 이 책에서는 필요하지 않습니다.

그러나 고차 경로 중 특히 중요하고 단순한 경우 하나는 사용할 것인데, 바로 시작점과 끝점이 같은 경우입니다. 집합론에서 명제 $a = a$는 전혀 흥미롭지 않지만, 호모토피 이론에서는 한 점에서 자기 자신으로 가는 경로를 루프라고 부르며, 루프는 흥미로운 고차 구조를 많이 지닙니다. 따라서 점 $a : A$를 가진 타입 A가 주어졌을 때, 그 **루프 공간** $\Omega(A, a)$를 타입 $a =_A a$로 정의합니다. 점 a가 문맥상 분명할 때는 간단히 ΩA로 쓰기도 합니다.

ΩA의 임의의 두 원소는 시작점과 끝점이 같은 경로이므로 이어 붙일 수 있습니다. 따라서 연산 $\Omega A \times \Omega A \to \Omega A$를 얻습니다. 더 일반적으로, A의 고차 그루포이드 구조는 ΩA에 이와 유사한 "고차 군" 구조를 부여합니다.

A의 루프 공간의 루프 공간을 고려하는 것도 유용할 수 있는데, 이는 a에서의 항등 루프 위의 2차원 루프들의 공간입니다. 이를 $\Omega^2(A, a)$로 쓰며, 타입 이론에서는 타입 $\mathsf{refl}_a =_{(a=_A a)} \mathsf{refl}_a$로 표현합니다. $\Omega^2(A, a)$는 루프 공간으로서 역시 "고차 군"이지만, 이제 그 원소들이 1차원 루프들 사이의 2차원 루프라는 사실에서 비롯되는 추가 구조도 갖습니다.

정리 2.1.6 (에크만–힐턴). 두 번째 루프 공간 위의 합성 연산

$$\Omega^2(A) \times \Omega^2(A) \to \Omega^2(A)$$

은 가환적입니다. 즉, 임의의 $\alpha, \beta : \Omega^2(A)$에 대하여 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$입니다.

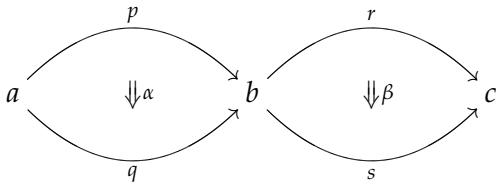
증명. 먼저, 1-루프들의 합성 $\Omega A \times \Omega A \to \Omega A$가 다음 연산을 유도한다는 점에 주목하십시오.

$$\star : \Omega^2(A) \times \Omega^2(A) \to \Omega^2(A)$$

방법은 다음과 같습니다. 원소 $a, b, c : A$와 다음과 같은 1-경로 및 2-경로를 생각합시다.

$$\begin{aligned} p &: a = b, & r &: b = c \\ q &: a = b, & s &: b = c \\ \alpha &: p = q, & \beta &: r = s \end{aligned}$$

이는 다음 도식에 나타낸 것과 같습니다(경로는 화살표로 그렸습니다).



위쪽 1-경로와 아래쪽 1-경로를 각각 합성하면 두 경로 $p \cdot r,\ q \cdot s : a = c$를 얻으며, 그러면 이들 사이에 다음과 같이 정의되는 "수평 합성"

$$\alpha \star \beta : p \cdot r = q \cdot s$$

이 존재합니다. 먼저 r에 대한 경로 귀납법으로 $\alpha \cdot_{\mathsf{r}} r : p \cdot r = q \cdot r$를 다음이 성립하도록 정의합니다.

$$\alpha \cdot_{\mathsf{r}} \mathsf{refl}_b \equiv \mathsf{ru}_p{}^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathsf{ru}_q$$

여기서 $\mathsf{ru}_p : p = p \cdot \mathsf{refl}_b$는 보조정리 2.1.4(i)의 오른쪽 단위 법칙입니다. 마찬가지로 $\cdot_{\mathsf{r}}$를 α에 대한 귀납법이나 등장하는 모든 경로에 대한 귀납법으로 정의할 수도 있으며, 그러면 서로 다른 판단적 등식이 얻어집니다. 하지만 지금의 목적에는 r에 대한 귀납법으로 정의하는 편이 일을 더 간단하게 만들어 줍니다. 마찬가지로 q에 대한 귀납법으로 $q \cdot_{\mathsf{l}} \beta : q \cdot r = q \cdot s$를 다음이 성립하도록 정의합니다.

$$\mathsf{refl}_b \cdot_{\mathsf{l}} \beta \equiv \mathsf{lu}_r{}^{-1} \cdot \beta \cdot \mathsf{lu}_s$$

여기서 lu_r는 왼쪽 단위 법칙을 나타냅니다. 연산 $\cdot_{\mathsf{l}}$와 $\cdot_{\mathsf{r}}$를 **위스커링**이라고 합니다. 다음으로, $\alpha \cdot_{\mathsf{r}} r$와 $q \cdot_{\mathsf{l}} \beta$는 합성 가능한 2-경로이므로 **수평 합성** 을 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\alpha \star \beta \ :\equiv\ (\alpha \cdot_{\mathsf{r}} r) \cdot (q \cdot_{\mathsf{l}} \beta).$$

이제 $a \equiv b \equiv c$라고 가정하여 모든 1-경로 p, q, r, s가 $\Omega(A, a)$의 원소가 되게 하고, 나아가 $p \equiv q \equiv r \equiv s \equiv \mathsf{refl}_a$라고 가정하여 $\alpha : \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a$와 $\beta : \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a$가 두 순서 모두로 합성 가능하게 합시다. 이 경우 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\alpha \star \beta &\equiv (\alpha \cdot_{\mathsf{r}} \mathsf{refl}_a) \cdot (\mathsf{refl}_a \cdot_{\mathsf{l}} \beta) \\
&= \mathsf{ru}_{\mathsf{refl}_a}{}^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathsf{ru}_{\mathsf{refl}_a} \cdot \mathsf{lu}_{\mathsf{refl}_a}{}^{-1} \cdot \beta \cdot \mathsf{lu}_{\mathsf{refl}_a} \\
&\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a}{}^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a} \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a}{}^{-1} \cdot \beta \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a} \\
&= \alpha \cdot \beta.
\end{aligned}$$

(경로 귀납법의 계산 규칙에 의해 $\mathsf{ru}_{\mathsf{refl}_a} \equiv \mathsf{lu}_{\mathsf{refl}_a} \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a}$임을 상기하십시오.) 한편, 또 다른 수평 합성을 유사하게 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\alpha \star' \beta \ :\equiv\ (p \cdot_{\mathsf{l}} \beta) \cdot (\alpha \cdot_{\mathsf{r}} s)$$

그리고 마찬가지로 다음이 성립함을 알 수 있습니다.

$$\alpha \star' \beta = \beta \cdot \alpha.$$

그런데 일반적으로 수평 합성을 정의하는 두 방식은 일치하여 $\alpha \star \beta = \alpha \star' \beta$가 성립하며, 이는 α와 β에 대한 귀납법을 적용한 다음 남은 두 1-경로에 대한 귀납법을 적용하여 모든 것을 반사성으로 환원하면 알 수 있습니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \star \beta = \alpha \star' \beta = \beta \cdot \alpha. \qquad \square$$

Eckmann–Hilton 논증으로 알려진 위의 사실은 고전적 호모토피 이론에서 유래한 것이며, 실제로 아래 제8장에서 타입의 고차 호모토피 군이 항상 아벨 군임을 보이는 데 사용됩니다. 증명에서 정의한 위스커링과 수평 합성 연산 또한 타입이 갖는 ∞-그루포이드 구조의 일반적인 일부입니다. 이 연산들은 (고차 호모토피를 법으로 하여) 고유한 법칙들을 만족하며, 예를 들면 다음과 같습니다.

$$\alpha \cdot_{\mathsf{r}} (p \cdot q) = (\alpha \cdot_{\mathsf{r}} p) \cdot_{\mathsf{r}} q$$

이 밖에도 여러 법칙이 있습니다. 이제부터는 이런 종류의 연산을 더 정의하고 그 성질을 검증하는 데 필요할 때마다 독자가 경로 귀납법을 적용할 수 있으리라 믿겠습니다.

이 예가 시사하듯이, 고차 경로 타입의 대수는 각 단계에서의 그루포이드와 유사한 구조보다 훨씬 더 복잡합니다. 호모토피 이론에서 반복 루프 공간을 연구할 때처럼, 여러 단계가 상호작용하여 더 많은 연산과 법칙을 만들어 냅니다. 실제로 고전적 호모토피 이론에서처럼 다음과 같은 일반적인 정의를 할 수 있습니다.

정의 2.1.7. **점을 가진 타입** (A, a)는 타입 $A : \mathcal{U}$와 그 **기점**이라 불리는 점 $a : A$의 쌍입니다. 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의 점을 가진 타입들의 타입을 $\mathcal{U}_\bullet :\equiv \sum_{(A:\mathcal{U})} A$로 씁니다.

정의 2.1.8. 점을 가진 타입 (A, a)가 주어졌을 때, (A, a)의 **루프 공간** 을 다음과 같은 점을 가진 타입으로 정의합니다.

$$\Omega(A, a) :\equiv ((a =_A a), \mathsf{refl}_a).$$

그 원소를 a에서의 **루프**라고 부르겠습니다. $n : \mathbb{N}$에 대해, 점을 가진 타입 (A, a)의 n**중 반복 루프 공간** $\Omega^n(A, a)$ 는 다음과 같이 재귀적으로 정의됩니다.

$$\Omega^0(A, a) :\equiv (A, a)$$
$$\Omega^{n+1}(A, a) :\equiv \Omega^n(\Omega(A, a)).$$

그 원소를 a에서의 n-**루프** 또는 n**차원 루프** 라고 부르겠습니다.

반복 루프 공간은 제6장–제8장에서 다시 다루겠습니다.

2.2 함수는 함자입니다

이제 함수 $f : A \to B$가 경로에 대해 함자적으로 작용함을 보이고자 합니다. 전통적인 타입 이론에서 이는 함수가 등식을 보존한다는 진술과 동치입니다. 위상적으로 이는 모든 함수가 "연속"이라는 것, 즉 경로를 보존한다는 것에 해당합니다.

보조정리 2.2.1. $f : A \to B$가 함수라고 가정합시다. 그러면 임의의 $x, y : A$에 대해 다음과 같은 연산이 존재합니다.

$$\mathsf{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y)).$$

또한 각 $x : A$에 대해 $\mathsf{ap}_f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$가 성립합니다.

표기 ap_f는 f를 경로에 적용(application)하는 것으로 읽을 수도 있고, f의 경로에 대한 작용(action on paths)으로 읽을 수도 있습니다.

첫 번째 증명. $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의되는 타입 족이라고 합시다

$$D(x, y, p) :\equiv (f(x) = f(y)).$$

그러면 다음을 얻습니다

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_{f(x)} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

경로 귀납법에 의해 $\mathsf{ap}_f : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to (f(x) = f(y))$를 얻습니다. 계산 규칙에 의해 각 $x : A$에 대해 $\mathsf{ap}_f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$가 성립합니다. □

두 번째 증명. 모든 $p : x = y$에 대해 $\mathsf{ap}_f(p)$를 정의하려면, 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 이 경우 $\mathsf{ap}_f(p) :\equiv \mathsf{refl}_{f(x)} : f(x) = f(x)$로 정의할 수 있습니다. □

앞으로 $\mathsf{ap}_f(p)$를 흔히 간단히 $f(p)$로 쓰겠습니다. 엄밀히 말하면 이는 모호하지만, 일반적으로 혼동이 생기지는 않습니다. 이는 함자를 대상에 적용할 때와 사상에 적용할 때 같은 기호를 사용하는 범주론의 일반적인 관례와도 일치합니다.

ap는 예상할 수 있는 모든 방식으로 함자적으로 행동한다는 점에 주목합니다.

보조정리 2.2.2. 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$, 그리고 경로 $p : x =_A y$와 $q : y =_A z$에 대해 다음이 성립합니다:

(i) $\mathsf{ap}_f(p \cdot q) = \mathsf{ap}_f(p) \cdot \mathsf{ap}_f(q)$.
(ii) $\mathsf{ap}_f(p^{-1}) = \mathsf{ap}_f(p)^{-1}$.
(iii) $\mathsf{ap}_g(\mathsf{ap}_f(p)) = \mathsf{ap}_{g \circ f}(p)$.
(iv) $\mathsf{ap}_{\mathsf{id}_A}(p) = p$.

증명. 독자에게 남겨 둡니다. □

보조정리 2.1.4의 등식들이 그러했듯이, 보조정리 2.2.2의 등식들도 그 자체로 경로이며, 이 경로들은 자체적인 정합성 법칙을 만족하고(이 법칙들도 같은 방식으로 증명할 수 있습니다), 이러한 구조는 계속 이어집니다.

2.3 타입 족은 올뭉치입니다

타입 이론에서는 의존 타입을 갖는 함수가 필수적이므로, 이러한 함수에 대한 보조정리 2.2.1의 한 버전도 필요합니다. 그러나 이를 진술하기는 그리 간단하지 않습니다. $f : \prod_{(x:A)} B(x)$이고 $p : x = y$이면 $f(x) : B(x)$와 $f(y) : B(y)$는 서로 다른 타입의 원소이므로, 선험적으로는 이들이 같은지조차 물을 수 없기 때문입니다. 빠져 있는 요소는 p 자체가 타입 $B(x)$와 $B(y)$를 서로 연관 짓는 방법을 제공한다는 사실입니다.

이것은 동일성 타입을 다룬 section 1.12에서 이미 보았으며, 거기서는 이를 "동일자의 식별 불가능성"이라고 불렀습니다. 이제 이것에 앞으로 사용할 다른 이름과 표기법을 도입합니다.

보조정리 2.3.1 (수송). P가 A 위의 타입 족이고 $p : x =_A y$라고 가정합시다. 그러면 함수 $p_* : P(x) \to P(y)$가 존재합니다.

첫 번째 증명. $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의되는 타입 족이라고 합시다

$$D(x, y, p) :\equiv P(x) \to P(y).$$

그러면 다음 함수를 얻습니다

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{id}_{P(x)} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x),$$

따라서 귀납 원리에 의해 $p : x = y$에 대해 $\mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, y, p) : P(x) \to P(y)$를 얻으며, 이를 p_*로 정의합니다. □

두 번째 증명. 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 그런데 이 경우 $(\mathsf{refl}_x)_* : P(x) \to P(x)$를 항등 함수로 잡을 수 있습니다. □

때로는 수송 연산이 일어나는 타입 족 P를 표기해야 할 필요가 있습니다. 이 경우 다음과 같이 쓸 수 있습니다

$$\mathsf{transport}^P(p, -) : P(x) \to P(y).$$

타입 A 위의 타입 족 P는 A의 원소들에 대한 성질로 볼 수 있으며, 이 성질은 $P(x)$에 원소가 있을 때 A의 x에서 성립한다는 점을 상기하십시오. 그러면 수송 보조정리는 x가 y와 같으면 $P(x)$가 성립하는 것과 $P(y)$가 성립하는 것이 서로 필요충분조건이라는 의미에서, P가 등식을 존중한다고 말해 줍니다. 실제로 나중에 $x = y$이면 $P(x)$와 $P(y)$가 사실 동치임을 보게 될 것입니다.

위상적으로 수송 보조정리는 올뭉치에서의 "경로 올림" 연산으로 볼 수 있습니다. 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$를 밑공간이 A이고, $P(x)$가 x 위의 섬유이며, $\sum_{(x:A)} P(x)$가 올뭉치의 **전체 공간**이고, 첫 번째 사영이 $\sum_{(x:A)}(P(x)) \to A$인 올뭉치로 생각합니다. 올뭉치를 정의하는 성질은 밑공간 A의 경로 $p : x = y$와 x 위의 섬유에 있는 점 $u : P(x)$가 주어지면, 경로 p를 u에서 시작하는 전체 공간의 경로로 올릴 수 있다는 것입니다(그리고 이 올림은 연속적으로 수행될 수 있습니다). 점 $p_*(u)$는 이 올린 경로의 다른 끝점으로 생각할 수 있습니다. 타입 이론에서 그 경로 자체도 정의할 수 있습니다.

보조정리 2.3.2 (경로 올림 성질). $P : A \to \mathcal{U}$를 A 위의 타입 족이라 하고, 어떤 $x : A$에 대해 $u : P(x)$가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 임의의 $p : x = y$에 대해 다음 경로가 존재합니다.

$$\mathsf{lift}(u, p) : (x, u) = (y, p_*(u))$$

이 경로는 $\sum_{(x:A)} P(x)$ 안에 있으며, $\mathsf{pr}_1(\mathsf{lift}(u, p)) = p$를 만족합니다.

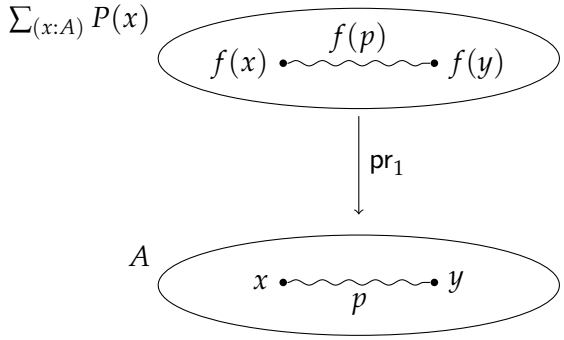
증명. 증명은 독자에게 맡깁니다. §2.7에서 더 일반적인 정리를 증명할 것입니다. □

고전적 호모토피 이론에서 올뭉치는 경로의 올림이 존재하는 사상으로 정의됩니다. 이와 대조적으로, 우리는 방금 타입 이론에서는 모든 타입 족에 지정된 "경로 올림 함수"가 함께 주어진다는 것을 보였습니다. 이는 어떤 것을 직접 제시하지 않고서는 그것이 존재함을 보일 수 없다는 구성적 수학의 철학과 일치합니다. 또한 앞에서 보았듯이 타입 이론의 모든 함수는 "연속"이므로, 경로 올림이 "연속적으로" 선택된다는 것도 자동으로 보장됩니다.

주 2.3.3. 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$를 올뭉치처럼 생각할 수는 있지만, "올뭉치 $P : A \to \mathcal{U}$"와 같이 말하는 것은 일반적으로 좋지 않습니다. 이는 밑공간이 $\mathcal{U}$이고 전체 공간이 A인 올뭉치에 대해 이야기하는 것처럼 들리기 때문입니다. 다시 말하자면, 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$를 올뭉치로 간주할 때 밑공간은 A이고 전체 공간은 $\sum_{(x:A)} P(x)$입니다.

타입 족에 대해 이야기할 때 때때로 다른 위상수학 용어를 사용하기도 합니다. 예를 들어, 의존 함수 $f : \prod_{(x:A)} P(x)$를 올뭉치 P의 **단면** 이라고 부를 수 있으며, 어떤 일이 각 $P(x)$에 대해 일어나면 그 일이 **섬유별로** 일어난다고 말할 수 있습니다. 예를 들어, 단면 $f : \prod_{(x:A)} P(x)$는 P가 "섬유별로 원소를 가진다"는 것을 보여 줍니다.

이제 보조정리 2.2.1의 의존 버전을 증명할 수 있습니다. 위상수학적 직관은 다음과 같습니다. $f : \prod_{(x:A)} P(x)$와 경로 $p : x =_A y$가 주어지면, 아래 그림과 같이 f를 p에 적용하여 P의 전체 공간에서 p "위에 놓인" 경로를 얻을 수 있어야 합니다.



이러한 경로는 보조정리 2.2.1으로부터 얻을 수 있습니다. $f : \prod_{(x:A)} P(x)$가 주어졌을 때 $f'(x) :\equiv (x, f(x))$로 두어 비의존 함수 $f' : A \to \sum_{(x:A)} P(x)$를 정의한 다음, $f'(p) : f'(x) = f'(y)$를 생각할 수 있습니다. $\mathsf{pr}_1 \circ f' \equiv \mathsf{id}_A$이므로 보조정리 2.2.2에 의해 $\mathsf{pr}_1(f'(p)) = p$가 성립합니다. 따라서 $f'(p)$는 이런 의미에서 실제로 p "위에 놓입니다". 그러나 $f'(p)$의 타입만 보고서는 그것이 A의 특정 경로(이 경우에는 p) 위에 놓인다는 것이 분명하지 않으며, 이 점이 중요할 때가 있습니다.

해결책은 수송 보조정리를 사용하는 것입니다. 보조정리 2.3.2에 의해 (x, u)에서 $(y, p_*(u))$로 가면서 p 위에 놓인 표준적인 경로 $\mathsf{lift}(u, p)$가 존재합니다. 따라서 $u : P(x)$에서 $v : P(y)$로 가면서 p 위에 놓인 임의의 경로는, 섬유 $P(y)$ 안에 완전히 놓인 $p_*(u)$에서 v로 가는 경로를 통해 $\mathsf{lift}(u, p)$를 거쳐 본질적으로 유일하게 분해되어야 합니다. 그러므로 동치의 차이를 무시하면, "$p : x = y$ 위에 놓인 u에서 v로 가는 경로"를 $P(y)$ 안의 경로 $p_*(u) = v$로 정의하는 것이 타당합니다. 그리고 실제로 의존 함수가 이러한 경로를 만들어 낸다는 것을 보일 수 있습니다.

보조정리 2.3.4 (의존 사상). $f : \prod_{(x:A)} P(x)$라고 가정합시다. 그러면 다음 사상이 존재합니다.

$$\mathsf{apd}_f : \prod_{p:x=y} \left(p_*(f(x)) =_{P(y)} f(y)\right).$$

첫 번째 증명. $D : \prod_{(x,y:A)} (x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의된 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv p_*(f(x)) = f(y).$$

그러면 $D(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 $(\mathsf{refl}_x)_*(f(x)) = f(x)$입니다. 그런데 $(\mathsf{refl}_x)_*(f(x)) \equiv f(x)$이므로 $D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv (f(x) = f(x))$를 얻습니다. 따라서 다음 함수를 얻습니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_{f(x)} : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x)$$

이제 경로 귀납법에 의해 각 $p : x = y$에 대해 $\mathsf{apd}_f(p) : p_*(f(x)) = f(y)$를 얻습니다. □

두 번째 증명. 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 그런데 이 경우 원하는 등식은 $(\mathsf{refl}_x)_*(f(x)) = f(x)$이며, 이는 판정적으로 성립합니다. □

이러한 의미에서 "다른 경로 위에 놓인" 경로를 일반적으로 의존 경로라고 부르겠습니다. 의존 경로는 제6장부터 점점 더 중요한 역할을 하게 됩니다. §2.5에서는 몇 가지 특정한 종류의 타입 족에 대해 의존 경로 개념을 표현하는 동치인 방법들이 있으며, 이 방법들이 때로는 더 편리하다는 것을 보게 될 것입니다.

이제 §1.4에서 보았듯이, 비의존적으로 타입이 주어진 함수 $f : A \to B$는 P가 상수 타입 족 $P(x) :\equiv B$일 때 의존적으로 타입이 주어진 함수 $f : \prod_{(x:A)} P(x)$의 특수한 경우일 뿐임을 상기하십시오. 이 경우 다음 보조정리 때문에 apd_f와 ap_f는 밀접하게 관련되어 있습니다.

보조정리 2.3.5. 고정된 $B : \mathcal{U}$에 대해 $P : A \to \mathcal{U}$가 $P(x) :\equiv B$로 정의되면, 임의의 $x, y : A$와 $p : x = y$ 및 $b : B$에 대해 다음 경로가 존재합니다.

$$\mathsf{transportconst}^B_p(b) : \mathsf{transport}^P(p, b) = b.$$

첫 번째 증명. $b : B$를 고정하고, $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의된 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv (\mathsf{transport}^P(p, b) = b).$$

그러면 $D(x, x, \mathsf{refl}_x)$는 $(\mathsf{transport}^P(\mathsf{refl}_x, b) = b)$이며, 이는 수송의 계산 규칙에 의해 $(b = b)$와 판정적으로 같습니다. 따라서 다음 함수를 얻습니다.

$$d :\equiv \lambda x.\, \mathsf{refl}_b : \prod_{x:A} D(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

이제 경로 귀납법에 의해 원하던 대로 $\prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=y)} (\mathsf{transport}^P(p, b) = b)$,의 원소를 얻습니다. □

두 번째 증명. 귀납법에 의해 y가 x이고 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 그런데 $\mathsf{transport}^P(\mathsf{refl}_x, b) \equiv b$이므로, 이 경우 증명해야 할 것은 $b = b$이며, 이에 대해서는 refl_b가 있습니다. □

따라서 임의의 $x, y : A$와 $p : x = y$ 및 $f : A \to B$에 대하여, 각각 $\mathsf{transportconst}^B_p(f(x))$ 및 그 역과 이어 붙임으로써 다음 함수들을 얻습니다.

$$\big(f(x) = f(y)\big) \to \big(p_*(f(x)) = f(y)\big) \qquad \text{그리고} \tag{2.3.6}$$

$$\big(p_*(f(x)) = f(y)\big) \to \big(f(x) = f(y)\big). \tag{2.3.7}$$

사실 이 함수들은 (§2.4에서 도입할 의미에서) 서로 역인 동치이며, $\mathsf{ap}_f(p)$를 $\mathsf{apd}_f(p)$와 연관시킵니다.

보조정리 2.3.8. $f : A \to B$와 $p : x =_A y$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{apd}_f(p) = \mathsf{transportconst}^B_p(f(x)) \cdot \mathsf{ap}_f(p).$$

첫 번째 증명. $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의되는 타입 족이라고 합시다.

$$D(x, y, p) :\equiv \big(\mathsf{apd}_f(p) = \mathsf{transportconst}^B_p(f(x)) \cdot \mathsf{ap}_f(p)\big).$$

따라서 다음을 얻습니다.

$$D(x,x,\mathsf{refl}_x) \equiv \left(\mathsf{apd}_f(\mathsf{refl}_x) = \mathsf{transportconst}^B_{\mathsf{refl}_x}(f(x)) \cdot \mathsf{ap}_f(\mathsf{refl}_x)\right).$$

그런데 정의에 의해 이 타입에 나타나는 세 경로는 모두 $\mathsf{refl}_{f(x)}$ 이므로, 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}} : D(x,x,\mathsf{refl}_x).$$

따라서 경로 귀납법에 의해 $\prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=y)} D(x,y,p)$ 의 원소를 얻으며, 이것이 우리가 원하던 것입니다. □

두 번째 증명. 귀납법에 의해 y가 x이고 p가 refl_x라고 가정하는 것으로 충분합니다. 이 경우 증명해야 할 것은 $\mathsf{refl}_{f(x)} = \mathsf{refl}_{f(x)} \cdot \mathsf{refl}_{f(x)}$ 이며, 이는 판단적으로 참입니다. □

apd_f와 ap_f의 타입은 서로 다르므로, 이들에 서로 다른 표기법을 사용하는 것이 더 명확한 경우가 많습니다.

이쯤에서 독자가 동일성 타입에 대한 귀납법에 의한 증명에 감을 잡기 시작했기를 바랍니다. 이제부터는 두 가지 방식의 증명을 모두 제시하지 않고, 가장 명확하고 편리한 방식(대개는 더 간결한 두 번째 방식)을 자유롭게 사용하겠습니다. 다음은 수송에 관한 몇 가지 다른 유용한 보조정리입니다. 증명은 (어느 방식으로든) 독자에게 맡깁니다.

보조정리 2.3.9. $P : A \to \mathcal{U}$와 $p : x =_A y$ 및 $q : y =_A z$가 주어지고 $u : P(x)$일 때, 다음이 성립합니다.

$$q_*(p_*(u)) = (p \cdot q)_*(u).$$

보조정리 2.3.10. 함수 $f : A \to B$와 타입 족 $P : B \to \mathcal{U}$, 그리고 임의의 $p : x =_A y$와 $u : P(f(x))$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{P\circ f}(p,u) = \mathsf{transport}^P(\mathsf{ap}_f(p),u).$$

보조정리 2.3.11. $P,Q : A \to \mathcal{U}$와 함수 족 $f : \prod_{(x:A)} P(x) \to Q(x)$, 그리고 임의의 $p : x =_A y$와 $u : P(x)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^Q(p, f_x(u)) = f_y(\mathsf{transport}^P(p,u)).$$

2.4 호모토피와 동치

지금까지 동일성 타입 $x =_A y$를 타입 A의 두 원소 x와 y 사이의 동일시, 경로, 또는 동치의 타입으로 볼 수 있는 방식을 살펴보았습니다. 이제 함수 사이, 그리고 타입 사이의 "동일시" 또는 "같음"에 대한 적절한 개념을 탐구합니다. §§2.9 및 2.10에서 호모토피 타입 이론을 통해 이들을 동일성 타입의 인스턴스와 동일시할 수 있음을 보겠지만, 그렇게 하기 전에 먼저 이들을 그 자체로 이해해야 합니다.

전통적으로 우리는 두 함수가 모든 입력에서 같은 값을 가지면 두 함수를 같은 것으로 간주합니다. 명제-타입 대응 해석에서 이는 두 함수 f와 g(의존적으로 타입이 지정되어 있을 수도 있음)가 타입 $\prod_{(x:A)}(f(x) = g(x))$에 원소가 있으면 같아야 함을 시사합니다. 호모토피적 해석에서 이 의존 함수 타입은 연속적인 경로나 함자적인 동치들로 이루어지므로, 호모토피의 타입 또는 자연 동형사상의 타입으로 간주할 수 있습니다. 우리는 이에 대해 위상수학적 용어를 채택하겠습니다.

정의 2.4.1. $f, g : \prod_{(x:A)} P(x)$를 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$의 두 단면이라고 합시다. f에서 g로의 **호모토피**는 다음 타입의 의존 함수입니다.

$$(f \sim g) :\equiv \prod_{x:A} (f(x) = g(x)).$$

호모토피는 동일시 $(f = g)$와 같지 않다는 점에 유의하십시오. 그러나 §2.9에서 호모토피와 동일시를 "동치"로 만드는 공리를 도입할 것입니다.

다음 증명들은 독자에게 맡깁니다.

보조정리 2.4.2. 호모토피는 각 의존 함수 타입 $\prod_{(x:A)} P(x)$ 위의 동치 관계입니다. 즉, 다음 타입들의 원소가 존재합니다.

$$\prod_{f:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim f)$$
$$\prod_{f,g:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim g) \to (g \sim f)$$
$$\prod_{f,g,h:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim g) \to (g \sim h) \to (f \sim h).$$

타입 이론의 함수가 자동으로 "함자"인 것처럼, 호모토피는 자동으로 "자연 변환"입니다. 이 사실은 비의존 함수 $f, g : A \to B$에 대해서만 서술하고 증명하겠습니다. 이를 의존 함수로 일반화하는 것은 연습문제 2.18에서 독자에게 맡깁니다.

$f : A \to B$와 $p : x =_A y$에 대해 $\mathsf{ap}_f(p)$를 $f(p)$로 쓸 수 있음을 상기하십시오.

보조정리 2.4.3. $H : f \sim g$가 함수 $f, g : A \to B$ 사이의 호모토피이고 $p : x =_A y$라고 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y).$$

이를 다음과 같은 가환 도표로 나타낼 수도 있습니다.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(p)} & f(y) \\ {\scriptstyle H(x)}\Big\| & & \Big\|{\scriptstyle H(y)} \\ g(x) & \xrightarrow[g(p)]{} & g(y) \end{array}$$

증명. 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정할 수 있습니다. ap_f와 ap_g는 반사성에서 계산되므로, 이 경우 보여야 하는 것은 다음과 같습니다.

$$H(x) \cdot \mathsf{refl}_{g(x)} = \mathsf{refl}_{f(x)} \cdot H(x).$$

그런데 양변이 모두 $H(x)$와 같으므로 이는 성립합니다. □

따름정리 2.4.4. $f : A \to A$에 대해 $H : f \sim \mathsf{id}_A$가 호모토피라고 합시다. 그러면 임의의 $x : A$에 대해 다음이 성립합니다.

$$H(f(x)) = f(H(x)).$$

여기서 $f(x)$는 f를 x에 적용하는 통상적인 함수 적용을 나타내고, $f(H(x))$는 $\mathsf{ap}_f(H(x))$를 나타냅니다.

증명. H의 자연성에 의해 다음 경로 도표는 가환합니다.

$$\begin{array}{ccc} ffx & \xlongequal{f(Hx)} & fx \\ {\scriptstyle H(fx)}\Big\| & & \Big\|{\scriptstyle Hx} \\ fx & \xlongequal[Hx]{} & x \end{array}$$

즉, $f(Hx) \cdot Hx = H(fx) \cdot Hx$입니다. 이제 $(Hx)^{-1}$로 위스커링하여 Hx를 소거하면 다음을 얻습니다.

$$f(Hx) = f(Hx) \cdot Hx \cdot (Hx)^{-1} = H(fx) \cdot Hx \cdot (Hx)^{-1} = H(fx)$$

이것이 원하던 결과입니다(일부 결합 법칙 경로는 생략하였습니다). □

물론 함수의 함자성(보조정리 2.2.2)과 마찬가지로, 보조정리 2.4.3의 등식은 그 자체의 정합성 법칙을 만족하는 경로이며, 이러한 구조는 계속 이어집니다.

이제 타입으로 넘어가 봅시다. 전통적인 관점에서는 두 합성 $f \circ g$와 $g \circ f$가 모두 점별로 항등함수와 같아지는 함수 $g : B \to A$가 존재할 때, 즉 $f \circ g \sim \mathsf{id}_B$이고 $g \circ f \sim \mathsf{id}_A$일 때 함수 $f : A \to B$를 동형사상이라고 말할 수 있습니다. 호모토피적 관점에서는 이를 호모토피 동치라고 불러야 할 것이고, 범주론적 관점에서는 (고차) 그루포이드의 동치라고 불러야 할 것입니다. 그러나 증명 관련 수학을 할 때는 이에 대응하는 타입

$$\sum_{g:B\to A} \left((f \circ g \sim \mathsf{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathsf{id}_A)\right) \tag{2.4.5}$$

은 성질이 좋지 않습니다. 예를 들어, 하나의 함수 $f : A \to B$에 대해서도 (2.4.5)의 서로 같지 않은 원소가 여러 개 존재할 수 있습니다. (이는 고차 범주론에서 흔히 단순한 동치가 아니라 수반 동치를 고려해야 한다는 관찰과 밀접하게 관련되어 있습니다.) 이러한 이유로, 우리는 대신 (2.4.5)에 역사적으로는 정확하지만 약간 경멸적으로 들리는 다음 이름을 붙입니다.

정의 2.4.6. 함수 $f : A \to B$에 대해, f의 **준역원** 은 함수 $g : B \to A$와 호모토피 $\alpha : f \circ g \sim \mathsf{id}_B$ 및 $\beta : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$로 이루어진 세 쌍 (g, α, β)입니다.

따라서 (2.4.5)는 f의 준역원들의 타입이며, 이를 $\mathsf{qinv}(f)$로 표기할 수 있습니다.

예 2.4.7. 항등 함수 $\mathsf{id}_A : A \to A$는 id_A 자신과 $\alpha(y) :\equiv \mathsf{refl}_y$ 및 $\beta(x) :\equiv \mathsf{refl}_x$로 정의되는 호모토피들로 주어지는 준역원을 가집니다.

예 2.4.8. 임의의 $p : x =_A y$와 $z : A$에 대해, 다음 함수들

$$\begin{aligned} &(p \cdot -) : (y =_A z) \to (x =_A z) \qquad \text{그리고} \\ &(- \cdot p) : (z =_A x) \to (z =_A y) \end{aligned}$$

은 각각 $(p^{-1} \cdot -)$와 $(- \cdot p^{-1})$로 주어지는 준역원을 가집니다. 연습문제 2.6을 참조하십시오.

예 2.4.9. 임의의 $p : x =_A y$와 $P : A \to \mathcal{U}$에 대해, 다음 함수

$$\mathsf{transport}^P(p, -) : P(x) \to P(y)$$

는 $\mathsf{transport}^P(p^{-1}, -)$로 주어지는 준역원을 가집니다. 이는 보조정리 2.3.9에서 따라 나옵니다.

일반적으로 동형사상이라는 단어 (그리고 전단사와 같은 유사한 단어 및 이와 관련된 표기 $A \cong B$)는 타입 A와 B가 "집합처럼 행동하는" 특수한 경우(§3.1 참고)에만 사용하겠습니다. 이 경우에는 타입 (2.4.5)에 아무런 문제가 없습니다. 동치라는 단어는 다음 성질들을 갖는 개선된 개념 $\mathsf{isequiv}(f)$를 위해 남겨 두겠습니다.

(i) 각 $f : A \to B$에 대해 함수 $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{isequiv}(f)$가 존재합니다.
(ii) 마찬가지로, 각 f에 대해 $\mathsf{isequiv}(f) \to \mathsf{qinv}(f)$가 성립합니다. 따라서 둘은 논리적으로 동치입니다(§1.11 참조).
(iii) 임의의 두 원소 $e_1, e_2 : \mathsf{isequiv}(f)$에 대해 $e_1 = e_2$입니다.

제4장에서는 이 세 가지 성질을 만족하는 $\mathsf{isequiv}(f)$의 정의가 여러 가지 있지만, 그 정의들이 모두 동치라는 것을 보게 됩니다. 지금은 그러한 정의가 존재한다는 것을 독자에게 납득시키기 위해 가장 쉬운 정의 하나만 소개합니다.

$$\mathsf{isequiv}(f) :\equiv \Big(\sum_{g:B\to A} (f \circ g \sim \mathsf{id}_B)\Big) \times \Big(\sum_{h:B\to A} (h \circ f \sim \mathsf{id}_A)\Big). \tag{2.4.10}$$

이 정의에 대해서는 (i)과 (ii)를 지금 바로 보일 수 있습니다. 함수 $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{isequiv}(f)$는 (g, α, β)를 (g, α, g, β)로 보내도록 쉽게 정의할 수 있습니다. 반대 방향으로는, (g, α, h, β)가 주어졌을 때 γ를 다음과 같은 합성 호모토피라고 합시다.

$$g \overset{\beta}{\sim} h \circ f \circ g \overset{\alpha}{\sim} h,$$

즉, $\gamma(x) :\equiv \beta(g(x))^{-1} \cdot h(\alpha(x))$라는 뜻입니다. 이제 $\beta' : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$를 $\beta'(x) :\equiv \gamma(f(x)) \cdot \beta(x)$로 정의합니다. 그러면 $(g, \alpha, \beta') : \mathsf{qinv}(f)$입니다.

이 정의에 대한 성질 (iii) 역시 증명하기가 그리 어렵지는 않지만, 데카르트 곱과 의존 쌍 타입의 동일성 타입을 규명해야 하며, 이는 §§2.6 및 2.7에서 다룰 것입니다. 따라서 이것 또한 뒤로 미룹니다. §4.3를 참조하십시오. 지금 시점에서 기억해야 할 핵심은 "f는 동치이다"라고 읽을 수 있는 잘 작동하는 타입이 존재한다는 것, 그리고 f의 준역원을 제시함으로써 f가 동치임을 증명할 수 있다는 것입니다. 실제로 이것이 함수가 동치임을 증명하는 가장 흔한 방법입니다.

증명 관련적 철학에 따라, A에서 B로의 동치는 함수 $f : A \to B$와 $\mathsf{isequiv}(f)$의 원소, 즉 그것이 동치라는 증명을 함께 묶은 것으로 정의됩니다. A에서 B로의 동치들의 타입을 $(A \simeq B)$로 표기합니다. 즉 이는 다음 타입입니다.

$$(A \simeq B) :\equiv \sum_{f:A\to B} \mathsf{isequiv}(f). \tag{2.4.11}$$

위의 성질 (iii)은 두 동치가 함수로서 같으면(즉, $A \to B$의 바탕 원소들이 같으면) 동치로서도 같다는 것을 보장합니다(§2.7 참조). 따라서 표기법을 남용하여 동치와 그 바탕 함수를 굳이 구별하지 않는 경우가 많습니다. 예를 들어 함수 $f : A \to B$가 있고 $e : \mathsf{isequiv}(f)$임을 알고 있다면, (f, e) 대신 $f : A \simeq B$라고 쓸 수 있습니다. 반대로 동치 $g : A \simeq B$가 있을 때 $a : A$가 주어지면, $(\mathsf{pr}_1 g)(a)$ 대신 $g(a)$라고 쓸 수 있습니다.

끝으로 다음 사실을 관찰합니다.

보조정리 2.4.12. 타입 동치는 $\mathcal{U}$ 위의 동치 관계입니다. 더 구체적으로는 다음과 같습니다.

(i) 임의의 A에 대해 항등 함수 id_A는 동치입니다. 따라서 $A \simeq A$입니다.
(ii) 임의의 $f : A \simeq B$에 대해 동치 $f^{-1} : B \simeq A$가 존재합니다.
(iii) 임의의 $f : A \simeq B$와 $g : B \simeq C$에 대해 $g \circ f : A \simeq C$가 성립합니다.

증명. 항등 함수는 명백히 자기 자신의 준역원이므로 동치입니다.

$f : A \to B$가 동치이면 준역원을 가지며, 이를 $f^{-1} : B \to A$라고 합시다. 그러면 f 또한 f^{-1}의 준역원이므로, f^{-1}은 동치 $B \to A$입니다.

마지막으로, 준역원이 각각 f^{-1}과 g^{-1}인 $f : A \simeq B$와 $g : B \simeq C$가 주어졌다고 합시다. 그러면 임의의 $a : A$에 대해 $f^{-1}g^{-1}gfa = f^{-1}fa = a$이고, 임의의 $c : C$에 대해 $gff^{-1}g^{-1}c = gg^{-1}c = c$입니다. 따라서 $f^{-1} \circ g^{-1}$은 $g \circ f$의 준역원이며, 그러므로 $g \circ f$는 동치입니다. □

2.5 타입 형성자의 고차 그루포이드 구조

제1장에서 우리는 새로운 타입을 형성하는 여러 방법, 즉 데카르트 곱, 서로소 합집합, 의존 곱, 의존 합 등을 도입했습니다. §§2.1–2.3에서는 호모토피 타입 이론의 모든 타입이 공간 또는 고차 그루포이드처럼 행동한다는 것을 보았습니다. 이 장의 나머지 부분에서 우리의 목표는 제1장에서 정의한 특정 타입들의 경우에 이 고차 구조가 어떻게 행동하는지를 명시적으로 밝히는 것입니다.

많은 타입 A에 대해, 동일성 타입 $x =_A y$는 A를 구성하는 데 쓰인 데이터를 이용하여 동치 수준에서 규명할 수 있음이 밝혀집니다. 예를 들어 A가 데카르트 곱 $B \times C$이고 $x \equiv (b, c)$, $y \equiv (b', c')$이면 다음 동치가 성립합니다.

$$\big((b, c) = (b', c')\big) \simeq \big((b = b') \times (c = c')\big). \tag{2.5.1}$$

좀 더 전통적인 언어로 말하면, 두 순서쌍은 그 성분들이 같을 때 정확히 같습니다(다만 동치 (2.5.1)는 이보다 더 많은 것을 말해 줍니다). 동일성 타입의 고차 구조 또한 이러한 동치들을 이용해 표현할 수 있습니다. 예를 들어, 쌍들 사이의 두 등식을 이어붙이는 것은 성분별 이어붙이기에 대응합니다.

마찬가지로, 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$가 제1장의 타입 형성 규칙을 사용하여 섬유별로 구성될 때, 연산 $\mathsf{transport}^P(p, -)$는 P를 구성하는 데 사용된 데이터에 대한 대응하는 연산들을 이용하여 호모토피를 무시하고 특징지을 수 있습니다. 예를 들어, $P(x) \equiv B(x) \times C(x)$이면 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^P(p, (b, c)) = \big(\mathsf{transport}^B(p, b), \mathsf{transport}^C(p, c)\big).$$

마지막으로, 타입 형성 규칙은 함자적이기도 하며, 함수 f가 이 함자성을 통해 만들어진 경우 연산 ap_f와 apd_f는 f를 구성하는 데 들어간 데이터에 대한 대응 연산들을 바탕으로 계산할 수 있습니다. 예를 들어 $g : B \to B'$, $h : C \to C'$이고 $f : B \times C \to B' \times C'$를 $f(b, c) :\equiv (g(b), h(c))$로 정의하면, 동치 (2.5.1)를 법으로 하여 ap_f를 "$(\mathsf{ap}_g, \mathsf{ap}_h)$"와 동일시할 수 있습니다.

다음 몇 개의 절(§§2.6–2.13)에서는 기본 타입 형성자마다 한 절씩 할애하여, 모든 기본 타입 형성 규칙에 대해 이러한 종류의 정리를 서술하고 증명합니다. 여기서 우리는 현재 사용할 수 있는 타입 이론들의 겉보기 결함 하나와 마주하게 됩니다. 뒤의 장들에서 분명해지겠지만, 동일성 타입, 수송 등에 대한 이러한 규명이 판단적 등식이라면 더 편리하고 직관적일 것으로 보입니다. 그러나 제1장에서 제시한 이론에서는 동일성 타입이 귀납 원리에 의해 모든 타입에 대해 균일하게 정의되므로, 타입마다

다른 것이 되도록 동일성 타입을 "재정의"할 수 없습니다. 따라서 이 장에서 다룰 개별 타입에 대한 규명은 대부분 우리가 찾아내고 가능하다면 증명해야 하는 정리입니다.

사실 제1장의 타입 이론으로는 두 가지 타입 형성자, 즉 Π-타입과 유니버스에 대해 원하는 정리를 증명하기에 부족합니다. 이 때문에 그 "정리"들이 참이 되도록 타입 이론에 공리를 도입할 수밖에 없습니다. 타입 이론의 관점에서 공리(참조: §1.1)란 지정된 어떤 타입에 거주한다고 선언된 "원자적" 원소로, 자신이 거주하는 타입에 관한 규칙 외에는 그 동작을 규정하는 규칙이 전혀 없는 원소입니다.

Π-타입에 대한 공리(§2.9)는 타입 이론가들에게 익숙한 것입니다. 이 공리는 함수 외연성이라고 불리며, 두 함수가 §2.4의 의미에서 호모토픽하면 두 함수가 같다는 것을 (대략적으로) 진술합니다. 반면 유니버스에 대한 공리(§2.10)는 Voevodsky가 이룬 호모토피 타입 이론의 새로운 기여입니다. 이 공리는 유니밸런스 공리라고 불리며, 두 타입이 §2.4의 의미에서 동치이면 두 타입이 같다는 것을 (대략적으로) 진술합니다. 이 공리에 대해서는 서론에서 이미 언급한 바 있으며, 이 공리는 이 책에서 매우 중요한 역할을 할 것입니다.[1]

모든 동일성 타입을 타입의 구성에 대한 귀납법으로 "결정"할 수 있는 것은 아니라는 점에 유의하는 것이 중요합니다. 반례로는 대부분의 비자명한 고차 귀납적 타입이 있습니다(장 6 및 8 참조). 예를 들어, 타입 $\mathbb{S}^n$(§6.4 참조)의 동일성 타입을 계산하는 것은 구면의 고차 호모토피 군을 계산하는 것과 동등하며, 이는 대수적 위상수학의 깊고 중요한 연구 분야입니다.

2.6 데카르트 곱 타입

타입 A와 B가 주어졌을 때, 데카르트 곱 타입 $A \times B$를 생각해 봅시다. 임의의 원소 $x, y : A \times B$와 경로 $p : x =_{A\times B} y$에 대해, 함자성에 의해 경로 $\mathsf{pr}_1(p) : \mathsf{pr}_1(x) =_A \mathsf{pr}_1(y)$와 $\mathsf{pr}_2(p) : \mathsf{pr}_2(x) =_B \mathsf{pr}_2(y)$를 추출할 수 있습니다. 따라서 다음과 같은 함수가 있습니다.

$$(x =_{A\times B} y) \to (\mathsf{pr}_1(x) =_A \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) =_B \mathsf{pr}_2(y)). \tag{2.6.1}$$

정리 2.6.2. 임의의 x와 y에 대해, 함수 (2.6.1)는 동치입니다.

논리적으로 읽으면, 이는 두 쌍이 성분별로 같을 때 그리고 오직 그때에만 같다는 뜻입니다. 범주론적으로 읽으면, 이는 곱 그루포이드의 사상이 사상들의 쌍이라는 뜻입니다. 호모토피 이론적으로 읽으면, 이는 곱공간의 경로가 경로들의 쌍이라는 뜻입니다.

증명. 반대 방향의 함수가 필요합니다:

$$(\mathsf{pr}_1(x) =_A \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) =_B \mathsf{pr}_2(y)) \to (x =_{A\times B} y). \tag{2.6.3}$$

데카르트 곱에 대한 귀납 규칙에 의해, x와 y가 모두 쌍이라고, 즉 어떤 $a, a' : A$와 $b, b' : B$에 대해 $x \equiv (a, b)$이고 $y \equiv (a', b')$라고 가정할 수 있습니다. 이 경우 우리가 원하는 것은 다음과 같은 함수입니다.

$$(a =_A a') \times (b =_B b') \to \big((a, b) =_{A\times B} (a', b')\big).$$

이제 정의역의 데카르트 곱에 대한 귀납법에 의해, $p : a = a'$와 $q : b = b'$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그리고 두 번의 경로 귀납법에 의해, $a \equiv a'$이고 $b \equiv b'$이며 p와 q가 모두 반사성이라고 가정할 수 있습니다. 그런데 이 경우 $(a, b) \equiv (a', b')$이므로, 출력 역시 반사성으로 취할 수 있습니다.

[1] 우리는 이 원리들을 공리로 도입하기로 했지만, 이 원리들이 성립하는 타입 이론을 정식화하는 다른 방법들이 있을 수도 있습니다. 이 장의 주해를 참조하십시오.

남은 것은 (2.6.3)가 (2.6.1)의 준역원임을 증명하는 것입니다. 이는 간단한 일련의 귀납이지만, 올바른 순서로 수행해야 합니다.

한 방향으로, $r : x =_{A\times B} y$에서 시작합시다. 먼저 $x \equiv y$이고 r이 반사성이라고 가정하기 위해 r에 대해 경로 귀납법을 수행합니다. 이 경우 $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}$과 $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}$는 경로 귀납법으로 정의되므로, (2.6.1)는 $r \equiv \mathsf{refl}_x$를 쌍 $(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1 x}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2 x})$로 보냅니다. 이제 x에 대한 귀납법에 의해 $x \equiv (a,b)$라고 가정할 수 있으므로, 이 쌍은 $(\mathsf{refl}_a, \mathsf{refl}_b)$입니다. 따라서 (2.6.3)는 정의에 의해 이를 $\mathsf{refl}_{(a,b)}$로 보내며, 이는 (현재의 가정 아래에서) r입니다.

다른 방향으로, $s : (\mathsf{pr}_1(x) =_A \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) =_B \mathsf{pr}_2(y))$에서 시작한다면, 먼저 x와 y에 대해 귀납법을 수행하여 이들이 쌍 (a,b)와 (a',b')라고 가정하고, 그다음 $s : (a =_A a') \times (b =_B b')$에 대해 귀납법을 수행하여 이를 $p : a = a'$이고 $q : b = b'$인 쌍 (p,q)로 환원합니다. 이제 p와 q에 대한 귀납법에 의해 이들이 반사성 refl_a와 refl_b라고 가정할 수 있으며, 이 경우 (2.6.3)는 $\mathsf{refl}_{(a,b)}$를 내놓고, 이어서 (2.6.1)는 우리를 다시 $(\mathsf{refl}_a, \mathsf{refl}_b) \equiv (p,q) \equiv s$로 되돌려 놓습니다. □

특히, 우리는 (2.6.1)가 역 (2.6.3)를 가진다는 것을 보였으며, 이 역을 다음과 같이 표기할 수 있습니다.

$$\mathsf{pair}^{=} : (\mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y)) \to (x = y).$$

이것의 특수한 경우로부터 곱에 대한 명제적 유일성 원리 $z = (\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$를 얻는다는 점에 유의하십시오.

$\mathsf{pair}^{=}$를 $x = y$에 대한 생성자 또는 도입 규칙으로 보는 것이 도움이 될 수 있습니다. 이는 $a : A$와 $b : B$가 주어졌을 때 쌍 (a,b)를 도입하는 $A \times B$ 자체의 "쌍 만들기" 생성자와 유사합니다. 이 관점에서 (2.6.1)의 두 성분은 다음과 같습니다:

$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1} : (x = y) \to (\mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y))$$
$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2} : (x = y) \to (\mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y))$$

는 제거 규칙입니다. 마찬가지로, (2.6.3)가 (2.6.1)의 준역원임을 보여 주는 두 호모토피는 각각 다음과 같은 명제적 계산 규칙으로 이루어집니다.

$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(\mathsf{pair}^{=}(p,q)) = p$$
$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(\mathsf{pair}^{=}(p,q)) = q$$

여기서 $p : \mathsf{pr}_1 x = \mathsf{pr}_1 y$이고 $q : \mathsf{pr}_2 x = \mathsf{pr}_2 y$입니다. 다른 하나는 다음과 같은 명제적 유일성 원리로 이루어집니다:

$$r = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(r), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(r)) \qquad \text{대하여} r : x =_{A\times B} y.$$

$A \times B$에서 경로의 반사성, 역, 합성도 성분별로 특징지을 수 있습니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{refl}_{(z:A\times B)} &= \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1 z}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2 z}) \\
p^{-1} &= \mathsf{pair}^{=}\big(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p)^{-1}, \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p)^{-1}\big) \\
p \cdot q &= \mathsf{pair}^{=}\big(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p) \cdot \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(q), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p) \cdot \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(q)\big).
\end{aligned}$$

또는 달리 쓰면 다음과 같습니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_i}(\mathsf{refl}_{(z:A\times B)}) &= \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_i z} && (i = 1,2) \\
\mathsf{pair}^{=}(p^{-1}, q^{-1}) &= \mathsf{pair}^{=}(p,q)^{-1} \\
\mathsf{pair}^{=}(p \cdot q, p' \cdot q') &= \mathsf{pair}^{=}(p,p') \cdot \mathsf{pair}^{=}(q,q').
\end{aligned}$$

이 모든 등식은 주어진 경로에 경로 귀납법을 적용한 다음 반사성을 반환하는 방식으로 유도할 수 있습니다. §2.1에서 다룬 나머지 고차 그루포이드 구조에 대해서도 마찬가지이지만, 타입 검사를 통과하는 등식을 얻기 위해 다른 정합성 경로를 충분히 끼워 넣는 일은 점점 번거로워집니다. 예를 들어, 보조정리 2.1.4(iv)에 있는 경로의 역을 $\mathsf{assoc}(p,q,r)$로, 위에 표시된 마지막 경로를 $\mathsf{pair}^{\cdot}(p,q,p',q')$로 표기하면, 임의의 $u,v,z,w : A \times B$와 적절한 타입의 p,q,r,p',q',r'에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{pair}^{\cdot}(p \cdot q, r, p' \cdot q', r') \\
&\cdot (\mathsf{pair}^{\cdot}(p,q,p',q') \cdot_{\mathsf{r}} \mathsf{pair}^{=}(r,r')) \\
&\cdot \mathsf{assoc}(\mathsf{pair}^{=}(p,p'), \mathsf{pair}^{=}(q,q'), \mathsf{pair}^{=}(r,r')) \\
&= \quad \mathsf{ap}_{\mathsf{pair}^{=}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{assoc}(p,q,r), \mathsf{assoc}(p',q',r'))) \\
&\quad \cdot \mathsf{pair}^{\cdot}(p, q \cdot r, p', q' \cdot r') \\
&\quad \cdot (\mathsf{pair}^{=}(p,p') \cdot_{\mathsf{l}} \mathsf{pair}^{\cdot}(q,r,q',r')).
\end{aligned}$$

다행히도 우리는 이러한 고차원 정합성을 사용할 일이 전혀 없을 것입니다.

이제 타입 족의 점별 곱에서의 수송을 살펴봅시다. 타입 족 $A,B : Z \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때, $(A \times B)(z) :\equiv A(z) \times B(z)$로 정의되는 타입 족을 표기를 남용하여 $A \times B : Z \to \mathcal{U}$로 씁니다. 이제 $p : z =_Z w$와 $x : A(z) \times B(z)$가 주어지면, x를 p를 따라 수송하여 $A(w) \times B(w)$의 원소를 얻을 수 있습니다.

정리 2.6.4. 위의 상황에서 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{A\times B}(p,x) =_{A(w)\times B(w)} (\mathsf{transport}^{A}(p,\mathsf{pr}_1 x), \mathsf{transport}^{B}(p,\mathsf{pr}_2 x)).$$

증명. 경로 귀납법에 의해 p가 반사성이라고 가정할 수 있으며, 이 경우 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{transport}^{A\times B}(p,x) &\equiv x \\
\mathsf{transport}^{A}(p,\mathsf{pr}_1 x) &\equiv \mathsf{pr}_1 x \\
\mathsf{transport}^{B}(p,\mathsf{pr}_2 x) &\equiv \mathsf{pr}_2 x.
\end{aligned}$$

따라서 이제 $x = (\mathsf{pr}_1 x, \mathsf{pr}_2 x)$임을 보이는 일만 남습니다. 그런데 이것은 곱 타입에 대한 명제적 유일성 원리이며, 앞서 언급했듯이 정리 2.6.2에서 따라 나옵니다. □

마지막으로 데카르트 곱에 대한 ap의 함자성을 살펴봅시다. 타입 A,B,A',B'와 함수 $g : A \to A'$ 및 $h : B \to B'$가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 $f(x) :\equiv (g(\mathsf{pr}_1 x), h(\mathsf{pr}_2 x))$로 함수 $f : A \times B \to A' \times B'$를 정의할 수 있습니다.

정리 2.6.5. 위 상황에서 $x,y : A \times B$와 $p : \mathsf{pr}_1 x = \mathsf{pr}_1 y$ 및 $q : \mathsf{pr}_2 x = \mathsf{pr}_2 y$가 주어지면 다음이 성립합니다

$$f(\mathsf{pair}^{=}(p,q)) =_{(f(x)=f(y))} \mathsf{pair}^{=}(g(p), h(q)).$$

증명. 먼저 위 등식이 타입이 올바르게 부여된 식이라는 점에 주목하십시오. 한편으로는 $\mathsf{pair}^{=}(p,q) : x = y$이므로 $f(\mathsf{pair}^{=}(p,q)) : f(x) = f(y)$를 얻습니다. 다른 한편으로는 $\mathsf{pr}_1(f(x)) \equiv g(\mathsf{pr}_1 x)$이고 $\mathsf{pr}_2(f(x)) \equiv h(\mathsf{pr}_2 x)$이므로 $\mathsf{pair}^{=}(g(p), h(q)) : f(x) = f(y)$도 얻습니다.

이제 귀납법에 의해 $x \equiv (a,b)$이고 $y \equiv (a',b')$라고 가정할 수 있으며, 이 경우 $p : a = a'$와 $q : b = b'$를 얻습니다. 따라서 경로 귀납법에 의해 p와 q가 반사성이라고 가정할 수 있으며, 이 경우 원하는 등식이 판단적으로 성립합니다. □

2.7 Σ-타입

A를 타입이라 하고 $P : A \to \mathcal{U}$를 타입 족이라 합시다. Σ-타입, 즉 의존 쌍 타입 $\sum_{(x:A)} P(x)$가 데카르트 곱 타입의 일반화임을 상기하십시오. 따라서 그 고차 그루포이드 구조 역시 앞 절에서 다룬 내용의 일반화일 것으로 기대합니다. 특히 그 경로들은 경로의 쌍이어야 하지만, 이 경로들에 올바른 타입을 부여하려면 약간의 생각이 필요합니다.

$\sum_{(x:A)} P(x)$ 안에 경로 $p : w = w'$가 있다고 가정합시다. 그러면 $\mathsf{pr}_1(p) : \mathsf{pr}_1(w) = \mathsf{pr}_1(w')$를 얻습니다. 그러나 $\mathsf{pr}_2(w)$와 $\mathsf{pr}_2(w')$는 같은 타입에 속할 필요가 없으므로, 둘이 동일한지를 직접 물을 수는 없습니다. 하지만 경로 $\mathsf{pr}_1(p)$를 따라 $\mathsf{pr}_2(w)$를 수송할 수 있으며, 이렇게 하면 실제로 $\mathsf{pr}_2(w')$와 같은 타입의 원소를 얻습니다. 경로 귀납법에 의해 실제로 경로 $\mathsf{pr}_1(p)_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$를 얻습니다.

보조정리 2.3.4 앞의 논의에서 $\mathsf{pr}_1(p)_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$를 A 안의 경로 $\mathsf{pr}_1(p)$ 위에 놓인, $\mathsf{pr}_2(w)$에서 $\mathsf{pr}_2(w')$로 가는 경로들의 타입으로 볼 수 있음을 상기하십시오. 따라서 이는 전체 공간 안의 경로 $w = w'$가 A 안의 경로 $p : \mathsf{pr}_1(w) = \mathsf{pr}_1(w')$와 p 위에 놓인 $\mathsf{pr}_2(w)$에서 $\mathsf{pr}_2(w')$로 가는 경로를 함께 결정한다는(그리고 이들에 의해 결정된다는) 뜻이며, 이는 타당해 보입니다.

주 2.7.1. $x : A$와 $(x, u) = (x, v)$를 만족하는 $u, v : P(x)$가 있다고 해서 $u = v$가 따라 나오지는 않는다는 점에 유의하십시오. 반례는 연습문제 2.19를 참조하십시오. 우리가 결론지을 수 있는 것은 $p_*(u) = v$를 만족하는 $p : x = x$가 존재한다는 것뿐입니다. 이는 타입 이론을 처음 접하는 사람들이 흔히 혼동하는 부분이지만, 위상수학적 관점에서 보면 납득이 됩니다. 올뭉치의 전체 공간에서 우연히 같은 섬유에 놓인 두 점 사이에 경로 $(x, u) = (x, v)$가 존재한다고 해서, 전적으로 그 섬유 안에 놓인 경로 $u = v$가 존재하는 것은 아닙니다.

다음 정리는 이 과정을 거꾸로 수행할 수도 있음을 말합니다. 이는 정리 2.6.2의 직접적인 일반화이므로 좀 더 간결하게 서술하겠습니다.

정리 2.7.2. $P : A \to \mathcal{U}$가 타입 A 위의 타입 족이라고 가정하고 $w, w' : \sum_{(x:A)} P(x)$라 합시다. 그러면 다음과 같은 동치가 존재합니다

$$(w = w') \simeq \sum_{(p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w'))} p_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w').$$

증명. 다음과 같은 함수를 정의합니다

$$f : \prod_{w,w':\sum_{(x:A)} P(x)} (w = w') \to \sum_{(p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w'))} p_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$$

정의는 경로 귀납법으로 하며, 다음과 같이 둡니다

$$f(w, w, \mathsf{refl}_w) :\equiv (\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(w)}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2(w)}).$$

f가 동치임을 보이고자 합니다.

역방향으로는 다음 함수를 정의합니다

$$g : \prod_{w,w':\sum_{(x:A)} P(x)} \left(\sum_{p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w')} p_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w') \right) \to (w = w')$$

이는 먼저 w와 w'에 대해 귀납하여 정의하는데, 그러면 이들이 각각 (w_1, w_2)와 (w_1', w_2')로 분해되므로 다음을 보이면 충분합니다

$$\Big(\sum_{p:w_1=w_1'} p_*(w_2) = w_2'\Big) \to ((w_1, w_2) = (w_1', w_2')).$$

다음으로, 쌍 $\sum_{(p:w_1=w_1')} p_*(w_2) = w_2'$가 주어지면 Σ-귀납법을 사용하여 $p : w_1 = w_1'$와 $q : p_*(w_2) = w_2'$를 얻을 수 있습니다. p에 대해 귀납하면 $q : (\mathsf{refl}_{w_1})_*(w_2) = w_2'$를 얻으며, $(w_1, w_2) = (w_1, w_2')$를 보이면 충분합니다. 그런데 $(\mathsf{refl}_{w_1})_*(w_2) \equiv w_2$이므로, q에 대해 귀납하면 목표가 $(w_1, w_2) = (w_1, w_2)$로 환원되며, 이는 $\mathsf{refl}_{(w_1,w_2)}$로 증명할 수 있습니다.

다음으로 모든 w, w', r에 대해 $f(g(r)) = r$임을 보입니다. 여기서 r의 타입은 다음과 같습니다

$$\sum_{(p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w'))} (p_*(\mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')).$$

먼저 g의 정의에서와 같이 쌍 귀납법으로 쌍 w, w', r을 분해한 다음, 경로 귀납법을 두 번 사용하여 r의 두 성분을 모두 refl로 환원합니다. 그러면 $f(g(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2})) = (\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2})$임을 보이면 충분하며, 이는 정의에 의해 참입니다.

마찬가지로 모든 w, w', $p : w = w'$에 대해 $g(f(p)) = p$임을 보이려면, p에 대해 경로 귀납법을 적용한 다음 쌍 귀납법으로 w를 분해하면 됩니다. 그러면 $g(f(\mathsf{refl}_{(w_1,w_2)})) = \mathsf{refl}_{(w_1,w_2)}$임을 보이면 충분하며, 이는 정의에 의해 참입니다.

따라서 f는 준역원을 가지며, 그러므로 동치입니다. □

데카르트 곱의 경우에서와 마찬가지로, 특수한 경우로서 명제적 유일성 원리를 유도할 수 있습니다.

따름정리 2.7.3. $z : \sum_{(x:A)} P(x)$에 대해 $z = (\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$가 성립합니다.

증명. $\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)} : \mathsf{pr}_1(z) = \mathsf{pr}_1(\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$이므로, 정리 2.7.2에 의해 경로 $(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)})_*(\mathsf{pr}_2(z)) = \mathsf{pr}_2(\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$를 제시하면 충분합니다. 그런데 양변은 모두 $\mathsf{pr}_2(z)$와 판단적으로 같습니다. □

이항 데카르트 곱의 경우와 마찬가지로, 정리 2.7.2의 역방향은 도입 형식($\mathsf{pair}^=$)으로, 정방향은 제거 형식($\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}$ 과 $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}$)으로, 그리고 이 동치는 이들에 대한 명제적 계산 규칙과 유일성 원리를 제공하는 것으로 생각할 수 있습니다.

보조정리 2.3.2에서 정의한, $p : x = y$를 $u : P(x)$에서 들어 올린 경로 $\mathsf{lift}(u, p)$는 다음 도입 형식의 특수한 경우와 동일시할 수 있다는 점에 유의하십시오.

$$\mathsf{pair}^=(p, \mathsf{refl}_{p_*(u)}) : (x, u) = (y, p_*(u)).$$

이는 Σ-타입에 대한 수송의 작용을 기술하는 진술에 나타나며, 이 작용 역시 이항 데카르트 곱에 대한 작용을 일반화한 것입니다:

정리 2.7.4. 다음과 같은 타입 족들이 있다고 가정합시다.

$$P : A \to \mathcal{U} \qquad \text{그리고} \qquad Q : \Big(\sum_{x:A} P(x)\Big) \to \mathcal{U}.$$

그러면 다음과 같이 정의되는 A 위의 타입 족을 구성할 수 있습니다.

$$x \mapsto \sum_{u:P(x)} Q(x, u).$$

임의의 경로 $p : x = y$와 임의의 $(u, z) : \sum_{(u:P(x))} Q(x, u)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$p_*(u, z) = \left(p_*(u),\ \mathsf{pair}^{=}(p, \mathsf{refl}_{p_*(u)})_*(z)\right).$$

증명. 경로 귀납법에 의해 바로 따라옵니다. □

정리 2.6.5의 일반화를 서술하고 증명하는 것(연습문제 2.7 참조), 그리고 Σ-타입의 반사성, 역, 합성을 성분별로 특징짓는 것은 독자에게 맡깁니다.

2.8 단위 타입

자명한 경우도 때로는 중요하므로, 단위 타입 $\mathbf{1}$ 의 경우를 간단히 언급합니다.

정리 2.8.1. 임의의 $x, y : \mathbf{1}$에 대하여 $(x = y) \simeq \mathbf{1}$가 성립합니다.

이 증명을 x와 y에 대한 $\mathbf{1}$-귀납법으로 시작하여 문제를 $(\star = \star) \simeq \mathbf{1}$로 환원하고 싶어질 수 있습니다. 그러나 그 시점에서는 $p : \star = \star$에 대해 경로 귀납법을 수행할 수 없으므로 더 이상 진행할 수 없게 됩니다. 따라서 대신 가능한 한 일반적인 x와 y를 가지고 작업하고, 마지막 순간에 가서야 귀납법으로 이들을 $\star$로 환원합니다.

증명. 모든 것을 $\star$ 로 보내면 함수 $(x = y) \to \mathbf{1}$를 쉽게 정의할 수 있습니다. 반대로, 임의의 $x, y : \mathbf{1}$에 대하여 귀납법에 의해 $x \equiv \star \equiv y$라고 가정할 수 있습니다. 이 경우 $\mathsf{refl}_\star : x = y$가 있으므로 상수 함수 $\mathbf{1} \to (x = y)$를 얻습니다.

이들이 서로 역임을 보이기 위해, 먼저 원소 $u : \mathbf{1}$를 생각합시다. $u \equiv \star$라고 가정할 수 있는데, 이는 합성 $\mathbf{1} \to (x = y) \to \mathbf{1}$의 결과이기도 합니다.

한편, $p : x = y$가 주어졌다고 가정합시다. 경로 귀납법에 의해 $x \equiv y$이고 p가 refl_x라고 가정할 수 있습니다. 그러면 x가 $\star$ 라고 가정할 수 있으며, 이 경우 합성 $(x = y) \to \mathbf{1} \to (x = y)$는 p를 refl_x로, 즉 p로 보냅니다. □

특히, $\mathbf{1}$의 임의의 두 원소는 같습니다. 이 동치를 도입, 제거, 계산, 유일성 규칙의 관점에서 정식화하는 것은 독자에게 맡깁니다. $\mathbf{1}$ 에 대한 수송 보조정리는 단순히 상수 타입 족에 대한 수송 보조정리(보조정리 2.3.5)입니다.

2.9 Π-타입과 함수 외연성 공리

타입 A와 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때, 의존 함수 타입 $\prod_{(x:A)} B(x)$를 생각합시다. $\prod_{(x:A)} B(x)$에서 f로부터 g로 가는 경로들의 타입 $f = g$는 점별 경로들의 타입과 동치일 것으로 기대합니다:

$$(f = g) \ \simeq\ \left(\prod_{x:A} (f(x) =_{B(x)} g(x))\right). \tag{2.9.1}$$

전통적인 관점에서 이는 각 점에서 같은 두 함수는 함수로서도 같다는 뜻입니다. 위상수학적 관점에서는 함수 공간의 경로가 연속 호모토피와 같다는 뜻입니다. 그리고 범주론적 관점에서는 함자 범주의 동형사상이 동형사상들의 자연스러운 족이라는 뜻입니다.

그러나 앞 절들의 경우와 달리, 제1장에서 제시한 기본 타입 이론만으로는 (2.9.1)을 증명하기에 충분하지 않습니다. 말할 수 있는 것은 다음과 같은 어떤 함수가 존재한다는 것뿐입니다.

$$\mathsf{happly} : (f = g) \to \prod_{x:A} (f(x) =_{B(x)} g(x)) \tag{2.9.2}$$

이 함수는 경로 귀납법으로 쉽게 정의됩니다. 따라서 당분간은 다음을 가정하겠습니다:

공리 2.9.3 (함수 외연성). 임의의 A, B, f, g에 대하여, 함수 (2.9.2)는 동치입니다.

이후의 장들에서 이 공리가 유니밸런스로부터도(§§2.10 및 4.9을 보십시오), 구간 타입으로부터도(§6.3과 연습문제 6.10을 보십시오) 따라 나온다는 것을 보게 될 것입니다.

특히, 공리 2.9.3는 (2.9.2)가 다음과 같은 준역원을 가짐을 함의합니다.

$$\mathsf{funext} : \left(\prod_{x:A} (f(x) = g(x))\right) \to (f = g).$$

이 함수 또한 "함수 외연성"이라고 부릅니다. §2.6에서 $\mathsf{pair}^{=}$에 대해 했던 것처럼, funext를 타입 $f = g$에 대한 도입 규칙으로 간주할 수 있습니다. 이 관점에서 happly는 제거 규칙이며, funext가 happly의 준역원임을 보여 주는 호모토피들은 다음과 같은 명제적 계산 규칙이 됩니다

$$\mathsf{happly}(\mathsf{funext}(h), x) = h(x) \qquad \text{대하여} h : \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

과 명제적 유일성 원리가 됩니다:

$$p = \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{happly}(p, x)) \qquad \text{대하여} p : f = g.$$

Π-타입에서의 항등, 역, 합성도 계산할 수 있습니다. 이들은 단순히 점별 연산으로 주어집니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{refl}_f &= \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{refl}_{f(x)}) \\
\alpha^{-1} &= \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{happly}(\alpha, x)^{-1}) \\
\alpha \cdot \beta &= \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{happly}(\alpha, x) \cdot \mathsf{happly}(\beta, x)).
\end{aligned}$$

이 등식들 중 첫 번째는 happly의 정의로부터 따라 나오며, 두 번째와 세 번째는 간단한 경로 귀납법으로 얻어집니다.

비의존 함수 타입 $A \to B$는 B가 x에 의존하지 않을 때의 의존 함수 타입 $\prod_{(x:A)} B(x)$의 특수한 경우이므로, 위에서 말한 모든 것은 비의존적인 경우에도 마찬가지로 적용됩니다. 그러나 수송 규칙은 비의존적인 경우에 다소 더 간단합니다. 타입 X, 경로 $p : x_1 =_X x_2$, 타입 족 $A, B : X \to \mathcal{U}$, 그리고 함수 $f : A(x_1) \to B(x_1)$가 주어지면 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{A \to B}(p, f) = \left(x \mapsto \mathsf{transport}^{B}(p, f(\mathsf{transport}^{A}(p^{-1}, x)))\right) \tag{2.9.4}$$

여기서 $A \to B$는 다음과 같이 정의된 타입 족 $X \to \mathcal{U}$을 표기를 남용하여 나타낸 것입니다.

$$(A \to B)(x) :\equiv (A(x) \to B(x)).$$

다시 말해, 함수 $f : A(x_1) \to B(x_1)$를 경로 $p : x_1 = x_2$를 따라 수송하면, 인자를 (타입 족 A에서) p를 따라 거꾸로 수송하고, f를 적용한 다음, 그 결과를 (타입 족 B에서) p를 따라 앞으로 수송하는 함수 $A(x_2) \to B(x_2)$를 얻습니다. 이는 경로 귀납법으로 쉽게 증명할 수 있습니다.

의존 함수를 수송하는 것도 비슷하지만 더 복잡합니다. 앞에서와 같이 X와 p가 주어지고, 타입 족 $A : X \to \mathcal{U}$과 $B : \prod_{(x:X)}(A(x) \to \mathcal{U})$, 그리고 의존 함수 $f : \prod_{(a:A(x_1))} B(x_1, a)$가 주어졌다고 합시다. 그러면 $a : A(x_2)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{\Pi_A(B)}(p, f)(a) = \mathsf{transport}^{\widehat{B}}\Big(\big(\mathsf{pair}^{=}(p^{-1}, \mathsf{refl}_{p^{-1}{}_*(a)})\big)^{-1}, f(\mathsf{transport}^{A}(p^{-1}, a))\Big)$$

여기서 $\Pi_A(B)$와 $\widehat{B}$는 각각 다음 타입 족을 나타냅니다.

$$\begin{array}{rcll} \Pi_A(B) & :\equiv & \big(x \mapsto \prod_{(a:A(x))} B(x,a)\big) & : \quad X \to \mathcal{U} \\ \widehat{B} & :\equiv & \big(w \mapsto B(\mathsf{pr}_1 w, \mathsf{pr}_2 w)\big) & : \quad \big(\sum_{(x:X)} A(x)\big) \to \mathcal{U}. \end{array} \tag{2.9.5}$$

이 공식들이 다소 위압적으로 보이더라도 세부 사항은 걱정하지 마십시오. 기본 아이디어는 비의존 함수 타입의 경우와 똑같습니다. 인자를 거꾸로 수송하고, 함수를 적용한 다음, 그 결과를 다시 앞으로 수송합니다.

이제 일반적인 타입 족 $P : X \to \mathcal{U}$에 대해, §2.2에서 $u : P(x)$에서 $v : P(y)$로 가는 $p : x =_X y$ 위의 의존 경로의 타입을 $p_*(u) =_{P(y)} v$로 정의했던 것을 상기하십시오. P가 함수 타입의 족일 때에는 이를 나타내는 동치인 방법이 있으며, 이 방법이 더 편리한 경우가 많습니다.

보조정리 2.9.6. 타입 족 $A, B : X \to \mathcal{U}$과 $p : x =_X y$, 그리고 $f : A(x) \to B(x)$와 $g : A(y) \to B(y)$가 주어지면, 다음 동치가 성립합니다.

$$\big(p_*(f) = g\big) \;\simeq\; \prod_{a:A(x)} \big(p_*(f(a)) = g(p_*(a))\big).$$

더 나아가, $q : p_*(f) = g$가 이 동치 아래에서 $\widehat{q}$에 대응한다면, $a : A(x)$에 대해 다음 경로

$$\mathsf{happly}(q, p_*(a)) : (p_*(f))(p_*(a)) = g(p_*(a))$$

는 이어 붙인 경로 $i \centerdot j \centerdot k$와 같습니다. 여기서

- $i : (p_*(f))(p_*(a)) = p_*\big(f(p^{-1}{}_*(p_*(a)))\big)$는 (2.9.4)로부터 오고,
- $j : p_*\big(f(p^{-1}{}_*(p_*(a)))\big) = p_*(f(a))$는 보조정리 2.1.4 및 2.3.9로부터 오며,
- $k : p_*(f(a)) = g(p_*(a))$는 $\widehat{q}(a)$입니다.

증명. 경로 귀납법에 의해 p가 반사성이라고 가정할 수 있으며, 이 경우 원하는 동치는 함수 외연성으로 환원됩니다. 그러면 두 번째 주장은 함수 외연성의 계산 규칙에 의해 따라 나옵니다. □

일반적으로, 각각이 앞서 증명한 보조정리나 가정한 대상으로부터 나오는 경로들의 이어붙이기를 고려하고 싶은 경우가 꽤 자주 생기며, 위의 두 번째 명제에서 했던 것처럼 이어붙이기의 각 경로에 이름을 붙여 이를 기술하는 것은 상당히 번거로울 수 있습니다. 따라서 우리는 이러한 이어붙이기를 익숙한 수학적 방식인 "이유가 붙은 등식의 연쇄"로 쓰는 관례를 채택하고, 독자가 쉽게 채워 넣을 수 있는 이유는 생략하기로 합니다. 예를 들어, 보조정리 2.9.6의 경로 $i \centerdot j \centerdot k$는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned} (p_*(f))(p_*(a)) &= p_*\Big(f(p^{-1}{}_*(p_*(a)))\Big) && \text{(식 (2.9.4)에 의해)} \\ &= p_*(f(a)) \\ &= g(p_*(a)). && \text{($\widehat{q}$에 의해)} \end{aligned}$$

일반적인 수학에서 이러한 등식의 사슬은 단지 두 대상이 같다는 것을 증명할 뿐입니다. 우리는 이를 두 대상 사이의 특정한 경로를 기술하는 데 사용함으로써 그 역할을 확장합니다.

늘 그렇듯이, 의존 함수에 대해서도 보조정리 2.9.6와 비슷하지만 더 복잡한 버전이 있습니다.

보조정리 2.9.7. 타입 족 $A : X \to \mathcal{U}$과 $B : \prod_{(x:X)} A(x) \to \mathcal{U}$, 그리고 $p : x =_X y$, 또한 $f : \prod_{(a:A(x))} B(x,a)$와 $g : \prod_{(a:A(y))} B(y,a)$가 주어지면, 다음 동치가 성립합니다.

$$\big(p_*(f) = g\big) \;\simeq\; \Big(\prod_{a:A(x)} \mathsf{transport}^{\widehat{B}}(\mathsf{pair}^{=}(p, \mathsf{refl}_{p_*(a)}), f(a)) = g(p_*(a))\Big)$$

여기서 $\widehat{B}$는 (2.9.5)에서와 같습니다.

이를 증명하고 적절한 계산 규칙을 정식화하는 일은 독자에게 맡깁니다.

2.10 유니버스와 유니밸런스 공리

두 타입 A와 B가 주어지면, 이들을 어떤 유니버스 타입 $\mathcal{U}$ 의 원소로 간주하여 동일성 타입 $A =_{\mathcal{U}} B$를 형성할 수 있습니다. 서론에서 언급했듯이, 유니밸런스란 $A =_{\mathcal{U}} B$를 §2.4에서 설명한 A에서 B로의 동치들의 타입 $(A \simeq B)$와 동일시하는 것입니다. 이 동일시는 다음의 표준적인 함수를 통해 이루어집니다.

보조정리 2.10.1. 타입 $A, B : \mathcal{U}$에 대하여 다음과 같은 함수가 존재하며,

$$\mathsf{idtoeqv} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B), \tag{2.10.2}$$

이 함수는 증명에서 정의됩니다.

증명. 이를 상등에 대한 귀납으로 직접 구성할 수도 있지만, 다음과 같이 기술하는 것이 더 편리합니다. 항등 함수 $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$는 유니버스 $\mathcal{U}$ 로 첨자화된 타입 족으로 볼 수 있다는 점에 주목하십시오. 이 타입 족은 각 타입 $X : \mathcal{U}$에 타입 X 자신을 대응시킵니다. (올뭉치로 보면, 그 전체 공간은 "점을 가진 타입"의 타입 $\sum_{(A:\mathcal{U})} A$입니다. §4.8도 참고하십시오.) 따라서 경로 $p : A =_{\mathcal{U}} B$가 주어지면 수송 함수 $p_* : A \to B$를 얻습니다. 우리는 p_*가 동치라고 주장합니다. 그런데 귀납에 의해 p가 refl_A라고 가정하는 것으로 충분하며, 이 경우 $p_* \equiv \mathsf{id}_A$이고, 이는 예 2.4.7에 의해 동치입니다. 따라서 $\mathsf{idtoeqv}(p)$를 p_*로 (그것이 동치라는 위의 증명과 함께) 정의할 수 있습니다. □

우리는 idtoeqv 가 동치라고 말하고 싶습니다. 그러나 함수 타입에 대한 happly의 경우와 마찬가지로, 제1장에서 기술한 타입 이론만으로는 이를 보장하기에 충분하지 않습니다. 따라서 함수 외연성에 대해 했던 것처럼, 이 성질을 공리로 정식화합니다. 이것이 보에보츠키(Voevodsky)의 유니밸런스 공리입니다.

공리 2.10.3 (유니밸런스). 임의의 $A, B : \mathcal{U}$에 대하여, 함수 (2.10.2)는 동치입니다.

따라서 특히 다음을 얻습니다.

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B).$$

엄밀히 말하면, 유니밸런스 공리는 특정한 유니버스 타입 $\mathcal{U}$에 관한 진술입니다. 유니버스 $\mathcal{U}$가 이 공리를 만족하면, 그 유니버스가 **유니밸런트**하다고 합니다. 달리 언급하지 않는 한(예를 들어 §4.9에서처럼) 우리는 모든 유니버스가 유니밸런트하다고 가정합니다.

주 2.10.4. 유니밸런스 공리에서는 $A \simeq B$를 (이를테면) $\sum_{(f:A\to B)} \mathsf{qinv}(f)$로 정의하지 않고, §2.4에서 설명한 $\mathsf{isequiv}$의 "좋은" 버전을 사용하여 정의했다는 점이 중요합니다. 연습문제 4.6를 참고하십시오.

특히 유니밸런스는 동치인 타입들을 동일시할 수 있다는 것을 의미합니다. 앞 절들에서 했던 것처럼, 이 동치를 다음과 같이 나누어 보는 것이 유용합니다.

- 유니밸런스 공리("univalence axiom")를 따서 ua로 표기하는 $(A =_{\mathcal{U}} B)$의 도입 규칙:

$$\mathsf{ua} : (A \simeq B) \to (A =_{\mathcal{U}} B).$$

- $\mathsf{idtoeqv}$인 제거 규칙,

$$\mathsf{idtoeqv} \equiv \mathsf{transport}^{X\mapsto X} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B).$$

- 명제적 계산 규칙,

$$\mathsf{transport}^{X\mapsto X}(\mathsf{ua}(f), x) = f(x).$$

- 명제적 유일성 원리: 임의의 $p : A = B$에 대하여,

$$p = \mathsf{ua}(\mathsf{transport}^{X\mapsto X}(p)).$$

또한 유니버스에서 상등의 반사성, 이어붙이기, 역을 동치에 대한 대응하는 연산들과 동일시할 수도 있습니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{refl}_A &= \mathsf{ua}(\mathsf{id}_A) \\ \mathsf{ua}(f) \cdot \mathsf{ua}(g) &= \mathsf{ua}(g \circ f) \\ \mathsf{ua}(f)^{-1} &= \mathsf{ua}(f^{-1}). \end{aligned}$$

이 중 첫 번째는 $\mathsf{idtoeqv}$ 의 정의에 의해 $\mathsf{id}_A = \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{refl}_A)$이고 ua 가 $\mathsf{idtoeqv}$ 의 역이므로 성립합니다. 두 번째의 경우, $p :\equiv \mathsf{ua}(f)$와 $q :\equiv \mathsf{ua}(g)$로 정의하면 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{ua}(g \circ f) = \mathsf{ua}(\mathsf{idtoeqv}(q) \circ \mathsf{idtoeqv}(p)) = \mathsf{ua}(\mathsf{idtoeqv}(p \cdot q)) = p \cdot q$$

여기서 보조정리 2.3.9과 $\mathsf{idtoeqv}$의 정의를 사용했습니다. 세 번째도 마찬가지입니다.

보조정리 2.3.10의 특수한 경우인 다음 관찰은 유니밸런스 공리를 적용할 때 자주 유용합니다.

보조정리 2.10.5. 임의의 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$과, 경로 $p : x = y$를 가진 $x, y : A$, 그리고 $u : B(x)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{transport}^{B}(p, u) &= \mathsf{transport}^{X\mapsto X}(\mathsf{ap}_B(p), u) \\ &= \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{ap}_B(p))(u). \end{aligned}$$

2.11 동일성 타입

타입 $a =_A a'$ 가 각 A마다 별도의 "정의"를 가지면서 동형사상을 제외하고 특징지어지는 것과 마찬가지로, 경로 $p, q : a =_A a'$ 사이의 경로들의 타입 $p =_{a=_A a'} q$ 에 대한 간단한 특징짓기는 없습니다. 그러나 우리의 다른 일반적인 정리 부류들, 예를 들어 동일성 타입이 동치를 보존한다는 사실은 동일성 타입으로 확장됩니다.

정리 2.11.1. $f : A \to B$가 동치이면, 모든 $a, a' : A$에 대해 다음도 동치입니다

$$\mathsf{ap}_f : (a =_A a') \to (f(a) =_B f(a')).$$

증명. f^{-1}를 f의 준역원이라 하고, 그 호모토피를 다음과 같이 둡시다.

$$\alpha : \prod_{b:B} (f(f^{-1}(b)) = b) \qquad \text{그리고} \qquad \beta : \prod_{a:A} (f^{-1}(f(a)) = a).$$

ap_f의 준역원은 본질적으로 다음과 같습니다.

$$\mathsf{ap}_{f^{-1}} : (f(a) = f(a')) \to (f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a'))).$$

그러나 $\mathsf{ap}_{f^{-1}}(q)$로부터 $a =_A a'$의 원소를 얻으려면 양쪽에 경로 ${\beta_a}^{-1}$와 $\beta_{a'}$를 이어붙여야 합니다. 이것이 ap_f의 준역원을 준다는 것을 보이기 위해, 한편으로는 임의의 $p : a =_A a'$에 대해 다음이 성립함을 보여야 합니다.

$${\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(\mathsf{ap}_f(p)) \cdot \beta_{a'} = p.$$

이는 ap의 함자성과 호모토피의 자연성(보조정리 2.2.2 및 2.4.3)으로부터 따라옵니다. 다른 한편으로는 임의의 $q : f(a) =_B f(a')$에 대해 다음이 성립함을 보여야 합니다

$$\mathsf{ap}_f\left({\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \beta_{a'}\right) = q.$$

이 증명은 조금 더 복잡하지만, 각 단계는 역시 보조정리 2.2.2 및 2.4.3을 적용한 것(또는 단순히 역경로를 상쇄한 것)입니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{ap}_f\left({\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \beta_{a'}\right) &= {\alpha_{f(a)}}^{-1} \cdot \alpha_{f(a)} \cdot \mathsf{ap}_f\left({\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \beta_{a'}\right) \cdot {\alpha_{f(a')}}^{-1} \cdot \alpha_{f(a')} \\
&= {\alpha_{f(a)}}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_f\left(\mathsf{ap}_{f^{-1}}\left(\mathsf{ap}_f\left({\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \beta_{a'}\right)\right)\right) \cdot \alpha_{f(a')} \\
&= {\alpha_{f(a)}}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_f\left(\beta_a \cdot {\beta_a}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{f^{-1}}(q) \cdot \beta_{a'} \cdot {\beta_{a'}}^{-1}\right) \cdot \alpha_{f(a')} \\
&= {\alpha_{f(a)}}^{-1} \cdot \mathsf{ap}_f(\mathsf{ap}_{f^{-1}}(q)) \cdot \alpha_{f(a')} \\
&= q.
\end{aligned}$$

□

따라서 어떤 타입 A에 대해 $a =_A a'$의 완전한 특성화를 알고 있다면, 타입 $p =_{a=_A a'} q$도 결정됩니다. 예를 들면 다음과 같습니다:

- $p, q : w =_{A \times B} w'$인 경로 $p = q$는 다음과 같은 경로의 쌍과 동치입니다

$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1} p =_{\mathsf{pr}_1 w =_A \mathsf{pr}_1 w'} \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1} q \quad \text{그리고} \quad \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2} p =_{\mathsf{pr}_2 w =_B \mathsf{pr}_2 w'} \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2} q.$$

- $p, q : f =_{\prod_{(x:A)} B(x)} g$인 경로 $p = q$는 다음과 같은 호모토피와 동치입니다

$$\prod_{x:A} (\mathsf{happly}(p)(x) =_{f(x)=g(x)} \mathsf{happly}(q)(x)).$$

다음으로 경로들의 족에서의 수송, 즉 각 $C(x)$가 동일성 타입인 $C : A \to \mathcal{U}$에서의 수송을 살펴봅시다. 가장 간단한 경우는 $C(x)$가 A 자체의 경로들의 타입인 경우이며, 한쪽 끝점이 고정되어 있을 수도 있습니다.

보조정리 2.11.2. 임의의 A와 $a : A$, 그리고 $p : x_1 = x_2$에 대해 다음이 성립합니다

$$\begin{aligned}
&\mathsf{transport}^{x\mapsto(a=x)}(p, q) = q \cdot p && q : a = x_1 \text{에 대하여,}\\
&\mathsf{transport}^{x\mapsto(x=a)}(p, q) = p^{-1} \cdot q && q : x_1 = a \text{에 대하여,}\\
&\mathsf{transport}^{x\mapsto(x=x)}(p, q) = p^{-1} \cdot q \cdot p && q : x_1 = x_1 \text{에 대하여.}
\end{aligned}$$

증명. p에 대한 경로 귀납법을 적용한 뒤, 합성의 단위 법칙을 적용합니다. □

다시 말해, $x \mapsto c = x$를 이용한 수송은 후합성이고, $x \mapsto x = c$를 이용한 수송은 반변 전합성입니다. 이는 범주론에서 공변 및 반변 hom 함자 $\hom(c, -)$와 $\hom(-, c)$의 함자적 작용으로 익숙할 수 있습니다.

마찬가지로, 보조정리 2.3.10와 관련된 보조정리 2.11.2의 다음과 같은 더 일반적인 형태를 증명할 수 있습니다.

정리 2.11.3. $f, g : A \to B$와 $p : a =_A a'$, $q : f(a) =_B g(a)$에 대해 다음이 성립합니다

$$\mathsf{transport}^{x\mapsto f(x)=_B g(x)}(p, q) =_{f(a')=g(a')} (\mathsf{ap}_f p)^{-1} \cdot q \cdot \mathsf{ap}_g p.$$

$\mathsf{ap}_{(x\mapsto x)}$는 항등 함수이고 $\mathsf{ap}_{(x\mapsto c)}$($c$는 상수)는 $p \mapsto \mathsf{refl}_c$이므로, 보조정리 2.11.2는 특수한 경우입니다. 이보다 더 일반적인 형태는 B가 A로 색인된 타입족일 수 있는 경우입니다:

정리 2.11.4. $B : A \to \mathcal{U}$이고 $f, g : \prod_{(x:A)} B(x)$이며, $p : a =_A a'$, $q : f(a) =_{B(a)} g(a)$라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다

$$\mathsf{transport}^{x\mapsto f(x)=_{B(x)} g(x)}(p, q) = (\mathsf{apd}_f(p))^{-1} \cdot \mathsf{ap}_{(\mathsf{transport}^B p)}(q) \cdot \mathsf{apd}_g(p).$$

마지막으로, §2.9에서와 마찬가지로, 동일성 타입들의 족에 대해서는 의존 경로의 또 다른 동치인 특성화가 있습니다.

정리 2.11.5. $q : a = a$와 $r : a' = a'$가 주어진 $p : a =_A a'$에 대해 다음이 성립합니다

$$\left(\mathsf{transport}^{x\mapsto(x=x)}(p, q) = r\right) \simeq \left(q \cdot p = p \cdot r\right).$$

증명. p에 대한 경로 귀납법을 적용한 뒤, 단위 등식 $q \cdot 1 = q$ 및 $r = 1 \cdot r$과의 합성이 동치라는 사실을 적용합니다. □

정리 2.11.3 및 2.11.4와 유사하게, 함수의 적용을 포함하는 더 일반적인 동치들도 있습니다.

2.12 쌍대곱

지금까지 살펴본 타입 형성자 대부분은 이른바 음성이라 불리는 것들이었습니다. 직관적으로, 이는 그 원소들이 제거 규칙 아래에서의 동작에 의해 결정된다는 뜻입니다. 즉, (의존) 쌍은 그 사영들에 의해 결정되고, (의존) 함수는 그 값들에 의해 결정됩니다. 음성 타입의 동일성 타입은 §§2.6–2.9에서 했던 것처럼, 그 모든 고차 구조와 함께 거의 항상 간단하게 특성화할 수 있습니다. 유니버스는 정확히 말해 음성 타입은 아니지만, 그 동일성 타입은 비슷하게 동작합니다. 즉, 간단한 특성화(유니밸런스)와 고차 구조에 대한 기술이 있습니다. 물론 동일성 타입 자체도 특수한 경우입니다.

이제 양의 타입 형성자의 첫 번째 예를 살펴봅니다. 다시 비형식적으로 말하면, 양의 타입은 특정 생성자들에 의해 "표시되는" 타입이며, 표시의 보편 성질은 그 제거 규칙으로 표현됩니다. (범주론적으로 말하면, 양의 타입은 "밖으로 나가는 사상" 보편 성질을 가지고, 음의 타입은 "안으로 들어오는 사상" 보편 성질을 가집니다.) 표시를 가지고 계산하는 것은 일반적으로 계산 불가능한 문제이므로, 양의 타입에 대해서는 동일성 타입의 간단한 특징짓기를 항상 기대할 수는 없습니다. 그러나 많은 특정한 경우에는 특징짓기나 부분적인 특징짓기가 실제로 존재하며, 이 예와 함께 소개하는 일반적인 방법으로 이를 얻을 수 있습니다.

(엄밀히 말하면, 우리가 택한 데카르트 곱과 Σ-타입의 표시도 양성입니다. 그러나 이 타입들은 아주 조금만 다른 음성 표시도 허용하므로, 그 동일성 타입들은 여기서 설명할 방법 없이도 직접적으로 특성화됩니다.)

단사 $\mathsf{inl} : A \to A + B$와 $\mathsf{inr} : B \to A + B$에 의해 "표시되는" 쌍대곱 타입 $A + B$를 생각해 봅시다. 직관적으로 $A + B$는 A와 B의 정확한 사본을 서로소로 포함할 것이라고 기대되므로, 다음이 성립해야 합니다.

$$(\mathsf{inl}(a_1) = \mathsf{inl}(a_2)) \simeq (a_1 = a_2) \tag{2.12.1}$$
$$(\mathsf{inr}(b_1) = \mathsf{inr}(b_2)) \simeq (b_1 = b_2) \tag{2.12.2}$$
$$(\mathsf{inl}(a) = \mathsf{inr}(b)) \simeq \mathbf{0}. \tag{2.12.3}$$

이를 다음과 같이 증명합니다. 원소 $a_0 : A$를 고정하고, 다음 타입 족을 특성화하겠습니다.

$$(x \mapsto (\mathsf{inl}(a_0) = x)) : A + B \to \mathcal{U}. \tag{2.12.4}$$

비슷한 논증으로 임의의 $b_0 : B$에 대하여 이와 유사한 족 $x \mapsto (x = \mathsf{inr}(b_0))$도 특성화할 수 있습니다. 이러한 특성화들을 함께 사용하면 식 (2.12.1)–(2.12.3)가 따라 나옵니다.

식 (2.12.4)을 특성화하기 위해, 타입 족 $\mathsf{code} : A + B \to \mathcal{U}$를 정의하고 $\prod_{(x:A+B)}((\mathsf{inl}(a_0) = x) \simeq \mathsf{code}(x))$임을 보이겠습니다. 이로부터 식 (2.12.1)를 결론짓고자 하므로 $\mathsf{code}(\mathsf{inl}(a)) = (a_0 = a)$이어야 하며, 식 (2.12.3)도 결론짓고자 하므로 $\mathsf{code}(\mathsf{inr}(b)) = \mathbf{0}$이어야 합니다. 핵심적인 통찰은 $A + B$의 재귀 원리를 사용하여 이 두 등식으로 $\mathsf{code} : A + B \to \mathcal{U}$를 정의할 수 있다는 것입니다.

$$\mathsf{code}(\mathsf{inl}(a)) :\equiv (a_0 = a),$$
$$\mathsf{code}(\mathsf{inr}(b)) :\equiv \mathbf{0}.$$

이는 호모토피 타입 이론에서 호모토피 이론을 전개할 때 꽤 자주 사용되는 증명 기법의 아주 간단한 예입니다. 예를 들어 §§8.1 및 8.9를 참조하십시오. 이제 다음을 보일 수 있습니다.

정리 2.12.5. 모든 $x : A + B$에 대하여 $(\mathsf{inl}(a_0) = x) \simeq \mathsf{code}(x)$가 성립합니다.

증명. 다음 증명의 핵심은 모든 점 x에 대하여 한꺼번에 증명함으로써 쌍대곱의 제거 원리를 사용할 수 있게 된다는 점입니다. 먼저 다음 함수를 정의합니다.

$$\mathsf{encode} : \prod_{(x:A+B)} \prod_{(p:\mathsf{inl}(a_0)=x)} \mathsf{code}(x)$$

이 함수는 반사성을 p를 따라 수송하여 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathsf{encode}(x,p) :\equiv \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(p, \mathsf{refl}_{a_0}).$$

code 의 정의에 의해 $\mathsf{code}(\mathsf{inl}(a_0)) \equiv (a_0 = a_0)$이므로 $\mathsf{refl}_{a_0} : \mathsf{code}(\mathsf{inl}(a_0))$임에 주목하십시오. 다음으로, 다음 함수를 정의합니다.

$$\mathsf{decode} : \prod_{(x:A+B)} \prod_{(c:\mathsf{code}(x))} (\mathsf{inl}(a_0) = x).$$

$\mathsf{decode}(x,c)$를 정의하기 위해, 먼저 $A+B$의 제거 원리를 사용하여 x가 $\mathsf{inl}(a)$ 꼴인지 $\mathsf{inr}(b)$ 꼴인지에 따라 경우를 나눌 수 있습니다.

$x \equiv \mathsf{inl}(a)$인 첫 번째 경우에는 $\mathsf{code}(x) \equiv (a_0 = a)$이므로 c는 a_0와 a 사이의 동일시입니다. 따라서 $\mathsf{ap}_{\mathsf{inl}}(c) : (\mathsf{inl}(a_0) = \mathsf{inl}(a))$이므로 이것을 $\mathsf{decode}(\mathsf{inl}(a), c)$로 정의할 수 있습니다.

$x \equiv \mathsf{inr}(b)$인 두 번째 경우에는 $\mathsf{code}(x) \equiv \mathbf{0}$이므로 c는 빈 타입의 원소입니다. 따라서 $\mathbf{0}$의 제거 규칙으로 $\mathsf{decode}(\mathsf{inr}(b), c)$의 값을 얻습니다.

이로써 decode 의 정의가 완성됩니다. 이제 모든 x에 대해 $\mathsf{encode}(x,-)$와 $\mathsf{decode}(x,-)$가 준역원임을 보입니다. 한편으로, $x : A+B$와 $p : \mathsf{inl}(a_0) = x$가 주어졌다고 합시다. 우리는 $\mathsf{decode}(x, \mathsf{encode}(x,p)) = p$.임을 보이고자 합니다. 그런데 이제 (기점) 경로 귀납법에 의해 $x \equiv \mathsf{inl}(a_0)$이고 $p \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{inl}(a_0)}$인 경우를 고려하는 것으로 충분합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{decode}(x, \mathsf{encode}(x,p)) &\equiv \mathsf{decode}(\mathsf{inl}(a_0), \mathsf{encode}(\mathsf{inl}(a_0), \mathsf{refl}_{\mathsf{inl}(a_0)})) \\
&\equiv \mathsf{decode}(\mathsf{inl}(a_0), \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{refl}_{\mathsf{inl}(a_0)}, \mathsf{refl}_{a_0})) \\
&\equiv \mathsf{decode}(\mathsf{inl}(a_0), \mathsf{refl}_{a_0}) \\
&\equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{inl}}(\mathsf{refl}_{a_0}) \\
&\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{inl}(a_0)} \\
&\equiv p.
\end{aligned}$$

다른 한편으로, $x : A+B$와 $c : \mathsf{code}(x)$가 주어졌다고 합시다. $\mathsf{encode}(x, \mathsf{decode}(x,c)) = c$임을 보이고자 합니다. 다시 x에 따라 경우를 나눌 수 있습니다. $x \equiv \mathsf{inl}(a)$이면 $c : a_0 = a$이고 $\mathsf{decode}(x,c) \equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{inl}}(c)$이므로 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{encode}(x, \mathsf{decode}(x,c)) &\equiv \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{ap}_{\mathsf{inl}}(c), \mathsf{refl}_{a_0}) \\
&= \mathsf{transport}^{a \mapsto (a_0 = a)}(c, \mathsf{refl}_{a_0}) && \text{(보조정리 2.3.10에 의해)} \\
&= \mathsf{refl}_{a_0} \cdot c && \text{(보조정리 2.11.2에 의해)} \\
&= c.
\end{aligned}$$

마지막으로, $x \equiv \mathsf{inr}(b)$이면 $c : \mathbf{0}$이므로 원하는 어떤 결론이든 내릴 수 있습니다. □

물론 $a_0 : A$ 대신 $b_0 : B$를 고정하면 이에 대응하는 정리가 성립합니다.

특히 정리 2.12.5로부터 임의의 $a : A$와 $b : B$에 대하여 다음 함수들이 존재함이 따라 나옵니다.

$$\mathsf{encode}(\mathsf{inl}(a), -) : (\mathsf{inl}(a_0) = \mathsf{inl}(a)) \to (a_0 = a)$$

그리고

$$\mathsf{encode}(\mathsf{inr}(b), -) : (\mathsf{inl}(a_0) = \mathsf{inr}(b)) \to \mathbf{0}.$$

이 중 두 번째는 "$\mathsf{inl}(a_0)$는 $\mathsf{inr}(b)$와 같지 않음", 즉 inl 과 inr 의 상이 서로소임을 말합니다. 동일성 타입을 명제로 보는 전통적인 해석에서 첫 번째는 단순히 inl의 단사성입니다. 정리 2.12.5의 완전한 호모토피적 진술은 더 많은 정보를 줍니다. 타입 $\mathsf{inl}(a_0) = \mathsf{inl}(a)$와 $a_0 = a$는 실제로 동치이며, $\mathsf{inr}(b_0) = \mathsf{inr}(b)$와 $b_0 = b$도 마찬가지입니다.

주 2.12.6. 특히 두 원소 타입 $\mathbf{2}$은 $\mathbf{1} + \mathbf{1}$과 동치이므로 $0_{\mathbf{2}} \neq 1_{\mathbf{2}}$가 성립합니다.

이 증명은 경로 공간을 기술하는 일반적인 방법을 보여 주며, 이 방법은 앞으로 자주 사용됩니다. 경로 공간을 특성화하기 위한 첫 단계는 경로를 더 명시적으로 기술하는 비교 올뭉치 "code"를 정의하는 것입니다. 이러한 비교 올뭉치가 경로와 동치임을 증명하는 방법은 여러 가지가 있습니다 (§8.1에서는 같은 결과를 몇 가지 서로 다른 방식으로 증명합니다). 여기서 사용한 방법은 **인코드-디코드 방법**이라고 합니다. 핵심 아이디어는 decode를 올뭉치의 모든 경우에 대하여 일반적으로(즉 함수 $\prod_{(x:A+B)} \mathsf{code}(x) \to (\mathsf{inl}(a_0) = x)$로서) 정의하여, 경로 귀납법으로 $\mathsf{decode}(x, \mathsf{encode}(x, p))$를 분석할 수 있게 하는 것입니다.

늘 그렇듯이, 쌍대곱 타입에서 수송의 작용도 특징지을 수 있습니다. 타입 X, 경로 $p : x_1 =_X x_2$, 그리고 타입 족 $A, B : X \to \mathcal{U}$이 주어지면 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{A+B}(p, \mathsf{inl}(a)) = \mathsf{inl}(\mathsf{transport}^{A}(p, a)),$$
$$\mathsf{transport}^{A+B}(p, \mathsf{inr}(b)) = \mathsf{inr}(\mathsf{transport}^{B}(p, b)),$$

여기서 늘 그렇듯이 위첨자의 $A + B$는 타입 족 $x \mapsto A(x) + B(x)$를 표기를 남용하여 나타낸 것입니다. 증명은 간단한 경로 귀납법입니다.

2.13 자연수

인코드-디코드 방법을 사용하여, 역시 양의 타입인 자연수의 경로 공간을 특징짓습니다. 이 경우에는 한쪽 끝점을 고정하는 대신 양쪽 경로 공간 전체를 한꺼번에 특징짓습니다. 따라서 동일성에 대한 코드는 다음과 같은 타입 족입니다.

$$\mathsf{code} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U},$$

이 타입족은 $\mathbb{N}$ 에 대한 이중 재귀로 다음과 같이 정의됩니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{code}(0, 0) &:\equiv \mathbf{1} \\
\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m), 0) &:\equiv \mathbf{0} \\
\mathsf{code}(0, \mathsf{succ}(n)) &:\equiv \mathbf{0} \\
\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n)) &:\equiv \mathsf{code}(m, n).
\end{aligned}$$

또한 재귀로 의존 함수 $r : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{code}(n,n)$을 다음과 같이 정의합니다.

$$r(0) :\equiv \star$$
$$r(\mathsf{succ}(n)) :\equiv r(n).$$

정리 2.13.1. 모든 $m,n:\mathbb{N}$에 대해 $(m=n) \simeq \mathsf{code}(m,n)$이 성립합니다.

증명. 다음을 정의합니다.

$$\mathsf{encode} : \prod_{m,n:\mathbb{N}} (m=n) \to \mathsf{code}(m,n)$$

이 함수는 수송을 이용하여 $\mathsf{encode}(m,n,p) :\equiv \mathsf{transport}^{\mathsf{code}(m,-)}(p, r(m))$로 정의합니다. (encode를 경로 귀납법으로 직접 정의할 수도 있지만, 수송을 이용해 정의하면 이후의 계산이 더 쉬워지는 경우가 많습니다.) 그리고 다음을 정의합니다.

$$\mathsf{decode} : \prod_{m,n:\mathbb{N}} \mathsf{code}(m,n) \to (m=n)$$

이 함수는 m,n에 대한 이중 귀납법으로 정의합니다. m과 n이 모두 0이면 함수 $\mathbf{1} \to (0=0)$이 필요하며, 이 함수는 모든 원소를 refl_0으로 보내도록 정의합니다. m이 후속자이고 n이 0이거나 그 반대인 경우에는 정의역 $\mathsf{code}(m,n)$이 $\mathbf{0}$이므로 $\mathbf{0}$의 제거자를 쓰면 됩니다. 그리고 둘 다 후속자인 경우에는 $\mathsf{decode}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n))$을 다음 합성으로 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n)) \equiv \mathsf{code}(m,n) \xrightarrow{\mathsf{decode}(m,n)} (m=n) \xrightarrow{\mathsf{ap}_{\mathsf{succ}}} (\mathsf{succ}(m)=\mathsf{succ}(n)).$$

다음으로 모든 m,n에 대해 $\mathsf{encode}(m,n)$과 $\mathsf{decode}(m,n)$이 준역원임을 보입니다.

먼저 $p : m=n$에서 시작하면, p에 대한 귀납법에 의해 다음을 보이면 충분합니다.

$$\mathsf{decode}(n,n,\mathsf{encode}(n,n,\mathsf{refl}_n)) = \mathsf{refl}_n.$$

그런데 $\mathsf{encode}(n,n,\mathsf{refl}_n) \equiv r(n)$이므로 $\mathsf{decode}(n,n,r(n)) = \mathsf{refl}_n$임을 보이면 충분합니다. 이는 n에 대한 귀납법으로 증명할 수 있습니다. $n \equiv 0$이면 decode의 정의에 의해 $\mathsf{decode}(0,0,r(0)) = \mathsf{refl}_0$입니다. 그리고 후속자인 경우에는 귀납 가설에 의해 $\mathsf{decode}(n,n,r(n)) = \mathsf{refl}_n$이므로 $\mathsf{ap}_{\mathsf{succ}}(\mathsf{refl}_n) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{succ}(n)}$임만 확인하면 충분합니다.

반대로 $c : \mathsf{code}(m,n)$에서 시작하면 m과 n에 대한 이중 귀납법으로 진행합니다. 둘 다 0이면 $\mathsf{decode}(0,0,c) \equiv \mathsf{refl}_0$이고, $\mathsf{encode}(0,0,\mathsf{refl}_0) \equiv r(0) \equiv \star$입니다. 따라서 $\mathbf{1}$의 모든 원소가 $\star$와 같다는 §2.8의 사실을 떠올리면 충분합니다. m이 0이고 n이 후속자이거나 그 반대이면 $c : \mathbf{0}$이므로 증명이 끝납니다. 그리고 둘 다 후속자인 경우에는 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n),\mathsf{decode}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n),c)) \\
&\qquad = \mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n),\mathsf{ap}_{\mathsf{succ}}(\mathsf{decode}(m,n,c))) \\
&\qquad = \mathsf{transport}^{\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),-)}(\mathsf{ap}_{\mathsf{succ}}(\mathsf{decode}(m,n,c)), r(\mathsf{succ}(m))) \\
&\qquad = \mathsf{transport}^{\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(-))}(\mathsf{decode}(m,n,c), r(\mathsf{succ}(m))) \\
&\qquad = \mathsf{transport}^{\mathsf{code}(m,-)}(\mathsf{decode}(m,n,c), r(m)) \\
&\qquad = \mathsf{encode}(m,n,\mathsf{decode}(m,n,c)) \\
&\qquad = c
\end{aligned}$$

여기서 귀납 가설을 사용했습니다. (사실 이 증명은 필요 이상으로 깁니다. 연습문제 3.24을 참조하십시오.) □

특히 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m), 0) : (\mathsf{succ}(m) = 0) \to \mathbf{0} \tag{2.13.2}$$

이는 "0은 어떤 자연수의 후속자도 아님"을 보여 줍니다. 또한 다음 합성도 있습니다.

$$(\mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)) \xrightarrow{\mathsf{encode}} \mathsf{code}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n)) \equiv \mathsf{code}(m, n) \xrightarrow{\mathsf{decode}} (m = n) \tag{2.13.3}$$

이는 함수 succ가 단사임을 보여 줍니다.

더 일반적인 양의 타입은 장 5 및 6에서 다룹니다. 제8장에서는 여기서 쌍대곱과 $\mathbb{N}$ 의 동일성 타입을 특징지을 때 쓴 기법으로 구면의 호모토피 군도 계산할 수 있음을 살펴봅니다.

2.14 예시: 구조의 동일성

이제 타입 위의 그루포이드 구조와 타입 형성자 사이의 상호작용을 보여 주는 예 하나를 살펴봅니다. 서론에서 우리는 유니밸런스의 장점 중 하나가 동형인 두 대상을 서로 바꿔 쓸 수 있다는 것, 즉 한쪽과 관련된 모든 성질이나 구성이 다른 쪽에도 적용된다는 것이라고 언급했습니다. 흔한 "표기 남용"이 형식적으로 참이 됩니다. 유니밸런스 자체는 동치인 타입들이 같으며 따라서 서로 바꿔 쓸 수 있다고 말하며, 여기에는 예컨대 동형인 집합들을 동일시하는 흔한 관행도 포함됩니다. 더욱이 다른 수학적 대상을 구조나 성질을 갖춘 집합, 또는 더 일반적으로 타입으로 정의할 때, 그 대상들에 대한 올바른 상등 개념을 유니밸런스로부터 유도할 수 있습니다. 이 점은 제9장에서 중요한 예를 통해 보일 것입니다. 그곳에서는 범주의 상등이 동치이고 함자의 상등이 자연 동형사상인 등의 방식으로 범주론의 기본 개념들을 정의합니다. 특히 §9.8을 참고하십시오. 이 절에서는 대수학에서 나온 매우 간단한 예를 설명합니다.

간단히 하기 위해 반군을 예시로 사용합니다. 반군은 결합적인 "곱셈" 연산을 갖춘 타입입니다. 같은 아이디어는 모노이드, 군, 환과 같은 다른 대수적 구조에도 적용됩니다. §§1.6 및 1.11에서 보았듯이, 어떤 종류의 수학적 구조를 정의한다는 것은 그러한 구조들의 타입을 특정한 반복 Σ-타입으로 정의한다는 뜻으로 해석해야 합니다. 반군의 경우에는 다음과 같습니다.

정의 2.14.1. 타입 A가 주어졌을 때, 바탕이 A인 **반군 구조** 의 타입 SemigroupStr(A)는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{SemigroupStr}(A) :\equiv \sum_{(m:A\to A\to A)} \prod_{(x,y,z:A)} m(x, m(y,z)) = m(m(x,y),z).$$

반군 은 타입과 그러한 구조를 함께 묶은 것입니다:

$$\mathsf{Semigroup} :\equiv \sum_{A:\mathcal{U}} \mathsf{SemigroupStr}(A)$$

다음 두 소절에서는 유니밸런스 덕분에 이러한 반군을 더 쉽게 다룰 수 있게 되는 두 가지 방식을 설명합니다.

2.14.1 동치 들어올리기

느슨하게 작업할 때에는, 집합 A와 B 사이의 전단사가 A 위의 반군 구조와 B 위의 반군 구조 사이의 동형사상을 "당연히" 유도한다고 말할 수도 있습니다. 유니밸런스가 있으면 이는 실제로 당연합니다. 타입 A와 B 사이의 동치가 주어지면 A 위의 반군 구조로부터 B 위의 반군 구조를 자동으로 유도할 수 있고, 나아가 이 유도가 반군 구조들의 동치임을 보일 수 있기 때문입니다. 그 이유는 SemigroupStr 이 타입족이므로, transport로 주어지는 수송을 통해 타입 사이의 경로에 대한 작용을 갖기 때문입니다:

$$\mathsf{transport}^{\mathsf{SemigroupStr}}(\mathsf{ua}(e)) : \mathsf{SemigroupStr}(A) \to \mathsf{SemigroupStr}(B).$$

게다가 $\mathsf{transport}^C(\alpha)$는 항상 $\mathsf{transport}^C(\alpha^{-1})$를 역으로 가지는 동치이므로, 이 사상은 동치입니다. 보조정리 2.1.4 및 2.3.9를 참고하십시오.

유니밸런스 공리는 이 사상이 존재함을 보장하지만, 이 사상이 실제로 무엇을 하는지 계산하려면 앞 절들에서 증명한 transport(수송)에 관한 사실들을 사용해야 합니다. (m, a)를 A 위의 반군 구조라 하고, 다음과 같이 주어지는 B 위의 유도된 반군 구조를 살펴봅시다.

$$\mathsf{transport}^{\mathsf{SemigroupStr}}(\mathsf{ua}(e), (m, a)).$$

먼저, SemigroupStr(X)는 Σ-타입으로 정의되므로 정리 2.7.4에 의해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{\mathsf{SemigroupStr}}(\mathsf{ua}(e), (m, a)) = (m', a')$$

여기서 m'은 다음으로 주어지는 B 위의 유도된 곱셈 연산이고

$$\begin{aligned} &m' : B \to B \to B \\ &m'(b_1, b_2) :\equiv \mathsf{transport}^{X \mapsto (X \to X \to X)}(\mathsf{ua}(e), m)(b_1, b_2) \end{aligned}$$

a'은 m'이 결합적이라는 유도된 증명입니다. 다시 정리 2.7.4에 의해 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned} &a' : \mathsf{Assoc}(B, m') \\ &a' :\equiv \mathsf{transport}^{(X,m) \mapsto \mathsf{Assoc}(X,m)}((\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{ua}(e), \mathsf{refl}_{m'})), a), \end{aligned} \tag{2.14.2}$$

여기서 $\mathsf{Assoc}(X, m)$은 타입 $\prod_{(x,y,z:X)} m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ 입니다. 함수 외연성에 의해, m'을 인자 $b_1, b_2 : B$에 적용했을 때의 동작을 살펴보는 것으로 충분합니다. (2.9.4)를 두 번 적용하면 $m'(b_1, b_2)$가 다음과 같음을 얻습니다.

$$\mathsf{transport}^{X \mapsto X}\big(\mathsf{ua}(e), m(\mathsf{transport}^{X \mapsto X}(\mathsf{ua}(e)^{-1}, b_1), \mathsf{transport}^{X \mapsto X}(\mathsf{ua}(e)^{-1}, b_2))\big).$$

그러면 ua가 $\mathsf{transport}^{X \mapsto X}$의 준역원이므로, 이는 다음과 같습니다.

$$e(m(e^{-1}(b_1), e^{-1}(b_2))).$$

따라서 B의 두 원소가 주어지면, 유도된 곱셈 m'은 예상한 그대로 동치 e를 사용하여 이들을 A로 보내고, A에서 곱한 다음, 그 결과를 e를 통해 다시 B로 가져옵니다.

또한 증명은 보이지 않겠지만, m'이 결합적이라는 유도된 증명((2.14.2) 참고)이 $b_1, b_2, b_3 : B$를 다음 단계들로 주어지는 경로로 보내는 함수와 같다는 것을 계산할 수 있습니다:

$$\begin{aligned} m'(m'(b_1,b_2),b_3) &= e(m(e^{-1}(m'(b_1,b_2)),e^{-1}(b_3))) \\ &= e(m(e^{-1}(e(m(e^{-1}(b_1),e^{-1}(b_2)))),e^{-1}(b_3))) \\ &= e(m(m(e^{-1}(b_1),e^{-1}(b_2)),e^{-1}(b_3))) \\ &= e(m(e^{-1}(b_1),m(e^{-1}(b_2),e^{-1}(b_3)))) \\ &= e(m(e^{-1}(b_1),e^{-1}(e(m(e^{-1}(b_2),e^{-1}(b_3)))))) \\ &= e(m(e^{-1}(b_1),e^{-1}(m'(b_2,b_3)))) \\ &= m'(b_1,m'(b_2,b_3)). \end{aligned} \tag{2.14.3}$$

이 단계들은 m이 결합적이라는 증명 a와 e에 대한 역 법칙을 사용합니다. 대수학의 관점에서는 연산이 결합적이라는 증명의 동일성을 살펴보는 것이 이상하게 보일 수 있지만, A와 B를 경로 사이에 자명하지 않은 호모토피가 있는 일반적인 공간으로 생각하면 이는 타당합니다. 제3장에서는 자명한 호모토피만을 가지는 타입인 집합의 개념을 도입할 것이며, 집합 위의 반군 구조를 고려하면 그러한 결합성 증명은 어느 두 개든 자동으로 같아집니다.

2.14.2 반군의 동일성

앞 절들에서 논의한 경로 공간에 대한 등식들을 사용하여 두 반군이 언제 같은지 살펴볼 수 있습니다. 반군 (A,m,a)와 (B,m',a')가 주어지면, 정리 2.7.2에 의해 경로의 타입 $(A,m,a) =_{\mathsf{Semigroup}} (B,m',a')$은 다음 쌍들의 타입과 같습니다.

$$\begin{aligned} &p_1 : A =_{\mathcal{U}} B \qquad \text{그리고} \\ &p_2 : \mathsf{transport}^{\mathsf{SemigroupStr}}(p_1,(m,a)) = (m',a'). \end{aligned}$$

유니밸런스에 의해 p_1은 어떤 동치 e에 대한 $\mathsf{ua}(e)$입니다. 정리 2.7.2, 함수 외연성, 그리고 위에서 수행한 타입 족 $\mathsf{SemigroupStr}$에서의 수송에 대한 분석에 의해, p_2는 증명들의 쌍과 동치이며, 그중 첫 번째는 다음을 보입니다.

$$\prod_{y_1,y_2:B} e(m(e^{-1}(y_1),e^{-1}(y_2))) = m'(y_1,y_2) \tag{2.14.4}$$

두 번째 증명은 a'이 (2.14.3)에서 a로부터 구성한 유도된 결합성 증명과 같음을 보입니다. 그런데 역원의 소거에 의해 (2.14.4)는 다음과 동치입니다.

$$\prod_{x_1,x_2:A} e(m(x_1,x_2)) = m'(e(x_1),e(x_2)).$$

이는 e가 A에서의 곱셈(즉, m)을 B에서의 곱셈(즉, m')으로 옮긴다는 의미에서 e가 이항 연산과 가환함을 말해 줍니다. a와 a'을 연결하는 등식에 대해서도 비슷한 재배열이 가능합니다. 따라서 반군의 동일성은 정확히 반군 구조와 가환하는, 바탕 타입 사이의 동치로 이루어집니다.

일반적인 타입에서는 결합성의 증명을 반군 구조의 일부로 간주합니다. 그러나 집합과 같은 타입으로 제한하면(역시 제3장를 참고하십시오), a와 a'을 연결하는 등식은 자명하게 참입니다. 게다가

이 경우 집합 사이의 동치는 정확히 전단사입니다. 따라서 우리는 반군 동형사상의 표준적인 정의에 도달했습니다: 곱셈 연산을 보존하는 바탕 집합 사이의 전단사입니다. 또한 반군 준동형사상을 곱셈을 보존하는 사상으로 정의하여 동형사상의 범주론적 정의를 사용할 수도 있으며, 그러면 반군의 동일성이 서로 역인 두 준동형사상과 같다는 결론에 도달합니다. 다만 여기서는 자세한 내용을 보이지 않겠습니다. §9.8를 참고하십시오.

결론적으로, 유니벌런스 덕분에 반군들은 대수적 구조로서 동형일 때 정확히 같습니다. §9.8에서 보겠지만, 이 결론은 더 일반적으로 적용됩니다. 호모토피 타입 이론에서는 수학적 구조에 대한 모든 구성이 번거로운 증명이나 표기법의 남용 없이 자동으로 동형사상을 존중합니다.

2.15 보편 성질

앞 절들에서 설명한 경로 계산 규칙들을 결합하면, 다양한 타입 형성 연산이 호모토피적인 방식으로 동치로 해석되는, 기대되는 보편 성질을 만족함을 보일 수 있습니다. 예를 들어, 타입 X, A, B가 주어지면 다음 함수가 있습니다.

$$(X \to A \times B) \to (X \to A) \times (X \to B) \tag{2.15.1}$$

이 함수는 $f \mapsto (\mathsf{pr}_1 \circ f, \mathsf{pr}_2 \circ f)$로 정의됩니다.

정리 2.15.2. (2.15.1)은 동치입니다.

증명. 준역원은 (g, h)를 $\lambda x.\, (g(x), h(x))$로 보내는 것으로 정의합니다. (엄밀히 말하면, 쌍의 경우로 환원하기 위해 데카르트 곱 $(X \to A) \times (X \to B)$에 대한 귀납 원리를 사용하였습니다. 앞으로는 이 원리를 명시적으로 언급하지 않고 자주 적용할 것입니다.)

이제 $f : X \to A \times B$가 주어지면, 왕복 합성으로 다음 함수를 얻습니다.

$$\lambda x.\, (\mathsf{pr}_1(f(x)), \mathsf{pr}_2(f(x))). \tag{2.15.3}$$

정리 2.6.2에 의해, 임의의 $x : X$에 대하여 $(\mathsf{pr}_1(f(x)), \mathsf{pr}_2(f(x))) = f(x)$가 성립합니다. 따라서 함수 외연성에 의해 함수 (2.15.3)은 f와 같습니다.

한편, (g, h)가 주어지면 왕복 합성으로 쌍 $(\lambda x.\, g(x), \lambda x.\, h(x))$를 얻습니다. 함수에 대한 유일성 원리에 의해, 이는 (g, h)와 (판단적으로) 같습니다. □

사실 이 보편 성질에는 의존 타입 버전도 있습니다. 타입 X와 타입 족 $A, B : X \to \mathcal{U}$가 주어졌다고 합시다. 그러면 다음 함수가 존재합니다.

$$\left(\prod_{x:X} (A(x) \times B(x))\right) \to \left(\prod_{x:X} A(x)\right) \times \left(\prod_{x:X} B(x)\right) \tag{2.15.4}$$

이 함수는 앞에서와 같이 $f \mapsto (\mathsf{pr}_1 \circ f, \mathsf{pr}_2 \circ f)$로 정의됩니다.

정리 2.15.5. (2.15.4)은 동치입니다.

증명. 독자에게 남겨 둡니다. □

Σ-타입이 데카르트 곱의 일반화인 것과 마찬가지로, Σ-타입은 이 보편 성질의 일반화된 버전을 만족합니다. 곧바로 의존 타입 버전으로 넘어가서, 타입 X와 타입 족 $A : X \to \mathcal{U}$ 및 $P : \prod_{(x:X)} A(x) \to \mathcal{U}$가 있다고 합시다. 그러면 다음 함수가 존재합니다.

$$\Big(\prod_{x:X} \sum_{(a:A(x))} P(x,a)\Big) \to \Big(\sum_{(g:\prod_{(x:X)} A(x))} \prod_{(x:X)} P(x,g(x))\Big). \tag{2.15.6}$$

어떤 $B : X \to \mathcal{U}$에 대하여 $P(x,a) :\equiv B(x)$이면, (2.15.6)은 (2.15.4)으로 환원된다는 점에 유의하십시오.

정리 2.15.7. (2.15.6)은 동치입니다.

증명. 앞에서와 같이, (g,h)를 함수 $\lambda x.(g(x),h(x))$로 보내는 준역원을 정의합니다. 이제 $f : \prod_{(x:X)} \sum_{(a:A(x))} P(x,a)$가 주어지면, 왕복 합성은 다음 함수를 줍니다.

$$\lambda x.(\mathsf{pr}_1(f(x)), \mathsf{pr}_2(f(x))). \tag{2.15.8}$$

이제 임의의 $x : X$에 대하여, 따름정리 2.7.3(Σ-타입에 대한 유일성 원리)에 의해 다음이 성립합니다.

$$(\mathsf{pr}_1(f(x)), \mathsf{pr}_2(f(x))) = f(x).$$

따라서 함수 외연성에 의해, (2.15.8)은 f와 같습니다. 한편, (g,h)가 주어지면 왕복 합성으로 $(\lambda x.g(x), \lambda x.h(x))$를 얻으며, 이는 앞에서와 같이 (g,h)와 판단적으로 같습니다. □

이것이 주목할 만한 이유는 (2.15.6)을 명제-타입 대응으로 해석하면 "선택 공리"가 되기 때문입니다. Σ를 "존재함"으로, Π를 (경우에 따라) "모든 에 대하여"로 읽으면, 다음과 같이 읽을 수 있습니다.

- $\prod_{(x:X)} \sum_{(a:A(x))} P(x,a)$는 "모든 $x : X$에 대하여 $P(x,a)$를 만족하는 $a : A(x)$가 존재함"으로 읽고,
- $\sum_{(g:\prod_{(x:X)} A(x))} \prod_{(x:X)} P(x,g(x))$는 "모든 $x : X$에 대하여 $P(x,g(x))$가 성립하도록 하는 선택 함수 $g : \prod_{(x:X)} A(x)$가 존재함"으로 읽을 수 있습니다.

따라서 정리 2.15.7은 선택 공리가 "참"일 뿐만 아니라, 그 전제가 실제로 그 결론과 동치임을 말해 줍니다. (한편, 고전 수학자는 (2.15.6)이 선택 공리의 통상적인 의미를 담고 있지 않다고 여길 수도 있습니다. g의 값을 이미 지정하였으므로 더 이상 해야 할 선택이 남아 있지 않기 때문입니다. 이 점은 §3.8에서 다시 다루겠습니다.)

위의 쌍 타입에 대한 보편 성질은 "안으로 들어가는 사상"에 대한 것으로, 범주론의 곱 개념에서 익숙한 것입니다. 그러나 쌍 타입에는 "밖으로 나가는 사상"에 대한 보편 성질도 있으며, 이는 덜 익숙해 보일 수 있습니다. 데카르트 곱의 경우, 비의존 버전은 단순히 데카르트 닫힘 수반을 표현합니다.

$$\big((A \times B) \to C\big) \;\simeq\; \big(A \to (B \to C)\big).$$

이것의 의존 버전은 타입 족 $C : A \times B \to \mathcal{U}$에 대하여 다음과 같이 정식화됩니다.

$$\Big(\prod_{w:A\times B} C(w)\Big) \;\simeq\; \Big(\prod_{(x:A)} \prod_{(y:B)} C(x,y)\Big).$$

여기서 오른쪽에서 왼쪽으로의 함수는 단순히 $A \times B$에 대한 귀납 원리이고, 왼쪽에서 오른쪽으로의 함수는 쌍에서의 값 계산입니다. 이들이 준역원임을 증명하는 것은 독자에게 맡깁니다. Σ-타입에 대한 버전도 있습니다.

$$\Big(\prod_{w:\sum_{(x:A)} B(x)} C(w)\Big) \simeq \Big(\prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} C(x,y)\Big). \tag{2.15.9}$$

여기서도 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 함수는 귀납 원리입니다.

다른 몇몇 귀납 원리도 이러한 종류의 보편 성질의 일부입니다. 예를 들어, 경로 귀납법은 다음과 같은 동치의 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 방향입니다.

$$\Big(\prod_{(x:A)} \prod_{(p:a=x)} B(x,p)\Big) \simeq B(a, \mathsf{refl}_a) \tag{2.15.10}$$

이는 임의의 $a : A$와 타입 족 $B : \prod_{(x:A)}(a = x) \to \mathcal{U}$에 대해 성립합니다. 그러나 자연수처럼 재귀를 포함하는 귀납적 타입은 더 복잡한 보편 성질을 가집니다. 제5장을 참고하십시오.

정리 2.15.2는 (적절한 호모토피 이론적 의미에서) 데카르트 곱의 통상적인 보편 성질을 표현하므로, 범주론에 관심이 있는 독자라면 타입의 다른 극한과 쌍대극한에 대해서도 궁금해할 법합니다. 연습문제 2.9에서는 쌍대곱 타입 $A + B$ 역시 예상되는 보편 성질을 가짐을 독자가 보이도록 요청하며, $\mathbf{1}$(끝 대상)과 $\mathbf{0}$(시작 대상)라는 영항(nullary) 경우는 쉽습니다.

당김(pullback)에 대해서는 예상되는 명시적 구성이 그대로 작동합니다. $f : A \to C$와 $g : B \to C$가 주어졌을 때, 다음과 같이 정의합니다.

$$A \times_C B :\equiv \sum_{(a:A)} \sum_{(b:B)} (f(a) = g(b)). \tag{2.15.11}$$

연습문제 2.11에서는 독자가 이를 확인하도록 요청합니다. 더 일반적인 호모토피 극한 중 일부도 비슷한 방식으로 구성할 수 있지만, 쌍대극한에는 새로운 요소가 필요합니다. 제6장를 참고하십시오.

주

동일성 타입의 정의와 그 귀납 원리는 Martin-Löf [ML75]에 의한 것입니다. 제1장의 주석에서 언급했듯이, 이 책의 동일성 타입은 외연적 타입 이론이 아니라 내포적 타입 이론에 속하는 것입니다. 일반적으로 동등성 개념이 대상을 각각의 구체적인 정의에 따라 구별하면 "내포적"이라고 하고, 같은 "외연" 또는 "관찰 가능한 동작"을 가진 대상들을 구별하지 않으면 "외연적"이라고 합니다. Frege의 용어로 말하면, 내포적 동등성은 뜻을 비교하는 반면 외연적 동등성은 지시체만을 비교합니다. 또한 어떤 동등성이 다른 동등성보다 "더" 또는 "덜" 외연적이라고 말할 수도 있는데, 이는 각각 그 동등성이 대상의 내포적 측면을 더 적게 또는 더 많이 고려한다는 뜻입니다.

내포적 타입 이론이 그렇게 불리는 이유는 그 판단적 동등성 $x \equiv y$가 매우 내포적인 동등성이기 때문입니다. 이는 본질적으로, 함수의 정의 등식들을 전개한 뒤에 x와 y가 "같은 정의를 가진다"는 것을 말합니다. 이와 대조적으로 명제적 동등성 타입 $x = y$는 제1장의 공리 없는 내포적 타입 이론에서조차 더 외연적입니다. 예를 들어 모든 $m, n : \mathbb{N}$에 대해 $n + m = m + n$임을 귀납법으로 증명할 수 있지만, 덧셈의 정의가 그 인자들을 비대칭적으로 다루기 때문에 모든 $m, n : \mathbb{N}$에 대해 $n + m \equiv m + n$이라고 말할 수는 없습니다. 함수 외연성(두 함수가 어떻게 정의되었는지와 무관하게 모든 입력에서 같은 동작을 보이면 두 함수는 같다는 원리)과 유니밸런스(유니버스에 대한 외연성

성질로 볼 수 있으며, 두 타입이 모든 맥락에서 같은 동작을 보이면 두 타입은 같다는 원리) 같은 공리를 추가하면 내포적 타입 이론의 동일성 타입을 한층 더 외연적으로 만들 수 있습니다. 함수 외연성 공리와, 단순 명제라는 특수한 경우에 대한 유니밸런스("명제 외연성")는 이미 Russell과 Church의 최초의 타입 이론들에 등장했습니다.

앞서 언급했듯이, 외연적 타입 이론에는 $p : x = y$이면 실제로 $x \equiv y$라는 "반영 규칙"도 포함됩니다. 따라서 외연적 타입 이론이 그렇게 불리는 이유는 순수하게 내포적인 동등성을 전혀 허용하지 않기 때문입니다. 반영 규칙은 판단적 동등성이 더 외연적인 동일성 타입과 일치하도록 강제합니다. 게다가 반영 규칙으로부터 (적어도 함수에 대한 판단적 유일성 원리가 있는 경우) 함수 외연성을 연역할 수 있습니다. 그러나 반영 규칙은 모든 고차 그루포이드 구조가 붕괴한다는 것도 함의하며 (연습문제 2.14을 참고하십시오), 따라서 유니밸런스 공리와 양립할 수 없습니다(예 3.1.9을 참고하십시오). 그러므로 유니밸런스를 외연성 성질로 간주한다면, 내포적 타입 이론은 외연적 타입 이론보다 "더 외연적인" 동일성 타입을 허용한다고 말할 수 있습니다.

등식에 대한 대칭성(역)과 추이성(이어붙이기)의 증명은 타입 이론에서 잘 알려져 있습니다. 이들이 각 타입을 (호모토피를 무시하면) 1-그루포이드로 만든다는 사실은 [HS98]에서 타입 이론에 대한 최초의 "호모토피" 방식 의미론을 제시하는 데 활용되었습니다.

동일성 타입을 경로 공간으로, 타입 족을 올뭉치로 보는 실제 호모토피적 해석은 Quillen 모형 범주의 형식 체계를 사용한 [AW09]에 의한 것입니다. (엄격한) ∞-그루포이드에서의 해석도 학위 논문 [War08]에서 제시되었습니다. 타입 이론에서 ∞-그루포이드의 모든 고차 연산과 정합성을 구성하는 방법은 [Lum10]와 [vdBG11]을 참고하십시오.

$\mathsf{transport}^P(p, -)$와 ap_f 같은 연산들과 동치에 대한 좋은 개념 하나는 Voevodsky가 증명 보조기 Coq 를 사용하여 타입 이론에서 처음으로 폭넓게 연구했습니다. 그 후 동치에 대한 서로 동치인 여러 다른 정의들이 발견되었으며, 이들은 제4장에서 비교합니다.

§2.5에서 설명한 동일성 타입, 수송 등의 "계산적" 해석은 [LH12]에서 강조되었습니다. 이들은 또한 이러한 규칙들이 판단적 동등성이 되는 "1-절단된" 타입 이론(제7장을 참고하십시오)을 기술했습니다. 이를 절단되지 않은 완전한 이론으로 확장할 수 있는지는 현재 연구 주제입니다.

"두 함수가 점별로 같으면 두 함수는 같다"라고 말하는 소박한 형태의 함수 외연성은 타입 이론에서 흔한 공리이며, 그 기원은 [WR27]까지 거슬러 올라갑니다. 더 강한 몇몇 형태의 함수 외연성은 [Gar09]에서 고려되었습니다. 이 책에서 사용한 형태는 함수 타입의 동일성 타입을 동치 수준에서 규명하는 것으로, Voevodsky가 처음 연구했으며, 그는 이것이 소박한 형태로부터 (그리고 유니밸런스로부터; §4.9를 참고하십시오) 함의된다는 것도 증명했습니다.

유니밸런스 공리 역시 Voevodsky에 의한 것입니다. 이 공리는 원래 단체 집합 모형에서의 의미론적 고찰에서 동기를 얻었습니다. [KLV12]을 참고하십시오. 그루포이드 모형에서 동기를 얻은 비슷한 공리가 Hofmann과 Streicher [HS98]에 의해 "유니버스 외연성"이라는 이름으로 제안되었습니다. 이 공리는 좋은 "동치" 개념 대신 준역원 (2.4.5)을 사용했으며, 따라서 1-타입들의 유니버스에 대해서만 올바르고 유니밸런스와 동치입니다(정의 3.1.7을 참고하십시오).

이 책에서 사용하는 타입 이론에서는 함수 외연성과 유니밸런스를 공리로, 즉 어떤 타입에 속한다고 단언되지만 그 타입의 규칙에 따라 구성되지는 않은 원소로 가정해야 합니다. 이는 쓸 만하지만 몇 가지 단점이 있습니다. 예를 들어, 공리를 단언하는 대신 전적으로 규칙에 기반할 수 있다면 타입 이론은 형식적으로 더 잘 작동합니다. 또한 §§2.6–2.13의 정리들이 명제적 등식(경로)이나 동치일 뿐이라는 점은 때때로 불편한데, 그러면 이들을 오갈 때마다 명시적으로 언급해야 하기 때문입니다. 호모토피 타입 이론에서 현재 진행 중인 연구의 한 방향은 이러한 규칙들이 판단적 등식이 되는 타입 체계를 기술하여 이 두 문제를 한꺼번에 해결하는 것입니다. 지금까지는 몇몇 단순한 경우에만 이루어졌지만, [LH12]와 같은 예비 결과들은 유망합니다. 충분히 강력한 "고차 묶" 또는 "고차 귀납-재귀적

타입" 개념을 갖추는 것과 같이, 유니밸런스와 함수 외연성을 타입 이론에 도입하는 다른 잠재적인 방법들도 있습니다.

§§2.12–2.13의 "inl과 inr은 단사이며 서로소이다"와 같은 단순한 결론들은 타입 이론에서 잘 알려져 있으며, 함수 encode 를 구성하는 것이 이를 증명하는 통상적인 방법입니다. 우리가 기술한 더 정교한 접근 방식은 양의 타입의 동일성 타입 전체를 (동치를 무시하면) 특징짓는 것으로, 비교적 최근에 발전한 것입니다. 예를 들어 [LS13]을 참고하십시오.

타입 이론적 선택 공리 (2.15.6)는 명제-타입 대응에 관한 William Howard의 원 논문 [How80]에서 이미 주목되었으며, Martin-Löf가 자신의 의존 타입 이론을 도입하면서 더 연구했습니다. 이는 Bourbaki의 집합론 [Bou68]에서 "분배 법칙"으로 언급됩니다.

호모토피 타입 이론에서의 당김과 더 일반적인 호모토피 극한에 대한 보다 포괄적인 (그리고 형식화된) 논의는 [AKL13]을 참고하십시오. 유향 그래프 위의 도식의 극한은 형식화하기 가장 쉬운 일반적인 종류의 극한입니다. 범주(또는 더 일반적으로 $(\infty,1)$-범주) 위의 도식의 문제점은, 일반적으로 (호모토피 정합적) 도식이라는 개념에 무한히 많은 정합성 조건이 관련된다는 것입니다. 이 문제를 해결하는 것은 호모토피 타입 이론의 중요한 미해결 문제입니다.

연습문제

연습문제 2.1. 보조정리 2.1.2의 세 가지 자명한 증명이 쌍마다 서로 같음을 보이십시오.

연습문제 2.2. 이전 연습문제에서 구성한 증명들 사이의 세 등식이 가환 삼각형을 이룸을 보이십시오. 다시 말해, 이어붙이기의 세 가지 정의를 $(p \mathbin{\cdot_1} q)$, $(p \mathbin{\cdot_2} q)$, $(p \mathbin{\cdot_3} q)$로 나타내면, 이어붙인 등식

$$(p \mathbin{\cdot_1} q) = (p \mathbin{\cdot_2} q) = (p \mathbin{\cdot_3} q)$$

이 동등성 $(p \mathbin{\cdot_1} q) = (p \mathbin{\cdot_3} q)$와 같음을 보이십시오.

연습문제 2.3. 보조정리 2.1.2의 서로 다른 네 번째 증명을 제시하고, 그것이 다른 증명들과 같음을 증명하십시오.

연습문제 2.4. 타입 A에서의 n**차원 경로**라는 일반적인 개념을, 그러한 경로의 경계들의 타입과 동시에, n에 대한 귀납법으로 정의하십시오.

연습문제 2.5. 함수 (2.3.6)와 (2.3.7)가 서로 역인 동치임을 증명하십시오.

연습문제 2.6. $p : x = y$이면 함수 $(p \mathbin{\cdot} -) : (y = z) \to (x = z)$가 동치임을 증명하십시오.

연습문제 2.7. 정리 2.6.5를 데카르트 곱에서 Σ-타입으로 일반화한 명제를 서술하고 증명하십시오.

연습문제 2.8. 쌍대곱에 대해 정리 2.6.5에 대응하는 명제를 서술하고 증명하십시오.

연습문제 2.9. 쌍대곱이 기대되는 보편 성질을 가짐을 증명하십시오.

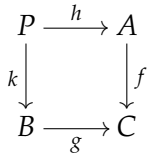
$$(A + B \to X) \simeq (A \to X) \times (B \to X).$$

이를 의존 함수를 포함하는 동치로 일반화할 수 있습니까?

연습문제 2.10. 임의의 $A : \mathcal{U}$와 족 $B : A \to \mathcal{U}$ 및 $C : (\sum_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U}$에 대해 다음이 성립한다는 의미에서 Σ-타입이 "결합적"임을 증명하십시오.

$$\Big(\sum_{(x:A)} \sum_{(y:B(x))} C((x,y))\Big) \simeq \Big(\sum_{p:\sum_{(x:A)} B(x)} C(p)\Big).$$

연습문제 2.11. (호모토피) **가환 사각형**은

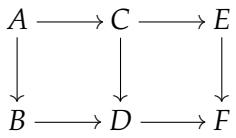


그림과 같은 함수 f, g, h, k와 경로 $f \circ h = g \circ k$로 이루어집니다. 이것은 정확히 (2.15.11)에서 정의한 당김 $(P \to A) \times_{P \to C} (P \to B)$의 원소라는 점에 유의하십시오. 가환 사각형이 (호모토피) **당김 사각형**이라는 것은 임의의 X에 대해 다음 유도된 사상이

$$(X \to P) \to (X \to A) \times_{(X \to C)} (X \to B)$$

동치라는 뜻입니다. (2.15.11)에서 정의한 당김 $P :\equiv A \times_C B$가 어떤 당김 사각형의 꼭짓점임을 증명하십시오.

연습문제 2.12. 다음과 같은 두 가환 사각형이 주어졌다고 하고,



오른쪽 사각형이 당김 사각형이라고 가정하십시오. 왼쪽 사각형이 당김 사각형일 필요충분조건은 바깥쪽 직사각형이 당김 사각형인 것임을 증명하십시오.

연습문제 2.13. $(\mathbf{2} \simeq \mathbf{2}) \simeq \mathbf{2}$임을 보이십시오.

연습문제 2.14. 원소 $p : x = y$가 존재하면 실제로 $x \equiv y$라는 등식 반영 규칙을 타입 이론에 추가한다고 가정하십시오. 임의의 $p : x = x$에 대해 $p \equiv \mathsf{refl}_x$임을 증명하십시오. (이는 모든 타입이 §3.1에서 도입할 의미의 집합임을 함의합니다. §7.2를 참조하십시오.)

연습문제 2.15. 보조정리 2.10.5를 다음과 같이 강화할 수 있음을 보이십시오.

$$\mathsf{transport}^B(p, -) =_{B(x) \to B(y)} \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{ap}_B(p))$$

단, 함수 외연성은 사용하지 마십시오. (이 경우와 그 밖의 유사한 경우에서는 가독성과 일관성을 위해 겉보기에 더 약한 정식화를 택했습니다.)

연습문제 2.16. 함수 외연성(공리 2.9.3) 대신 다음과 같은 원소의 존재만을 가정한다고 합시다.

$$\mathsf{funext} : \prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(B:A \to \mathcal{U})} \prod_{(f,g:\prod_{(x:A)} B(x))} (f \sim g) \to (f = g)$$

(여기서 happly와의 관계는 전혀 가정하지 않습니다.) 사실 이것만으로도 함수 외연성 공리 전체(즉, happly가 동치라는 것)가 함의됨을 증명하십시오. 이는 Voevodsky의 결과입니다. 그 증명은 까다로우며 이후 장에서 다룰 개념이 필요할 수 있습니다.

연습문제 2.17.

(i) $A \simeq A'$이고 $B \simeq B'$이면 $(A \times B) \simeq (A' \times B')$임을 보이십시오.

(ii) 이 사실에 대해 유니벌런스를 사용하는 증명과 사용하지 않는 증명을 하나씩 제시하고, 두 증명이 같음을 보이십시오.

(iii) 다른 타입 형성자 Σ, $\to$, Π, $+$에 대해서도 유사한 결과를 정식화하고 증명하십시오.

연습문제 2.18. 의존 함수에 대한 보조정리 2.4.3의 한 형태를 서술하고 증명하십시오.

연습문제 2.19. 앞에서 $0_{\mathbf{2}} \neq 1_{\mathbf{2}}$임을 보았습니다(주 2.12.6). 그럼에도 불구하고 $(\mathbf{2}, 0_{\mathbf{2}}) =_{\sum_{(A:\mathcal{U})} A} (\mathbf{2}, 1_{\mathbf{2}})$임을 보이십시오(주 2.7.1 참조).

제3장

집합과 논리

타입 이론은 형식적이든 비형식적이든 타입과 그 원소를 다루는 규칙들의 모음입니다. 그러나 자연어로 수학을 비형식적으로 서술할 때는 대개 익숙한 단어들을 사용합니다. 특히 "그리고"와 "또는" 같은 논리 연결사와 "모든 …에 대하여"와 "…이 존재하는" 같은 논리 양화사를 사용합니다. 집합론과 달리, 타입 이론에서는 이러한 영어 표현을 타입에 대한 연산으로 보는 방법이 둘 이상 있습니다. 이러한 잠재적 모호성은 국소적 또는 전역적 규약을 정하거나, 비형식적 수학에 새로운 표기를 도입하거나, 이 두 가지를 모두 함으로써 해소해야 합니다. 여기에는 어느 정도 익숙해지는 과정이 필요하지만, 타입 이론에서는 논리를 이처럼 더 세밀하게 분석할 수 있으므로 집합론적 기초에서보다 "언어의 남용"을 줄이면서 수학을 더 충실하게 표현할 수 있다는 점이 이를 상쇄합니다. 이 장에서는 관련된 쟁점들을 설명하고 우리가 내린 선택의 근거를 제시합니다.

3.1 집합과 n-타입

타입 이론의 논리와 집합론의 논리 사이의 관계를 설명하려면 타입 이론 안에 집합이라는 개념이 있으면 도움이 됩니다. 일반적으로 타입은 공간이나 고차 그루포이드처럼 행동하지만, 그중에는 전통적인 집합론 체계의 집합에 더 가깝게 행동하는 부분 클래스가 있습니다. 범주론적으로는 대상들의 집합으로 결정되고 고차 사상으로는 항등 사상만을 가지는 이산 그루포이드를 생각할 수 있으며, 위상수학적으로는 이산 위상을 가진 공간을 생각할 수 있습니다. 더 일반적으로는 이러한 것들과 동치인 그루포이드나 공간을 생각할 수 있습니다. 타입 이론에서 우리가 하는 모든 일은 호모토피를 무시한 수준에서 이루어지므로, 그 차이를 구별할 수 있으리라고 기대할 수는 없습니다.

직관적으로, 어떤 타입에 고차 호모토피 정보가 없다면 그 타입이 이러한 의미에서 "집합"이라고 기대할 것입니다. 즉, 평행한 임의의 두 경로는 (호모토피를 무시하면) 서로 같고, 모든 차원의 평행한 고차 경로에 대해서도 마찬가지입니다. 다행히 호모토피 타입 이론에서는 모든 것이 자동으로 함자적/연속적이므로, 가장 낮은 단계에서만 이를 요구해도 충분하다는 것이 밝혀집니다.

정의 3.1.1. 모든 $x, y : A$와 모든 $p, q : x = y$에 대해 $p = q$가 성립하면 타입 A를 **집합**이라고 합니다.

더 정확히 말하면, 명제 $\mathsf{isSet}(A)$는 다음 타입으로 정의됩니다.

$$\mathsf{isSet}(A) :\equiv \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p,q:x=y)} (p = q).$$

§1.1에서 언급했듯이, 호모토피 타입 이론의 집합은 전역적인 "소속 술어" $\in$이 없다는 점에서 ZF 집합론의 집합과 다릅니다. 이들은 오히려 구조적 수학과 범주론에서 사용하는 집합에 더 가깝습니다. 그러한 집합의 원소는 "추상적인 점"이며, 우리는 함수와 관계를 통해 이 점들에 구조를 부여합니다. 대부분의 집합 기반 수학에서 이들을 기초 체계로 사용하는 데에는 이것으로 충분합니다. 제10장에서 몇 가지 예를 살펴보겠습니다.

어떤 타입이 집합입니까? 제7장에서 이 질문의 더 일반적인 형태를 깊이 연구하겠지만, 지금은 몇 가지 쉬운 예를 살펴볼 수 있습니다.

예 3.1.2. 타입 $\mathbf{1}$ 은 집합입니다. 정리 2.8.1에 의해 임의의 $x, y : \mathbf{1}$에 대해 타입 $(x = y)$는 $\mathbf{1}$ 과 동치이기 때문입니다. $\mathbf{1}$ 의 임의의 두 원소는 서로 같으므로, 이는 $x = y$의 임의의 두 원소가 서로 같음을 뜻합니다.

예 3.1.3. 타입 $\mathbf{0}$는 집합입니다. 임의의 $x, y : \mathbf{0}$가 주어지면 $\mathbf{0}$의 귀납 원리에 의해 원하는 무엇이든 연역할 수 있기 때문입니다.

예 3.1.4. 자연수의 타입 $\mathbb{N}$ 도 집합입니다. 이는 정리 2.13.1에서 따라 나옵니다. 모든 동일성 타입 $x =_{\mathbb{N}} y$는 $\mathbf{1}$ 또는 $\mathbf{0}$ 와 동치이고, $\mathbf{1}$ 또는 $\mathbf{0}$ 에 속하는 임의의 두 원소는 서로 같기 때문입니다. 제7장에서 이 사실의 또 다른 증명을 살펴보겠습니다.

지금까지 살펴본 타입 형성 연산 대부분도 집합을 보존합니다.

예 3.1.5. A와 B가 집합이면 $A \times B$도 집합입니다. $x, y : A \times B$와 $p, q : x = y$가 주어지면 정리 2.6.2에 의해 $p = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p))$와 $q = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(q), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(q))$가 성립하기 때문입니다. 그런데 A가 집합이므로 $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p) = \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(q)$이고, B가 집합이므로 $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p) = \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(q)$ 입니다. 따라서 $p = q$ 입니다.

마찬가지로, A가 집합이고 $B : A \to \mathcal{U}$에 대해 각 $B(x)$가 집합이면 $\sum_{(x:A)} B(x)$는 집합입니다.

예 3.1.6. A가 임의의 타입이고 $B : A \to \mathcal{U}$에 대해 각 $B(x)$가 집합이면 타입 $\prod_{(x:A)} B(x)$는 집합입니다. 이를 보이기 위해 $f, g : \prod_{(x:A)} B(x)$와 $p, q : f = g$를 가정합시다. 함수 외연성에 의해 다음이 성립합니다.

$$p = \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{happly}(p, x)) \quad \text{그리고} \quad q = \mathsf{funext}(x \mapsto \mathsf{happly}(q, x)).$$

그런데 임의의 $x : A$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{happly}(p, x) : f(x) = g(x) \qquad \text{그리고} \qquad \mathsf{happly}(q, x) : f(x) = g(x),$$

따라서 $B(x)$가 집합이므로 $\mathsf{happly}(p, x) = \mathsf{happly}(q, x)$ 입니다. 이제 함수 외연성을 다시 사용하면 의존 함수 $(x \mapsto \mathsf{happly}(p, x))$와 $(x \mapsto \mathsf{happly}(q, x))$는 서로 같으며, 따라서 ($\mathsf{ap}_{\mathsf{funext}}$를 적용하면) p와 q도 서로 같습니다.

더 많은 예는 연습문제 3.2 및 3.3를 참고하십시오. 호모토피 타입 이론의 모든 집합으로 이루어진 부분 체계(범주)에 대한 더 체계적인 탐구는 제10장를 참고하십시오.

집합은 호모토피 n-타입이라고 부르는 것들의 사다리에서 첫 번째 단에 불과합니다. 다음 단은 1-타입으로 이루어지며, 이는 범주론의 1-그루포이드와 유사합니다. 집합(0-타입이라고도 부를 수 있습니다)을 정의하는 성질은 자명하지 않은 경로가 없다는 것입니다. 마찬가지로, 1-타입을 정의하는 성질은 경로 사이에 자명하지 않은 경로가 없다는 것입니다.

정의 3.1.7. 모든 $x, y : A$와 $p, q : x = y$, $r, s : p = q$에 대해 $r = s$가 성립하면 타입 A를 **1-타입**이라고 합니다.

마찬가지로 2-타입, 3-타입 등을 정의할 수 있습니다. 제7장에서는 n-타입의 일반적인 개념을 귀납적으로 정의하고, 서로 다른 n 값에 대한 n-타입 사이의 관계를 연구할 것입니다.

그러나 지금은 두 가지 사실을 염두에 두면 유용합니다. 첫째, 이 단계들은 위쪽으로 닫혀 있습니다. 즉, A가 n-타입이면 A는 $(n+1)$-타입입니다. 예를 들면 다음과 같습니다.

보조정리 3.1.8. A가 집합이면(즉, $\mathsf{isSet}(A)$에 원소가 있으면) A는 1-타입입니다.

증명. $f : \mathsf{isSet}(A)$라고 가정합시다. 그러면 임의의 $x, y : A$와 $p, q : x = y$에 대해 $f(x, y, p, q) : p = q$가 성립합니다. x, y, p를 고정하고, $g : \prod_{(q:x=y)}(p = q)$를 $g(q) :\equiv f(x, y, p, q)$로 정의합시다. 그러면 임의의 $r : q = q'$에 대해 $\mathsf{apd}_g(r) : r_*(g(q)) = g(q')$가 성립합니다. 따라서 보조정리 2.11.2에 의해 $g(q) \cdot r = g(q')$가 성립합니다.

특히 정의 3.1.7에서와 같이 x, y, p, q와 $r, s : p = q$가 주어졌다고 가정하고, g를 위와 같이 정의합시다. 그러면 $g(p) \cdot r = g(q)$와 $g(p) \cdot s = g(q)$가 모두 성립하므로, 소거에 의해 $r = s$입니다. □

둘째로, 이렇게 타입을 수준에 따라 층화하는 것은 모든 타입이 집합인 것은 아니라는 의미에서 퇴화하지 않습니다:

예 3.1.9. 유니버스 $\mathcal{U}$ 은 집합이 아닙니다. 이를 증명하려면 타입 A와, refl_A와 같지 않은 경로 $p : A = A$를 제시하면 충분합니다. $A = \mathbf{2}$로 두고, $f : A \to A$를 $f(0_\mathbf{2}) :\equiv 1_\mathbf{2}$와 $f(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}$로 정의합시다. 그러면 (간단한 경우 분석에 의해) 모든 x에 대해 $f(f(x)) = x$가 성립하므로, f는 동치입니다. 따라서 유니밸런스에 의해 f로부터 경로 $p : A = A$가 생깁니다.

만약 p가 refl_A와 같다면, (다시 유니밸런스에 의해) f는 A의 항등 함수와 같을 것입니다. 그러나 이는 $0_\mathbf{2} = 1_\mathbf{2}$를 함의하게 되어 주 2.12.6에 모순됩니다.

장 6 및 8에서는 임의의 n에 대해 n-타입이 아닌 타입이 존재함을 보일 것입니다.

A가 1-타입일 필요충분조건은 임의의 $x, y : A$에 대해 동일성 타입 $x =_A y$가 집합인 것임에 유의하십시오. (따라서 보조정리 3.1.8은 집합의 동일성 타입 또한 집합이라는 뜻으로 동등하게 읽을 수 있습니다.) 이는 제7장에서 제시할 n-타입의 재귀적 정의의 기초가 될 것입니다.

이 특성화를 집합에서 "아래쪽으로" 확장할 수도 있습니다. 즉, 타입 A가 집합일 필요충분조건은 임의의 $x, y : A$에 대해 $x =_A y$의 임의의 두 원소가 같은 것입니다. 집합은 0-타입과 동등하므로, 어떤 타입이 후자의 성질(그 타입의 임의의 두 원소가 같다는 성질)을 가질 때 이를 (-1)-타입이라고 부르는 것이 자연스럽습니다. 이러한 타입은 좁은 의미의 명제로 간주할 수 있으며, 이에 대한 연구가 바로 보통 "논리"라고 부르는 것입니다. 이 장의 나머지 부분에서는 이를 다룰 것입니다.

3.2 타입으로서의 명제?

지금까지 우리는 §1.11에서 설명한 단순명료한 "타입으로서의 명제" 철학을 따라왔습니다. 이 철학에 따르면 "$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재함"과 같은 영어 문구는 $\sum_{(x:A)} P(x)$와 같은 대응하는 타입으로 해석되며, 어떤 진술의 증명은 어떤 특정한 원소가 그 타입에 거주한다고 판단하는 것으로 간주됩니다. 그러나 이러한 해석에서 비롯되는 "논리"가 고전 수학자에게는 낯설어 보이는 몇 가지 측면도 이미 살펴보았습니다. 예를 들어 정리 2.15.7에서 우리는 다음 진술이

$$\begin{aligned}&\text{"모든 } x : X \text{에 대하여 } P(x, a) \text{를 만족하는 } a : A(x) \text{가 존재하면, 모든 } x : X \text{에 대하여}\\ &P(x, g(x)) \text{가 성립하는 함수 } g : \textstyle\prod_{(x:X)} A(x) \text{가 존재합니다"},\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

이는 고전적인 선택 공리처럼 보이지만, 이러한 해석 아래에서는 항상 참입니다. 이것은 명제-타입 대응 논리의 주목할 만하고 종종 유용한 특징입니다. 그러나 이는 이 논리가 고전적인 논리 해석과

얼마나 크게 다른지도 보여 줍니다. 고전적인 해석에서 선택 공리는 논리적 진리가 아니라 추가적인 "공리"입니다.

한편, 이제 우리는 고전적인 이중 부정 법칙과 배중률처럼 보이는 대응 진술들이 유니밸런스 공리와 양립할 수 없다는 것도 보일 수 있습니다.

정리 3.2.2. 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $\neg(\neg A) \to A$가 성립하는 것은 아닙니다.

증명. $\neg A \equiv (A \to \mathbf{0})$임을 상기하십시오. 또한 "…인 것은 아님"이라는 표현을 연산자 $\neg$로 읽습니다. 따라서 이 진술을 증명하려면 어떤 $f : \prod_{(A:\mathcal{U})}(\neg\neg A \to A)$가 주어졌다고 가정하고 $\mathbf{0}$의 원소를 구성하면 충분합니다.

다음 증명의 아이디어는 f가 타입 이론의 다른 모든 함수와 마찬가지로 "연속"이라는 점을 관찰하는 것입니다. 유니밸런스에 의해, 이는 f가 타입의 동치에 대해 자연적임을 함의합니다. 이 사실과 고정점이 없는 자기 동치로부터 모순을 이끌어 낼 수 있을 것입니다.

예 3.1.9에서와 같이, $e : \mathbf{2} \simeq \mathbf{2}$을 $e(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}$와 $e(0_\mathbf{2}) :\equiv 1_\mathbf{2}$로 정의되는 동치라고 합시다. $p : \mathbf{2} = \mathbf{2}$을 유니밸런스에 의해 e에 대응하는 경로, 즉 $p :\equiv \mathsf{ua}(e)$라고 합시다. 그러면 $f(\mathbf{2}) : \neg\neg\mathbf{2} \to \mathbf{2}$이며 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{apd}_f(p) : \mathsf{transport}^{A\mapsto(\neg\neg A\to A)}(p, f(\mathbf{2})) = f(\mathbf{2}).$$

따라서 임의의 $u : \neg\neg\mathbf{2}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_f(p), u) : \mathsf{transport}^{A\mapsto(\neg\neg A\to A)}(p, f(\mathbf{2}))(u) = f(\mathbf{2})(u).$$

이제 (2.9.4)에 의해, $f(\mathbf{2}) : \neg\neg\mathbf{2} \to \mathbf{2}$을 타입 족 $A \mapsto (\neg\neg A \to A)$에서 p를 따라 수송한 것은, 인자를 타입 족 $A \mapsto \neg\neg A$에서 p^{-1}를 따라 수송하고, $f(\mathbf{2})$을 적용한 다음, 그 결과를 타입 족 $A \mapsto A$에서 p를 따라 수송하는 함수와 같습니다:

$$\mathsf{transport}^{A\mapsto(\neg\neg A\to A)}(p, f(\mathbf{2}))(u) = \mathsf{transport}^{A\mapsto A}(p, f(\mathbf{2})(\mathsf{transport}^{A\mapsto\neg\neg A}(p^{-1}, u))).$$

그런데 임의의 두 점 $u, v : \neg\neg\mathbf{2}$은 함수 외연성에 의해 같습니다. 임의의 $x : \neg\mathbf{2}$에 대해 $u(x) : \mathbf{0}$이므로 어떤 결론이든, 특히 $u(x) = v(x)$를 도출할 수 있기 때문입니다. 따라서 $\mathsf{transport}^{A\mapsto\neg\neg A}(p^{-1}, u) = u$가 성립하고, 그러므로 $\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_f(p), u)$로부터 다음 등식을 얻습니다.

$$\mathsf{transport}^{A\mapsto A}(p, f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u).$$

마지막으로, §2.10에서 논의한 바와 같이, 타입 족 $A \mapsto A$에서 경로 $p \equiv \mathsf{ua}(e)$를 따라 수송하는 것은 동치 e를 적용하는 것과 같습니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$e(f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u). \tag{3.2.3}$$

그러나 다음 또한 증명할 수 있습니다.

$$\prod_{x:\mathbf{2}} \neg(e(x) = x). \tag{3.2.4}$$

이는 x에 대한 경우 분석으로부터 따라 나옵니다. 두 경우 모두 e의 정의와 $0_\mathbf{2} \neq 1_\mathbf{2}$라는 사실(주 2.12.6)로부터 즉시 얻어집니다. 따라서 (3.2.4)를 $f(\mathbf{2})(u)$에 적용하고 이를 (3.2.3)와 함께 쓰면 $\mathbf{0}$의 원소를 얻습니다. □

주 3.2.5. 특히 이는 비어 있지 않은 모든 타입에서 원소를 하나씩 선택하는 힐베르트식 "선택 연산자"가 존재할 수 없음을 함의합니다. 요점은 그러한 연산자는 자연적일 수 없는데, 유니밸런스 공리 아래에서는 타입에 작용하는 모든 함수가 동치에 대해 자연적이어야 한다는 것입니다.

주 3.2.6. 그러나 임의의 A에 대해 $\neg\neg\neg A \to \neg A$는 여전히 성립합니다. 연습문제 1.11을 참조하십시오.

따름정리 3.2.7. 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $A + (\neg A)$가 성립하는 것은 아닙니다.

증명. $g : \prod_{(A:\mathcal{U})}(A + (\neg A))$가 있다고 가정합시다. 그러면 $\prod_{(A:\mathcal{U})}(\neg\neg A \to A)$가 성립함을 보여 정리 3.2.2를 적용할 수 있도록 하겠습니다. 따라서 $A : \mathcal{U}$와 $u : \neg\neg A$를 가정합시다. 우리의 목표는 A의 원소를 구성하는 것입니다.

이제 $g(A) : A + (\neg A)$이므로, 경우 분석에 의해 어떤 $a : A$에 대해 $g(A) \equiv \mathsf{inl}(a)$이거나 어떤 $w : \neg A$에 대해 $g(A) \equiv \mathsf{inr}(w)$라고 가정할 수 있습니다. 첫 번째 경우에는 $a : A$가 있고, 두 번째 경우에는 $u(w) : \mathbf{0}$가 있으므로 원하는 것은 무엇이든(예컨대 A) 얻을 수 있습니다. 따라서 두 경우 모두 원하는 대로 A의 원소를 얻습니다. □

따라서 유니밸런스 공리를 가정하면서(물론 우리는 그렇게 할 것입니다) 고전적 추론의 여지도 남겨 두고 싶다면(이 또한 바람직합니다), 수정하지 않은 명제-타입 대응 원리를 사용하여 모든 비형식적 수학 진술을 타입 이론으로 해석할 수는 없습니다. 그렇게 하면 배중률이 거짓이 되기 때문입니다. 그렇다고 명제-타입 대응을 완전히 버리고 싶지도 않습니다. 이 원리에는 단순성, 구성성, 계산 가능성과 같은 좋은 성질이 많기 때문입니다. 이제 이러한 문제를 해결하는 명제-타입 대응의 수정안을 논의하겠습니다. 언제 어떤 논리를 사용할 것인가 하는 문제는 §3.10에서 다시 다루겠습니다.

3.3 단순 명제

우리는 명제-타입 대응 논리에 좋은 성질과 나쁜 성질이 모두 있음을 보았습니다. 이 둘에는 공통된 원인이 있습니다. 타입을 명제로 볼 때, 타입은 단순한 참이나 거짓 이상의 정보를 담을 수 있으며, 그에 대한 모든 "논리적" 구성은 이 추가 정보를 존중해야 합니다. 이는 진릿값 이상의 정보를 담지 않는 타입으로 관심을 제한하고 이러한 타입만을 논리적 명제로 간주하면 더 통상적인 논리를 얻을 수 있음을 시사합니다.

그러한 타입 A는 거주되어 있으면 "참"이고, 거주된다는 사실로부터 모순이 도출되면(즉, $\neg A \equiv (A \to \mathbf{0})$가 거주되어 있으면) "거짓"입니다. 더 전통적인 형태의 논리를 얻기 위해 우리가 피하고자 하는 것은, 원소 하나를 제시하는 것이 단지 그 타입이 거주되어 있음을 아는 것보다 더 많은 정보를 주는 타입을 논리적 명제로 취급하는 것입니다. 예를 들어 $\mathbf{2}$의 원소 하나가 주어지면, $\mathbf{2}$에 어떤 원소가 있다는 단순한 사실보다 더 많은 정보를 받게 됩니다. 실제로 정확히 한 비트만큼의 정보를 더 받습니다. 즉, $\mathbf{2}$의 어느 원소가 주어졌는지를 알게 됩니다. 반면 $\mathbf{1}$의 원소 하나가 주어지면, $\mathbf{1}$에 원소가 있다는 단순한 사실 이상의 정보는 받지 못합니다. $\mathbf{1}$의 임의의 두 원소는 서로 같기 때문입니다. 이는 다음 정의를 시사합니다.

정의 3.3.1. 모든 $x, y : P$에 대해 $x = y$가 성립하면 타입 P를 **단순 명제**라고 합니다.

우리는 여전히 타입 이론 안에서 수학을 하고 있으므로, 이것은 타입 이론 안의 정의라는 점에 유의하십시오. 즉, 이것은 하나의 타입, 더 정확히 말하면 타입 족입니다. 구체적으로, 임의의 $P : \mathcal{U}$에 대하여 타입 $\mathsf{isProp}(P)$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{isProp}(P) :\equiv \prod_{x,y:P} (x = y).$$

따라서 "P가 단순 명제"라고 주장한다는 것은 $\mathsf{isProp}(P)$의 거주자, 즉 P의 임의의 두 원소를 경로로 연결하는 의존 함수를 제시한다는 뜻입니다. 이 함수의 연속성/자연성은 P의 임의의 두 원소가 같을 뿐 아니라 P가 고차 호모토피도 갖지 않음을 함의합니다.

보조정리 3.3.2. P가 단순 명제이고 $x_0 : P$이면 $P \simeq \mathbf{1}$입니다.

증명. $f : P \to \mathbf{1}$을 $f(x) :\equiv \star$로, $g : \mathbf{1} \to P$를 $g(u) :\equiv x_0$으로 정의합니다. 이 주장은 다음 보조정리와, 정리 2.8.1에 의해 $\mathbf{1}$이 단순 명제라는 관찰로부터 따라 나옵니다. □

보조정리 3.3.3. P와 Q가 $P \to Q$와 $Q \to P$를 만족하는 단순 명제이면 $P \simeq Q$입니다.

증명. $f : P \to Q$와 $g : Q \to P$가 주어졌다고 합시다. 그러면 P가 단순 명제이므로 임의의 $x : P$에 대하여 $g(f(x)) = x$입니다. 마찬가지로 Q가 단순 명제이므로 임의의 $y : Q$에 대하여 $f(g(y)) = y$입니다. 따라서 f와 g는 준역원입니다. □

즉, §1.11에서 약속한 대로, 두 단순 명제가 논리적으로 동치이면 이들은 동치입니다.

호모토피 이론에서는 $\mathbf{1}$과 호모토피 동치인 공간을 축약 가능하다고 합니다. 따라서 거주된 단순 명제는 모두 축약 가능합니다(§3.11도 참고하십시오). 한편 거주되지 않은 타입 $\mathbf{0}$ 역시 (공허하게) 단순 명제입니다. 적어도 고전 수학에서는 이 두 가지가 유일한 가능성입니다.

단순 명제는 (범주론적으로 생각하면) 부분 종대상, (집합론적으로 생각하면) 부분 한원소 집합, 또는 h-명제라고도 불립니다. §3.1의 논의는 이들을 (-1)-타입이라고도 불러야 함을 시사합니다. 이에 대해서는 제7장에서 다시 다루겠습니다. "단순"이라는 수식어는, 어떤 타입이든 명제로 간주될 수 있지만(그 거주자를 제시함으로써 명제를 증명합니다), 단순 명제인 타입은 명제 이상의 것으로 유용하게 간주될 수 없다는 점을 강조합니다. 즉, 그 참에 대한 증인에는 추가 정보가 담겨 있지 않습니다.

타입 A가 집합일 필요충분조건은 모든 $x, y : A$에 대해 동일성 타입 $x =_A y$가 단순 명제인 것임에 유의하십시오. 한편 보조정리 3.1.8의 증명을 그대로 옮겨 와 단순화하면 다음을 얻습니다.

보조정리 3.3.4. 모든 단순 명제는 집합입니다.

증명. $f : \mathsf{isProp}(A)$라고 가정합시다. 그러면 모든 $x, y : A$에 대해 $f(x,y) : x = y$입니다. $x : A$를 고정하고 $g(y) :\equiv f(x,y)$로 정의합니다. 그러면 임의의 $y, z : A$와 $p : y = z$에 대해 $\mathsf{apd}_g(p) : p_*(g(y)) = g(z)$입니다. 따라서 보조정리 2.11.2에 의해 $g(y) \cdot p = g(z)$이며, 이는 곧 $p = g(y)^{-1} \cdot g(z)$라는 뜻입니다. 따라서 임의의 $p, q : x = y$에 대해 $p = g(x)^{-1} \cdot g(y) = q$입니다. □

특히 이로부터 다음이 따라 나옵니다.

보조정리 3.3.5. 임의의 타입 A에 대해 타입 $\mathsf{isProp}(A)$와 $\mathsf{isSet}(A)$는 단순 명제입니다.

증명. $f, g : \mathsf{isProp}(A)$라고 가정합시다. 함수 외연성에 의해 $f = g$를 보이려면 임의의 $x, y : A$에 대해 $f(x,y) = g(x,y)$임을 보이면 충분합니다. 그런데 $f(x,y)$와 $g(x,y)$는 모두 A 안의 경로이며, f와 g 중 어느 것에 의해서든 A는 단순 명제이고 따라서 보조정리 3.3.4에 의해 집합이므로 이 둘은 같습니다. 마찬가지로 $f, g : \mathsf{isSet}(A)$라고 가정합시다. 이는 모든 $a, b : A$와 $p, q : a = b$에 대해 $f(a,b,p,q) : p = q$이고 $g(a,b,p,q) : p = q$라는 뜻입니다. 그런데 이때 (f와 g 중 어느 것에 의해서든) A는 집합이고 따라서 1-타입이므로 $f(a,b,p,q) = g(a,b,p,q)$가 따라 나옵니다. 따라서 함수 외연성에 의해 $f = g$입니다. □

지금까지 다른 예를 하나 더 보았습니다. §2.4의 조건 (iii)은 임의의 함수 f에 대해 타입 $\mathsf{isequiv}(f)$가 단순 명제여야 한다고 주장합니다.

3.4 고전 논리 대 직관주의 논리

단순 명제의 개념을 갖추었으므로, 이제 호모토피 타입 이론에서 **배중률** 의 올바른 정식화를 다음과 같이 제시할 수 있습니다:

$$\mathsf{LEM} :\equiv \prod_{A:\mathcal{U}} \Big(\mathsf{isProp}(A) \to (A + \neg A)\Big). \tag{3.4.1}$$

마찬가지로, **이중 부정 법칙** 은 다음과 같습니다.

$$\prod_{A:\mathcal{U}} \Big(\mathsf{isProp}(A) \to (\neg\neg A \to A)\Big). \tag{3.4.2}$$

두 법칙이 서로 동치라는 것도 쉽게 알 수 있으므로 — 연습문제 3.18을 참조하십시오 — 이제부터는 대체로 LEM 에 대해서만 이야기하겠습니다.

2 은 단순 명제가 아니므로, LEM 의 이러한 정식화는 정리 3.2.2 및 따름정리 3.2.7의 "역설"을 피합니다. 이를 더 일반적인 명제-타입 대응 정식화와 구별하기 위해 후자의 이름을 다음과 같이 바꿉니다.

$$\mathsf{LEM}_\infty :\equiv \prod_{A:\mathcal{U}} (A + \neg A).$$

강조를 위해 올바른 형태 (3.4.1)을 LEM_{-1}로 표기하기도 합니다. 연습문제 7.7도 참조하십시오. LEM 은 제1장에서 설명한 기본 타입 이론으로부터 따라 나오지는 않지만, (∞ 버전과 달리) 모순 없이 공리로 가정할 수 있습니다. 예를 들어 §10.4에서는 이를 가정할 것입니다.

그러나 LEM 을 사용하지 않고도 얼마나 멀리 나아갈 수 있는지는 놀라울 수 있습니다. 정의나 정리를 간단히 다시 정식화하기만 해도 배중률에 기대지 않을 수 있는 경우가 꽤 많습니다. 때로는 익숙해지는 데 약간의 시간이 걸리지만, 더 우아하고 더 일반적인 증명을 얻을 수 있으므로 대개 그만한 수고를 들일 가치가 있습니다. 이러한 접근의 몇 가지 이점은 서론에서 논의하였습니다.

예를 들어 고전 수학에서는 이중 부정이 불필요하게 사용되는 경우가 많습니다. 아주 간단한 예로 집합 A가 "비어 있지 않다"는 흔한 가정이 있는데, 이는 문자 그대로 A에 원소가 하나도 없는 것은 아니라는 뜻입니다. 실제로 의도하는 바는 거의 언제나 A에 적어도 하나의 원소가 있다는 긍정적인 주장이며, 이중 부정을 제거하면 그 진술이 LEM 에 덜 의존하게 됩니다. A 자체를 명제로서 주장할 때(즉, 보통 이름 없이 A의 원소를 구성할 때) 타입 A에 원소가 있다고 말한다는 것을 상기하십시오. 따라서 고전적인 증명을 구성적 논리로 옮길 때는 "비어 있지 않다"라는 말을 "원소가 있다"로 바꾸는 경우가 많습니다(다만 때로는 그 대신 "단순히 원소가 있다"로 바꾸어야 합니다. §3.7을 참조하십시오).

마찬가지로 고전 수학에서는 불필요한 귀류법 증명도 드물지 않게 볼 수 있습니다. 물론 고전적인 형태의 귀류법은 이중 부정 법칙을 거쳐 진행됩니다. 즉, $\neg A$를 가정하여 모순을 이끌어 내고, 이로써 $\neg\neg A$를 연역한 다음, 이중 부정에 의해 A를 얻습니다. 그러나 $\neg A$로부터 모순을 이끌어 내는 과정을 약간만 바꾸어 표현하면 A의 직접 증명을 얻을 수 있어서 LEM 이 필요 없게 되는 경우가 많습니다.

목표가 부정을 증명하는 것이라면 "귀류법"에 LEM 이 관여하지 않는다는 점에도 유의해야 합니다. 실제로 $\neg A$는 정의상 타입 $A \to \mathbf{0}$이므로, $\neg A$를 증명한다는 것은 정의상 A를 가정하여 모순($\mathbf{0}$)을 증명한다는 것입니다. 마찬가지로 부정된 명제에 대해서는 이중 부정 법칙이 실제로 성립합니다: $\neg\neg\neg A \to \neg A$. 연습을 거듭하면 부정된 명제와 부정되지 않은 명제를 더 주의 깊게 구별하고, LEM 이 언제 사용되고 언제 사용되지 않는지 알아차리는 법을 익히게 됩니다.

따라서 겉보기와는 달리, 수학을 "구성적으로" 한다는 것은 보통 중요한 정리를 포기하는 것이 아니라, 중요한 정리들을 구성적으로 증명할 수 있도록 정의를 서술하는 최선의 방법을 찾는 것입니다. 즉, 어떤 주제를 처음 탐구할 때는 LEM 을 자유롭게 사용해도 되지만, 그 주제를 더 잘 이해하게 되면 그 공리를 피하도록 정의와 증명을 다듬을 수 있기를 기대할 수 있습니다. 이러한 관찰은 호모토피 타입 이론에서 더욱 두드러집니다. 호모토피 타입 이론에서는 유니밸런스와 고차 귀납적 타입이라는 강력한 도구 덕분에, 전통적으로 고전적 추론이 필요했을 많은 문제에 구성적으로 접근할 수 있습니다. 부 II에서 그러한 예를 여럿 보게 될 것입니다.

구성적 수학에서도 일부 명제에 대해서는 배중률이 성립할 수 있다는 점도 언급할 가치가 있습니다. 그러한 명제에 전통적으로 붙이는 이름은 결정 가능입니다.

정의 3.4.3.

(i) $A + \neg A$ 이면 타입 A를 **결정 가능** 하다고 합니다.

(ii) 마찬가지로, 다음이 성립하면 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$를 **결정 가능** 하다고 합니다: $\prod_{(a:A)}(B(a) + \neg B(a))$.

(iii) 특히, 다음이 성립하면 A는 **결정 가능한 상등** 을 가진다고 합니다: $\prod_{(a,b:A)}((a = b) + \neg(a = b))$.

따라서 LEM 은 정확히 모든 단순 명제가 결정 가능하다는 진술이며, 그러므로 단순 명제의 모든 족도 결정 가능합니다. 특히 LEM 은 (§3.1의 의미에서) 모든 집합이 결정 가능한 상등을 가진다는 것을 함의합니다. 이러한 의미에서 결정 가능한 상등을 가진다는 것은 매우 강한 성질입니다. 정리 7.2.5를 참조하십시오.

3.5 부분집합과 명제적 크기 재조정

단순 명제가 유용하다는 또 다른 예로, 부분집합(더 일반적으로는 부분 타입)을 논의하겠습니다. $P : A \to \mathcal{U}$가 타입 족이고, 각 타입 $P(x)$를 명제로 간주한다고 가정합시다. 그러면 P 자체는 A 위의 술어, 또는 A의 원소들의 성질입니다.

집합론에서는 집합 A 위의 술어 P가 주어지면 언제든지 부분집합 $\{\, x \in A \mid P(x) \,\}$를 만들 수 있습니다. §1.11에서 간략히 언급했듯이, 타입 이론에서 이에 대응하는 자명한 구성은 Σ-타입 $\sum_{(x:A)} P(x)$ 입니다. 물론 $\sum_{(x:A)} P(x)$의 원소는 $x : A$이고 p가 $P(x)$의 증명인 쌍 (x, p) 입니다. 그러나 일반적인 P에 대해서는, 명제 $P(a)$에 서로 다른 증명이 둘 이상 있으면 원소 $a : A$ 하나로부터 $\sum_{(x:A)} P(x)$의 서로 다른 원소가 둘 이상 생길 수 있습니다. 이는 부분집합에 대한 통상적인 직관에 어긋납니다. 그러나 P가 단순 명제라면 이런 일은 일어날 수 없습니다.

보조정리 3.5.1. $P : A \to \mathcal{U}$가 모든 $x : A$에 대해 $P(x)$가 단순 명제인 타입 족이라고 가정합시다. $u, v : \sum_{(x:A)} P(x)$가 $\mathsf{pr}_1(u) = \mathsf{pr}_1(v)$를 만족하면 $u = v$입니다.

증명. $p : \mathsf{pr}_1(u) = \mathsf{pr}_1(v)$라고 가정합시다. 정리 2.7.2에 의해, $u = v$를 보이려면 $p_*(\mathsf{pr}_2(u)) = \mathsf{pr}_2(v)$를 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 $p_*(\mathsf{pr}_2(u))$와 $\mathsf{pr}_2(v)$는 둘 다 단순 명제인 $P(\mathsf{pr}_1(v))$의 원소이므로 서로 같습니다. □

예를 들어, §2.4에서 다음과 같이 정의했다는 것을 상기하십시오.

$$(A \simeq B) :\equiv \sum_{f:A\to B} \mathsf{isequiv}(f),$$

여기서 각 타입 $\mathsf{isequiv}(f)$는 단순 명제여야 했습니다. 따라서 두 동치의 바탕 함수가 같으면 두 동치는 동치로서 같습니다.

이제부터 $P : A \to \mathcal{U}$가 단순 명제들의 족이면(즉 각 $P(x)$가 단순 명제이면), 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\{\, x : A \mid P(x) \,\} \tag{3.5.2}$$

이를 $\sum_{(x:A)} P(x)$의 대체 표기법으로 사용합니다. (임의의 P에 대해서도 이 표기법을 쓰지 못할 기술적인 이유는 없습니다. 그러나 그렇게 쓰면 의도하지 않은 함의 때문에 혼란을 줄 수 있습니다.) A가 집합이면 (3.5.2)을 A의 **부분집합** 이라고 부릅니다. 일반적인 A에 대해서는 이를 **부분 타입**이라고 부를 수 있습니다. P 자체를 A의 부분집합 또는 부분 타입이라고 부를 수도 있습니다. 사실 이쪽이 더 정확합니다. 타입 (3.5.2)은 그 자체만으로는 A와의 관계를 기억하지 않기 때문입니다.

이러한 P와 $a : A$가 주어지면, 단순 명제 $P(a)$를 가리키기 위해 $a \in P$ 또는 $a \in \{\, x : A \mid P(x) \,\}$라고 쓸 수 있습니다. 이것이 성립하면 a가 P의 **원소**라고 말할 수 있습니다. 마찬가지로 $\{\, x : A \mid Q(x) \,\}$가 A의 또 다른 부분집합일 때, $\prod_{(x:A)}(P(x) \to Q(x))$가 있으면 P가 Q에 **포함된다** 고 말하고 $P \subseteq Q$라고 씁니다.

부분 타입의 추가 예로서, 유니버스 $\mathcal{U}$ 안에서 집합의 "부분유니버스"와 단순 명제의 "부분유니버스"를 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{Set}_{\mathcal{U}} :\equiv \{\, A : \mathcal{U} \mid \mathsf{isSet}(A) \,\},$$
$$\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}} :\equiv \{\, A : \mathcal{U} \mid \mathsf{isProp}(A) \,\}.$$

$\mathsf{Set}_{\mathcal{U}}$의 원소는 타입 $A : \mathcal{U}$와 증거 $s : \mathsf{isSet}(A)$로 이루어지며, $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$도 마찬가지입니다. 보조정리 3.5.1에 따르면 $(A, s) =_{\mathsf{Set}_{\mathcal{U}}} (B, t)$는 $A =_{\mathcal{U}} B$와 동치입니다(따라서 $A \simeq B$와도 동치입니다). 그러므로 앞으로는 흔히 표기를 남용하여 $(A, s) : \mathsf{Set}_{\mathcal{U}}$ 대신 간단히 $A : \mathsf{Set}_{\mathcal{U}}$라고 쓰겠습니다. 또한 해당 유니버스를 명시할 필요가 없으면 아래첨자 $\mathcal{U}$ 를 생략하기도 합니다.

임의의 두 유니버스 $\mathcal{U}_i$와 $\mathcal{U}_{i+1}$에 대해 $A : \mathcal{U}_i$이면 $A : \mathcal{U}_{i+1}$이기도 하다는 점을 상기하십시오. 따라서 임의의 $(A, s) : \mathsf{Set}_{\mathcal{U}_i}$에 대해 $(A, s) : \mathsf{Set}_{\mathcal{U}_{i+1}}$도 성립하고 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i}$도 마찬가지이므로, 다음과 같은 자연스러운 사상을 얻습니다.

$$\mathsf{Set}_{\mathcal{U}_i} \to \mathsf{Set}_{\mathcal{U}_{i+1}}, \tag{3.5.3}$$
$$\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i} \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_{i+1}}. \tag{3.5.4}$$

사상 (3.5.3)은 동치일 수 없습니다. 만약 동치라면 칸토어 집합론에서 익히 알려진 자기 참조의 역설을 재현할 수 있기 때문입니다. 그러나 지금까지 제시한 타입 이론에서 (3.5.4)이 자동으로 동치가 되지는 않지만, 동치라고 가정해도 무모순입니다. 즉, 타입 이론에 다음 공리를 추가하는 것을 고려할 수 있습니다.

공리 3.5.5 (명제적 크기 재조정). 사상 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i} \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_{i+1}}$은 동치입니다.

우리는 이 공리를 **명제적 크기 재조정**이라고 부릅니다. 이 공리는 유니버스 $\mathcal{U}_{i+1}$ 안의 임의의 단순 명제를 더 작은 유니버스 $\mathcal{U}_i$ 안의 동치인 단순 명제로 "크기 재조정"할 수 있다는 뜻이기 때문입니다. $\mathcal{U}_{i+1}$이 LEM 을 만족하면 이 공리는 자동으로 따라 나옵니다(연습문제 3.10 참조). 우리는 일반적으로 이 공리를 가정하지 않습니다. 다만 몇몇 곳에서는 이를 명시적인 가정으로 사용합니다. 이 공리는 단순 명제에 대한 비술어성의 한 형태이며, 이를 사용하지 않는 타입 이론은 술어적으로 남는다고 말합니다.

실제로 우리가 가장 자주 원하는 것은 이와 약간 다른 명제입니다. 즉, 고려 중인 유니버스 $\mathcal{U}$ 가 "모든 단순 명제를 분류하는" 타입을 포함한다는 것입니다. 다시 말해, 우리는 타입 $\Omega : \mathcal{U}$ 와 함께 Ω 를 첨자로 하는 단순 명제의 족을 원하며, 이 족은 동치를 무시하면 모든 단순 명제를 포함해야 합니다. $\mathcal{U}$ 가 가장 작은 유니버스 $\mathcal{U}_0$ 이 아니면 이 명제는 위에서 서술한 명제적 크기 재조정으로부터 따라 나옵니다. 이 경우 $\Omega :\equiv \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_0}$ 으로 정의할 수 있기 때문입니다.

비술어성의 한 가지 용도는 멱집합을 정의하는 것입니다. 집합 A 의 **멱집합**을 $A \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$ 로 정의하는 것은 자연스럽습니다. 그러나 비술어성이 없으면 이 정의는 (동치를 무시하더라도) 유니버스 $\mathcal{U}$ 의 선택에 의존합니다. 하지만 명제적 크기 재조정이 있으면 멱집합을 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathcal{P}(A) :\equiv (A \to \Omega),$$

그러면 이는 $\mathcal{U}$ 와 무관합니다. §10.1.4도 참조하십시오.

3.6 단순 명제의 논리

§1.1에서 언급했듯이, 기본 개념이 하나(타입)뿐인 타입 이론과 달리 집합론적 기초에는 집합과 명제라는 두 가지 기본 개념이 있습니다. 따라서 고전 수학자는 이 두 종류의 대상을 따로 다루는 데 익숙합니다.

타입 이론에서도 단순 명제인 타입(및 타입 족)이 집합론적 명제의 역할을 맡도록 하여 비슷한 이분법을 되살릴 수 있습니다. 많은 경우 논리 연결사와 양화사는 해당 타입 형성자를 단순 명제로 제한하기만 하면 이 논리에서 표현할 수 있습니다. 물론 그러려면 해당 타입 형성자가 단순 명제를 보존한다는 것을 알아야 합니다.

예 3.6.1. P 와 Q 가 단순 명제이면 $P \times Q$ 도 단순 명제입니다. 이는 곱에서의 경로에 대한 특성화를 사용하면 쉽게 보일 수 있으며, 예 3.1.5와 같은 방식이지만 더 간단합니다. 따라서 연결사 "그리고"는 단순 명제를 보존합니다.

예 3.6.2. A 가 임의의 타입이고 $P : A \to \mathcal{U}$ 가 모든 $x : A$ 에 대해 타입 $P(x)$ 가 단순 명제라는 조건을 만족하면, $\prod_{(x:A)} P(x)$ 는 단순 명제입니다. 증명은 예 3.1.6과 같은 방식이지만 더 간단합니다. $f, g : \prod_{(x:A)} P(x)$ 가 주어지면, $P(x)$ 가 단순 명제이므로 임의의 $x : A$ 에 대해 $f(x) = g(x)$ 입니다. 그러면 함수 외연성에 의해 $f = g$ 입니다.

특히 P 가 단순 명제이면 A 가 무엇이든 $A \to P$ 도 단순 명제입니다. 더 특수하게는 $\mathbf{0}$ 가 단순 명제이므로 $\neg A \equiv (A \to \mathbf{0})$ 도 단순 명제입니다. 따라서 연결사 "함의"와 "부정"은 양화사 "모든"과 마찬가지로 단순 명제를 보존합니다.

반면에 어떤 타입 형성자는 단순 명제를 보존하지 않습니다. P 와 Q 가 단순 명제이더라도 $P + Q$ 는 일반적으로 단순 명제가 아닙니다. 예를 들어 $\mathbf{1}$ 은 단순 명제이지만 $\mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$ 은 그렇지 않습니다. 논리적으로 말하면 $P + Q$ 는 "순수하게 구성적인" 종류의 "또는"입니다. 그 증거에는 어느 선언지가 참인지에 대한 추가 정보가 들어 있습니다. 이것이 매우 유용할 때도 있지만, 단순 명제를 보존하는 더 고전적인 종류의 "또는"을 원한다면 이 추가 정보를 잊어버림으로써 이 타입을 단순 명제로 "절단"하는 방법이 필요합니다.

A 가 임의의 타입일 때 Σ-타입 $\sum_{(x:A)} P(x)$ 에서도 같은 문제가 생깁니다. 이는 "$P(x)$ 를 만족하는 $x : A$ 가 존재함"에 대한 순수하게 구성적인 해석으로, 증거 x 를 기억합니다. 따라서 각 타입 $P(x)$ 가 단순 명제이더라도 일반적으로 단순 명제가 아닙니다. (§3.5에서 $\sum_{(x:A)} P(x)$ 를 "$P(x)$ 를 만족하는 $x : A$ 들의 부분집합"으로도 볼 수 있음을 살펴보았다는 점을 상기하십시오.)

3.7 명제 절단

명제 절단은 (-1)-절단, 괄호 타입 또는 압착 타입이라고도 부르며, 타입의 원소들에 담긴 정보 가운데 그 존재를 제외한 모든 정보를 잊어버림으로써 타입을 단순 명제로 "압착"하거나 "절단"하는 추가적인 타입 형성자입니다.

더 정확히 말하면, 임의의 타입 A에 대해 타입 $\|A\|$가 있습니다. 이 타입에는 두 개의 생성자가 있습니다:

- 임의의 $a : A$에 대하여 $|a| : \|A\|$입니다.
- 임의의 $x, y : \|A\|$에 대하여 $x = y$입니다.

첫 번째 생성자는 A에 원소가 있으면 $\|A\|$에도 원소가 있다는 뜻입니다. 두 번째 생성자는 $\|A\|$가 단순 명제임을 보장합니다. 보통 이 사실의 증거에는 이름을 붙이지 않습니다.

$\|A\|$의 재귀 원리는 다음과 같습니다.

- B가 단순 명제이고 $f : A \to B$가 있으면, 모든 $a : A$에 대하여 $g(|a|) \equiv f(a)$를 만족하는 유도된 함수 $g : \|A\| \to B$가 존재합니다.

다시 말해, A(에 원소가 있다는 사실)로부터 따라 나오는 단순 명제는 모두 이미 $\|A\|$로부터 따라 나옵니다. 따라서 단순 명제로서의 $\|A\|$에는 A에 원소가 있다는 사실 이상의 정보가 담겨 있지 않습니다. ($\|A\|$에 대한 귀납 원리도 있지만 특별히 유용하지는 않습니다. 연습문제 3.17를 참조하십시오.)

연습문제 3.14 및 3.15 및 §6.9에서는 더 일반적인 개념을 사용하여 $\|A\|$를 구성하는 몇 가지 방법을 설명할 것입니다. 지금은 이를 제1장의 규칙들과 함께 쓰는 추가 규칙으로 가정하기만 하겠습니다.

명제 절단을 사용하면 "단순 명제의 논리"를 확장하여 선언과 존재 양화사까지 다룰 수 있습니다. 구체적으로 $\|A + B\|$는 "A 또는 B"의 단순 명제 버전이며, 어느 선언지가 참인지에 대한 정보를 "기억"하지 않습니다.

절단의 재귀 원리에 따르면 단순 명제를 증명하려 할 때에는 여전히 $\|A + B\|$에 대해 경우 분석을 할 수 있습니다. 즉, 가정 $u : \|A + B\|$가 있고 단순 명제 Q를 증명하려 한다고 합시다. 다시 말해, $\|A + B\| \to Q$의 원소를 정의하려는 것입니다. Q가 단순 명제이므로, 명제 절단의 재귀 원리에 의해 함수 $A + B \to Q$를 구성하는 것으로 충분합니다. 그리고 이제는 $A + B$에 대해 경우 분석을 사용할 수 있습니다.

마찬가지로 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$에 대하여 $\left\|\sum_{(x:A)} P(x)\right\|$를 생각할 수 있으며, 이는 "$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재함"의 단순 명제 버전입니다. 선언의 경우와 마찬가지로, 절단과 Σ-타입의 귀납 원리를 결합하면, $\left\|\sum_{(x:A)} P(x)\right\|$ 타입의 가정이 있을 때 단순 명제를 증명하려 할 때에는 새로운 가정 $x : A$와 $y : P(x)$를 도입할 수 있습니다. 다시 말해, $P(x)$를 만족하는 어떤 $x : A$가 존재한다는 것은 알지만 그러한 특정한 x를 손에 쥐고 있지는 않을 때, x의 특정한 값에 의존할 수 있는 것을 구성하려 하지 않는 한 그러한 x를 자유롭게 사용할 수 있습니다. 공역이 단순 명제여야 한다는 요구 조건은 결과가 증거에 의존하지 않는다는 이 독립성을 표현합니다. 그러한 타입의 가능한 원소는 모두 서로 같아야 하기 때문입니다.

주로 집합과 단순 명제를 다루는 장 10 및 11의 집합 수준 수학에서는 전통적인 논리 표기법을 "명제적으로 절단된 논리"만을 가리키는 데 사용하는 것이 편리합니다.

정의 3.7.1. P와 Q가 단순 명제(또는 그 족)를 나타낸다고 할 때, 절단을 사용하여 **전통적인 논리 표기법**을 다음과 같이 정의합니다.

$$\top :\equiv \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned}
\bot &:\equiv \mathbf{0} \\
P \wedge Q &:\equiv P \times Q \\
P \Rightarrow Q &:\equiv P \to Q \\
P \Leftrightarrow Q &:\equiv P = Q \\
\neg P &:\equiv P \to \mathbf{0} \\
P \vee Q &:\equiv \| P + Q \| \\
\forall (x : A).\, P(x) &:\equiv \prod_{x:A} P(x) \\
\exists (x : A).\, P(x) &:\equiv \left\| \sum_{x:A} P(x) \right\|
\end{aligned}$$

표기 $\wedge$와 $\vee$는 호모토피 이론에서 점 지정 공간의 스매시 곱과 쐐기합을 나타내는 데에도 쓰이며, 이는 제6장에서 소개할 것입니다. 엄밀히 말하면 이 때문에 충돌이 생길 여지가 있지만, 일반적으로 혼동이 일어나지는 않을 것입니다.

마찬가지로 §3.5에서처럼 부분집합을 논할 때에는 교집합, 합집합, 여집합에 대한 전통적인 표기법을 사용할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\{\, x : A \mid P(x) \,\} \cap \{\, x : A \mid Q(x) \,\} &:\equiv \{\, x : A \mid P(x) \wedge Q(x) \,\}, \\
\{\, x : A \mid P(x) \,\} \cup \{\, x : A \mid Q(x) \,\} &:\equiv \{\, x : A \mid P(x) \vee Q(x) \,\}, \\
A \setminus \{\, x : A \mid P(x) \,\} &:\equiv \{\, x : A \mid \neg P(x) \,\}.
\end{aligned}$$

물론 LEM 이 없으면 후자는 통상적인 의미의 "여집합"이 아닙니다. A의 모든 부분집합 B에 대하여 $B \cup (A \setminus B) = A$가 성립하지 않을 수도 있습니다.

3.8 선택 공리

이제 호모토피 타입 이론에서 선택 공리를 제대로 정식화할 수 있습니다. 타입 X와 다음 타입 족들이 있다고 가정하고,

$$A : X \to \mathcal{U} \qquad \text{그리고} \qquad P : \prod_{x:X} A(x) \to \mathcal{U},$$

나아가 다음을 가정합니다.

- X는 집합이고,
- 모든 $x : X$에 대하여 $A(x)$는 집합이며,
- 모든 $x : X$와 $a : A(x)$에 대하여 $P(x, a)$는 단순 명제입니다.

선택 공리 AC는 이러한 가정 아래에서 다음이 성립한다고 주장합니다.

$$\left(\prod_{x:X} \left\| \sum_{a:A(x)} P(x,a) \right\| \right) \to \left\| \sum_{(g:\prod_{(x:X)} A(x))} \prod_{(x:X)} P(x, g(x)) \right\|. \tag{3.8.1}$$

물론 이것은 "$B(x)$를 만족하는 $x : A$가 존재함"을 $\left\| \sum_{(x:A)} B(x) \right\|$로 읽어 (3.2.1)를 그대로 옮긴 것이므로, 이 명제를 익숙한 논리 표기법으로 다음과 같이 쓸 수도 있었습니다.

$$\Big(\forall (x : X).\, \exists (a : A(x)).\, P(x,a) \Big) \Rightarrow \Big(\exists (g : \textstyle\prod_{(x:X)} A(x)).\, \forall (x : X).\, P(x, g(x)) \Big).$$

특히 명제 절단이 두 번 나타난다는 점에 주목하십시오. 정의역의 절단은 모든 x에 대하여 $P(x,a)$를 만족하는 어떤 $a : A(x)$가 존재한다고 가정하되, 이 값들이 알려진 어떠한 방식으로도 선택되거나 지정되지는 않는다는 뜻입니다. 공역의 절단은 어떤 함수 g가 존재한다고 결론짓되, 이 함수가 알려진 어떠한 방식으로도 결정되거나 지정되지는 않는다는 뜻입니다.

사실 정리 2.15.7에 의해 이 공리는 더 간단한 형태로도 표현할 수 있습니다.

보조정리 3.8.2. 선택 공리 (3.8.1)는 임의의 집합 X와 각 $Y(x)$가 집합인 임의의 $Y : X \to \mathcal{U}$에 대해 다음이 성립한다는 명제와 동치입니다.

$$\left(\prod_{x:X} \left\| Y(x) \right\|\right) \to \left\| \prod_{x:X} Y(x) \right\|. \tag{3.8.3}$$

이는 고전 선택 공리의 잘 알려진 동치 형태, 즉 "공집합이 아닌 집합들로 이루어진 족의 데카르트 곱은 공집합이 아님"에 해당합니다.

증명. 정리 2.15.7에 의해 (3.8.1)의 공역은 다음과 동치입니다.

$$\left\| \prod_{(x:X)} \sum_{(a:A(x))} P(x,a) \right\|.$$

따라서 (3.8.1)는 (3.8.3)에서 다음과 같이 둔 경우와 동치입니다. $Y(x) :\equiv \sum_{(a:A(x))} P(x,a)$. (이는 예 3.1.5 및 보조정리 3.3.4에 의해 집합입니다.) 역으로, (3.8.3)는 (3.8.1)에서 $A(x) :\equiv Y(x)$, $P(x,a) :\equiv \mathbf{1}$로 둔 경우와 동치입니다. 따라서 둘은 논리적으로 동치입니다. 둘 다 단순 명제이므로, 보조정리 3.3.3에 의해 이들은 동치인 타입입니다. □

LEM 과 마찬가지로, 동치인 두 형태 (3.8.1)와 (3.8.3)는 우리의 기본 타입 이론으로부터 따라 나오지 않지만, 모순 없이 공리로 가정할 수 있습니다.

주 3.8.4. (3.8.3)의 우변이 항상 좌변을 함의한다는 것은 쉽게 보일 수 있습니다. 둘 다 단순 명제이므로, 보조정리 3.3.3에 의해 선택 공리는 다음 동치를 요구하는 것과도 동치입니다.

$$\left(\prod_{x:X} \left\| Y(x) \right\|\right) \simeq \left\| \prod_{x:X} Y(x) \right\|$$

이는 흔히 빠지는 함정을 보여 줍니다. 의존 함수 타입은 단순 명제를 보존하지만(예 3.6.2), 절단과는 교환되지 않습니다. 즉, $\left\| \prod_{(x:A)} P(x) \right\|$는 일반적으로 $\prod_{(x:A)} \|P(x)\|$와 동치가 아닙니다. 선택 공리를 가정한다면, 이 공리는 이것이 집합에 대해서는 참이라고 말해 줍니다. 아래에서 보겠지만, 일반적으로는 성립하지 않습니다.

선택 공리에서 집합인 타입으로 한정한 제한은 어느 정도 완화할 수 있습니다. 예를 들어, 식 (3.8.1)의 A와 P, 또는 식 (3.8.3)의 Y가 임의의 타입 족이 되도록 허용할 수 있습니다. 이렇게 하면 겉보기에는 더 강하지만 똑같이 무모순인 명제를 얻습니다. 또한 명제 절단을 제7장에서 다룰 더 일반적인 n-절단으로 대체할 수도 있습니다. 그러면 단순히 AC (강조할 때는 AC_{-1})라고 부르는 식 (3.8.1)와 AC_∞라고 부를 정리 2.15.7 사이를 보간하는 공리들의 스펙트럼 AC_n을 얻습니다. 연습문제 7.8 및 7.10도 참고하십시오. 그러나 X가 집합이어야 한다는 요구 조건은 완화할 수 없다는 점에 주의하십시오.

보조정리 3.8.5. 각 $Y(x)$가 집합이지만 (3.8.3)는 거짓이 되는 타입 X와 족 $Y : X \to \mathcal{U}$가 존재합니다.

증명. $X :\equiv \sum_{(A:\mathcal{U})} \|\mathbf{2} = A\|$로 정의하고, $x_0 :\equiv (\mathbf{2}, |\mathsf{refl}_{\mathbf{2}}|) : X$라 합시다. 그러면 Σ-타입에서의 경로 동일시, $\|A = \mathbf{2}\|$가 단순 명제라는 사실, 그리고 유니밸런스에 의해, 임의의 $(A,p),(B,q) : X$에 대해 $((A,p) =_X (B,q)) \simeq (A \simeq B)$가 성립합니다. 특히 $(x_0 =_X x_0) \simeq (\mathbf{2} \simeq \mathbf{2})$이므로, 예 3.1.9에서와 같이 X는 집합이 아닙니다.

한편 $(A,p) : X$이면 A는 집합입니다. 이는 $p : \|\mathbf{2} = A\|$에 대한 절단 귀납법과 $\mathbf{2}$이 집합이라는 사실로부터 따라 나옵니다. A와 B가 집합이면 언제나 $A \simeq B$도 집합이므로, 임의의 $x_1, x_2 : X$에 대해 $x_1 =_X x_2$는 집합이며, 즉 X는 1-타입입니다. 특히 $Y : X \to \mathcal{U}$를 $Y(x) :\equiv (x_0 = x)$로 정의하면, 각 $Y(x)$는 집합입니다.

이제 정의에 의해 임의의 $(A,p) : X$에 대해 $\|\mathbf{2} = A\|$가 성립하고, 따라서 $\|x_0 = (A,p)\|$가 성립합니다. 그러므로 $\prod_{(x:X)} \|Y(x)\|$가 성립합니다. 만약 이 X와 Y에 대해 (3.8.3)가 성립한다면, $\left\|\prod_{(x:X)} Y(x)\right\|$도 성립할 것입니다. 우리가 이끌어 내려는 모순($\mathbf{0}$)은 단순 명제이므로, $\prod_{(x:X)} Y(x)$, 즉 $\prod_{(x:X)} (x_0 = x)$를 가정해도 됩니다. 그런데 이는 X가 단순 명제이며 따라서 집합임을 함의하므로, 모순입니다. □

3.9 유일 선택 원리

다음 관찰은 자명하지만 매우 유용합니다.

보조정리 3.9.1. P가 단순 명제이면 $P \simeq \|P\|$입니다.

증명. 물론 정의에 의해 $P \to \|P\|$입니다. 또한 P가 단순 명제이므로 $\|P\|$의 보편 성질을 $\mathsf{id}_P : P \to P$에 적용하면 $\|P\| \to P$를 얻습니다. 보조정리 3.3.3에 의해 이 함수들은 준역원입니다. □

이 보조정리의 중요한 귀결 가운데 하나는 다음과 같습니다.

따름정리 3.9.2 (유일 선택 원리). 다음을 만족하는 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$이 있다고 합시다.

(i) 각 x에 대해 타입 $P(x)$는 단순 명제이며,
(ii) 각 x에 대해 $\|P(x)\|$가 성립합니다.

그러면 $\prod_{(x:A)} P(x)$가 성립합니다.

증명. 두 가정과 앞의 보조정리로부터 바로 따라 나옵니다. □

이 따름정리에는 매우 유용한 추론 기법도 담겨 있습니다. 즉, $\|A\|$임을 알고 있고 이를 이용하여 다른 어떤 타입 B의 원소를 구성하려 한다고 가정합시다. B의 원소를 구성할 때 A의 원소를 사용하고 싶지만, 이는 B가 단순 명제여서 명제 절단 $\|A\|$에 대한 귀납 원리를 적용할 수 있을 때에만 허용됩니다. 일반적으로 기대할 수 있는 최선은 $\|B\|$를 보이는 것입니다. 대신, 구성하려는 대상을 유일하게 특징짓는 추가 데이터로 B를 확장할 수 있습니다. 구체적으로, $\sum_{(x:B)} Q(x)$가 단순 명제가 되도록 술어 $Q : B \to \mathcal{U}$를 정의합니다. 그런 다음 A의 원소로부터 $Q(b)$를 만족하는 원소 $b : B$를 구성합니다. 따라서 $\|A\|$로부터 $\left\|\sum_{(x:B)} Q(x)\right\|$를 구성할 수 있으며, $\left\|\sum_{(x:B)} Q(x)\right\|$는 $\sum_{(x:B)} Q(x)$와 동치이므로 여기에서 B의 원소를 사영해 낼 수 있습니다. 예시는 연습문제 3.19에서 찾을 수 있습니다.

집합론적 수학에서도 비슷한 문제가 생기지만, 드러나는 방식은 조금 다릅니다. 함수 $f : A \to B$를 정의하려 하는데 원소 $a : A$에 따라 어떤 $b : B$의 단순 존재만 증명할 수 있다면, 아직 끝난 것이

아닙니다. 존재를 증명하는 데 그치지 않고 B의 원소를 실제로 특정해야 하기 때문입니다. 물론 한 가지 방법은 타입 이론에서 했던 것처럼 논증을 다듬어 $b : B$의 유일 존재를 보이는 것입니다. 그러나 집합론에서는 필요한 원소를 대신 골라 주는 선택 공리를 적용하여 이 문제를 더 간단히 피할 수 있는 경우가 많습니다. 반면 호모토피 타입 이론에서는 선택을 피하려는 의도와는 전혀 별개로, 사용할 수 있는 형태의 선택 원리들의 적용 범위가 그저 더 좁습니다. 이 원리들은 선택의 정의역이 집합이어야 한다고 요구하기 때문입니다. 따라서 A가 집합이 아니라면(예를 들어 유니버스 $\mathcal{U}$라면), $f(a)$를 정의하는 데 쓸 B의 원소를 각 $a : A$마다 그냥 골라 줄 수 있는 무모순적인 형태의 선택 원리는 존재하지 않습니다.

3.10 명제는 언제 절단됩니까?

처음 보면 $+$와 Σ의 절단된 버전이 절단되지 않은 버전보다 "또는"과 "존재한다"의 비형식적인 수학적 의미에 실제로 더 가까워 보일 수 있습니다. 확실히 절단된 버전은 형식적 집합론의 바탕이 되는 1차 논리에서 "또는"과 "존재한다"가 갖는 엄밀한 의미에 더 가깝습니다. 1차 논리는 명제가 참이라는 증거를 전혀 기억하려 하지 않기 때문입니다. 그러나 비형식적 수학의 실제 관행은 절단되지 않은 형태로 더 정확하게 기술되는 경우가 많다는 사실을 알게 되면 놀랄 수도 있습니다.

예를 들어 "모든 소수는 2이거나 홀수입니다"와 같은 진술을 생각해 봅시다. 현업 수학자는 이 사실을 소수에 관한 정리를 증명하는 데뿐만 아니라 소수에 대한 구성을 수행하는 데에도 거리낌 없이 사용합니다. 예컨대 2인 경우에는 어떤 일을 하고 홀수인 소수인 경우에는 다른 일을 하는 식입니다. 이러한 구성의 최종 결과는 단순히 어떤 진술이 참이라는 사실이 아니라, 소수의 홀짝성에 따라 달라질 수 있는 데이터 조각입니다. 따라서 타입 이론의 관점에서 이러한 구성은 쌍대곱 타입 "$(p = 2) + (p$는 홀수$)$"의 명제 절단이 아니라 이 타입 자체에 대한 귀납 원리를 사용하여 자연스럽게 표현됩니다.

사실 이것은 이상적인 예는 아닙니다. "$p = 2$"와 "p는 홀수"는 상호 배타적이어서 $(p = 2) + (p$는 홀수$)$는 실제로 이미 단순 명제이고, 따라서 그 절단과 동치이기 때문입니다(연습문제 3.7 참조). 더 설득력 있는 예는 존재 양화사에서 나옵니다. "…을 만족하는 x가 존재합니다" 형태의 정리를 증명한 뒤 나중에 "정리 Y에서 구성한 그 x"를 가리키는 일은 드물지 않습니다(정관사에 주목하십시오). 더 나아가 이 x의 추가 성질을 유도할 때 "정리 Y의 증명에서 x를 구성한 방식에 의해"와 같은 표현을 쓰기도 합니다.

매우 흔한 예로 "A는 B와 동형입니다"가 있으며, 이는 엄밀히 말해 A와 B 사이에 어떤 동형사상이 존재한다는 뜻일 뿐입니다. 그러나 이러한 진술을 증명할 때에는 거의 예외 없이 특정한 동형사상을 제시하거나 이전에 알려진 어떤 사상이 동형사상임을 증명하며, 구체적으로 어떤 동형사상이 주어졌는지가 나중에 중요해지는 경우가 많습니다.

집합론적으로 훈련받은 수학자들은 이러한 "언어의 남용"에 종종 약간의 죄책감을 느낍니다. 우리는 이에 대해 양해를 구하거나, 최종 원고에서 지워 버리거나, "표준적"과 같은 모호한 말로 얼버무리려 할 수도 있습니다. 형식화된 집합론에서는 엄밀히 말해 대상을 "구성"할 방법이 전혀 없다는 사실 때문에 문제는 더 심각해집니다 — 우리는 특정 성질을 가진 대상이 존재한다는 것만 증명할 수 있습니다. 따라서 타입 이론의 절단되지 않은 논리는 집합론적 재구성이 가려 버리는 비형식적 수학의 몇몇 흔한 관행을 포착합니다. (이는 유니밸런스 공리가 동형인 대상들을 동일시하는, 흔하지만 형식적으로는 정당화되지 않은 관행을 정당화하는 방식과 비슷합니다.)

반면 때로는 절단된 논리가 반드시 필요합니다. 우리는 이를 LEM 과 AC 의 진술에서 이미 보았으며, 이 책의 뒷부분에서도 다른 예가 나올 것입니다. 따라서 우리는 다음과 같은 문제에 직면합니다.

비형식적 타입 이론을 서술할 때 "또는"과 "존재합니다"라는 말(그리고 "있습니다"나 "얻습니다" 같은 흔한 동의어)을 무슨 뜻으로 써야 합니까?

보편적인 합의는 불가능할지도 모릅니다. 어떤 종류의 수학을 하느냐에 따라 한쪽 관례가 더 유용할 수도 있고, 어쩌면 관례의 선택이 무관할 수도 있습니다. 이 경우에는 수학 논문 첫머리에 짧게 언급해 두는 것만으로도 그 논문에서 사용하는 언어적 관례를 독자에게 충분히 알릴 수 있을 것입니다. 그러나 전체적인 관례를 하나 고른 뒤에도 다른 종류의 논리가 적어도 가끔은 나타나기 마련이므로, 그것을 가리킬 방법이 필요합니다. 더 일반적으로는 명제 절단을 이와 비슷하게 동작하는 타입에 대한 다른 연산으로 바꾸는 것을 고려할 수 있습니다. 예를 들어 이중 부정 연산 $A \mapsto \neg\neg A$나 제7장에서 다룰 n-절단이 있습니다. 서술 방식에 대한 실험으로서, 이하에서는 명제 절단과 같은 "모달리티"의 적용을 나타내기 위해 가끔 부사를 사용하겠습니다.

예를 들어 절단되지 않은 논리가 기본 관례라면, 명제 절단을 나타내기 위해 부사 **단순히** 를 사용할 수 있습니다. 따라서 다음 구절은

"$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 단순히 존재합니다"

타입 $\left\|\sum_{(x:A)} P(x)\right\|$를 나타냅니다. 마찬가지로 타입 A의 명제 절단 $\|A\|$가 거주된다는 뜻으로(즉, 그 절단의 이름 없는 원소를 하나 가지고 있다는 뜻으로), A가 **단순히 거주된다** 고 말하겠습니다. 이것은 우리의 비형식적 수학 영어에서 사용할 부사 "단순히"의 정의라는 점에 유의하십시오. 이는 "군"이나 "환" 같은 명사와 "정칙"이나 "정규" 같은 형용사가 엄밀한 수학적 의미를 갖도록 정의하는 것과 같은 방식입니다. 우리는 "단순히"의 사전적 정의가 명제 절단을 가리킨다고 주장하는 것이 아닙니다. 이 단어를 고른 것은 단순 명제에는 "단순히" 진릿값의 정보만 담겨 있을 뿐 그 이상은 없다는 점을 수학자 독자에게 상기시키기 위해서일 뿐입니다.

반면 절단된 논리가 현재의 기본 관례라면, 절단이 없음을 나타내기 위해 **순수하게** 나 **구성적으로** 같은 부사를 사용할 수 있습니다. 그러면 다음 구절은

"$P(x)$를 만족하는 $x : A$가 순수하게 존재합니다"

타입 $\sum_{(x:A)} P(x)$를 나타내게 됩니다. 또한 절단되지 않은 논리가 기본 관례인 경우에도 절단이 없음을 강조하기 위해 "순수하게"나 "실제로"를 사용할 수 있습니다.

이 책에서는 여러 이유로 절단되지 않은 논리를 계속 기본 관례로 사용하겠습니다.

(1) 처음 접하는 독자가 더 익숙하다는 이유만으로 절단된 논리를 고수하기보다는 절단되지 않은 논리를 직접 시험해 보기를 권하고자 합니다.

(2) 타입 이론에서 절단된 논리를 기본으로 사용하면 집합론적 기초와 같은 종류의 "언어의 남용" 문제를 겪게 되는데, 절단되지 않은 논리는 이를 피할 수 있습니다. 예를 들어 우리는 "$A \simeq B$"를 그 명제 절단이 아니라 A와 B 사이의 동치들의 타입으로 정의했습니다. 따라서 "$A \simeq B$" 형태의 정리를 증명한다는 것은 말 그대로 그러한 특정 동치를 구성한다는 뜻입니다. 이렇게 구성한 특정 동치는 나중에 다시 참조할 수 있습니다.

(3) "단순 명제"라는 개념이 타입 이론의 근본적인 부분이 아니라는 점을 강조하고자 합니다. 제7장에서 보겠지만, 단순 명제는 무한한 사다리의 두 번째 단에 불과합니다. 또한 이 사다리 위에 전혀 놓이지 않는 다른 모달리티도 많이 있습니다.

(4) 고전적으로는 단순 명제인 많은 진술이 호모토피 타입 이론에서는 더 이상 그렇지 않습니다. 물론 그 가운데 가장 대표적인 것은 등식입니다.

(5) 반면 호모토피 타입 이론에서 얻은 가장 흥미로운 관찰 가운데 하나는, 놀라울 만큼 많은 타입이 절단 없이도 자동으로 단순 명제이거나 약간만 수정하면 단순 명제가 된다는 것입니다. (보조정리 3.3.5 및 장 4, 7, 9 및 10를 참조하십시오.) 따라서 이러한 타입에는 진릿값 이상의 데이터가 들어 있지 않지만, 명제 절단의 귀납 원리를 사용할 필요가 없으므로 이 타입들을 사용하여 절단되지 않은 대상을 구성할 수 있습니다. 모든 진술에 기본적으로 명제 절단을 적용하면 이 유용한 사실을 표현하기가 더 번거로워집니다.

(6) 마지막으로, 이 책에서 다룰 수학의 대부분에서는 절단이 그다지 유용하지 않으므로, 절단이 나타날 때 명시적으로 표기하는 편이 더 간단합니다.

3.11 축약 가능성

보조정리 3.3.2에서 원소가 존재하는 단순 명제는 반드시 $\mathbf{1}$과 동치임을 관찰하였으며, 그 역도 성립함을 어렵지 않게 알 수 있습니다. 이러한 성질을 갖는 타입을 축약 가능하다고 합니다. 축약 가능성에 대한 또 다른 동치인 정의는 다음과 같으며, 이 정의 역시 때때로 편리합니다.

정의 3.11.1. 타입 A에 대하여 **축약 중심**이라고 불리는 $a : A$가 존재하여 모든 $x : A$에 대해 $a = x$이면, A를 **축약 가능**하다고 하거나 **한원소**라고 합니다. 주어진 경로 $a = x$를 contr_x로 나타냅니다.

다시 말해, 타입 $\mathsf{isContr}(A)$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{isContr}(A) :\equiv \sum_{(a:A)} \prod_{(x:A)} (a = x).$$

일반적인 명제-타입 대응 해석에서는 $\mathsf{isContr}(A)$를 "A는 정확히 하나의 원소를 포함한다"라고 읽을 수 있습니다. 더 정확하게는 "A는 원소를 하나 포함하고, A의 모든 원소는 그 원소와 같다"라고 읽을 수 있다는 점에 유의하십시오.

주 3.11.2. 또한 $\mathsf{isContr}(A)$를 좀 더 위상적으로 "모든 $x : A$에 대해 a에서 x로 가는 경로가 존재하는 점 $a : A$가 있음"이라고 읽을 수도 있습니다. 고전적인 관점에서 들으면 이것은 축약 가능성보다는 연결성의 정의처럼 들린다는 점에 유의하십시오. 요점은 이 문장에서 "존재함"의 의미가 연속적/자연적인 의미라는 것입니다.

연결성을 표현하는 더 나은 방법은 $\sum_{(a:A)} \prod_{(x:A)} \|a = x\|$일 것입니다. 이는 A에 기준점이 있다고 가정하면 실제로 올바른 표현이지만 — 보조정리 7.5.11 뒤의 설명을 참조하십시오 — 일반적으로 타입은 기준점이 없어도 연결되어 있을 수 있습니다. §7.5에서는 연결성을 n-연결성이라는 일반적인 개념의 $n = 0$인 경우로 정의할 것이며, 연습문제 7.6에서는 이 정의가 $\|A\|$와 $\prod_{(x,y:A)} \|x = y\|$를 모두 갖는 것과 동치임을 보이도록 독자에게 요청합니다.

보조정리 3.11.3. 타입 A에 대하여 다음은 논리적으로 동치입니다.

(i) A는 정의 3.11.1의 의미에서 축약 가능합니다.

(ii) A는 단순 명제이며, 점 $a : A$가 존재합니다.

(iii) A는 $\mathbf{1}$과 동치입니다.

증명. A가 축약 가능하면, A는 분명히 점 $a : A$(축약 중심)를 가지며, 임의의 $x, y : A$에 대해 $x = a = y$가 성립합니다. 따라서 A는 단순 명제입니다. 역으로, $a : A$가 있고 A가 단순 명제이면, 임의의 $x : A$에 대해 $x = a$가 성립합니다. 따라서 A는 축약 가능합니다. 그리고 보조정리 3.3.2에서 (ii)⇒(iii)을 보였으며, 그 역은 $\mathbf{1}$이 성질 (ii)을 쉽게 만족하므로 성립합니다. □

보조정리 3.11.4. 임의의 타입 A에 대하여, 타입 $\mathsf{isContr}(A)$는 단순 명제입니다.

증명. $c, c' : \mathsf{isContr}(A)$가 주어졌다고 가정합시다. $a, a' : A$와 $p : \prod_{(x:A)}(a = x)$ 및 $p' : \prod_{(x:A)}(a' = x)$에 대해 $c \equiv (a, p)$이고 $c' \equiv (a', p')$라고 가정할 수 있습니다. Σ-타입에서의 경로에 대한 특성화에 의해, $c = c'$을 보이려면 $q_*(p) = p'$을 만족하는 $q : a = a'$을 제시하는 것으로 충분합니다. $q :\equiv p(a')$로 택합니다. 이제 A는 (c 또는 c'에 의해) 축약 가능하므로, 보조정리 3.11.3에 의해 단순 명제입니다. 그러므로 보조정리 3.3.4 및 예 3.6.2에 의해 $\prod_{(x:A)}(a' = x)$ 역시 단순 명제입니다. 따라서 $q_*(p) = p'$은 자동으로 성립합니다. □

따름정리 3.11.5. A가 축약 가능하면, $\mathsf{isContr}(A)$ 역시 축약 가능합니다.

증명. 보조정리 3.11.4와 보조정리 3.11.3(ii)에 의해 성립합니다. □

단순 명제와 마찬가지로, 축약 가능한 타입은 많은 타입 생성자에 의해 보존됩니다. 예를 들어 다음이 성립합니다.

보조정리 3.11.6. $P : A \to \mathcal{U}$이 각 $P(a)$가 축약 가능한 타입 족이면, $\prod_{(x:A)} P(x)$는 축약 가능합니다.

증명. 각 $P(x)$가 단순 명제이므로, 예 3.6.2에 의해 $\prod_{(x:A)} P(x)$는 단순 명제입니다. 그런데 이 타입은 원소도 가지는데, 바로 각 $x : A$를 $P(x)$의 축약 중심으로 보내는 함수입니다. 따라서 보조정리 3.11.3(ii)에 의해 $\prod_{(x:A)} P(x)$는 축약 가능합니다. □

(사실 보조정리 3.11.6의 진술은 함수 외연성 공리와 동치입니다. 자세한 내용은 §4.9를 참조하십시오.)

물론 A가 B와 동치이고 A가 축약 가능하면 B도 축약 가능합니다. 더 일반적으로는 B가 A의 수축 대상이기만 하면 충분합니다. 정의에 따르면 **수축** 은 다음 조건을 만족하는 함수 $r : A \to B$입니다. 그 조건은 **단면** 이라고 불리는 함수 $s : B \to A$와 호모토피 $\epsilon : \prod_{(y:B)}(r(s(y)) = y)$가 존재한다는 것입니다. 이때 B를 A의 **수축 대상**이라고 합니다.

보조정리 3.11.7. B가 A의 레트랙트이고 A가 축약 가능하면, B 역시 축약 가능합니다.

증명. $a_0 : A$를 축약 중심이라고 합시다. $b_0 :\equiv r(a_0) : B$가 B의 축약 중심이라고 주장합니다. $b : B$라고 합시다. 경로 $b = b_0$이 필요합니다. 그런데 $\epsilon_b : r(s(b)) = b$와 $\mathsf{contr}_{s(b)} : s(b) = a_0$이 있으므로, 합성에 의해

$$\epsilon_b{}^{-1} \cdot r\left(\mathsf{contr}_{s(b)}\right) : b = r(a_0) \equiv b_0.$$

□

축약 가능한 타입은 모두 $\mathbf{1}$과 동치이므로 그다지 흥미롭지 않아 보일 수 있습니다. 이 개념이 유용한 한 가지 이유는, 개별적으로는 자명하지 않은 데이터들의 모임이 때때로 전체적으로는 축약 가능한 타입을 이루기 때문입니다. 중요한 예로 한쪽 끝점이 자유로운 경로들의 공간이 있습니다. §5.8에서 보겠지만, 이 사실은 본질적으로 동일성 타입에 대한 기점 경로 귀납법 원리를 담고 있습니다.

보조정리 3.11.8. 임의의 A와 임의의 $a : A$에 대하여, 타입 $\sum_{(x:A)}(a = x)$는 축약 가능합니다.

증명. 점 (a, refl_a)를 중심으로 택합니다. 이제 $(x, p) : \sum_{(x:A)}(a = x)$라고 가정합시다. 우리는 $(a, \mathsf{refl}_a) = (x, p)$임을 보여야 합니다. Σ-타입에서의 경로에 대한 특성화에 의해, $q_*(\mathsf{refl}_a) = p$를 만족하는 $q : a = x$를 제시하는 것으로 충분합니다. 그런데 $q :\equiv p$로 택할 수 있으며, 이 경우 $q_*(\mathsf{refl}_a) = p$는 경로 타입에서의 수송에 대한 특성화로부터 따라 나옵니다. □

이런 경우에는 축약 가능한 데이터는 자유롭게 무시할 수 있다는 비형식적 원리를 이용하여, 복잡한 구성을 동치에 이르기까지 단순화할 수 있습니다. 이 원리는 많은 보조정리로 이루어지며, 그 대부분은 독자에게 맡깁니다. 다음은 그 한 예입니다.

보조정리 3.11.9. $P : A \to \mathcal{U}$를 타입 족이라고 합시다.

(i) 각 $P(x)$가 축약 가능하면, $\sum_{(x:A)} P(x)$는 A와 동치입니다.
(ii) A가 중심 a를 가지는 축약 가능 타입이면, $\sum_{(x:A)} P(x)$는 $P(a)$와 동치입니다.

증명. (i)의 상황에서, $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} P(x) \to A$가 동치임을 보입니다. 준역원으로 $g(x) :\equiv (x, c_x)$를 정의하는데, 여기서 c_x는 $P(x)$의 중심입니다. 합성 $\mathsf{pr}_1 \circ g$는 자명하게 id_A이며, 반대 방향의 합성은 각 $P(x)$의 축약을 사용하여 항등 함수와 호모토픽합니다.

항목 (ii)의 증명은 독자에게 맡깁니다(연습문제 3.20 참조). □

축약 가능한 타입이 흥미로운 또 다른 이유는 §3.1에서 언급한 n-타입의 사다리를 아래쪽으로 한 단계 더 확장한다는 점입니다.

보조정리 3.11.10. 타입 A가 단순 명제일 필요충분조건은 모든 $x, y : A$에 대하여 타입 $x =_A y$가 축약 가능한 것입니다.

증명. "충분성"에 대해서는, 모든 축약 가능 타입이 원소를 가진다는 점만 관찰하면 됩니다. "필요성"에 대해서는, §3.3에서 모든 단순 명제가 집합임을 관찰하였으므로 각 타입 $x =_A y$는 단순 명제입니다. 그런데 이 타입은 (A가 단순 명제이므로) 원소도 가지므로, 보조정리 3.11.3(ii)에 의해 축약 가능합니다. □

따라서 축약 가능한 타입은 (-2)-**타입**이라고도 부를 수 있습니다. 이들은 n-타입 사다리의 가장 아래 단이며, 제7장에서 n-타입의 재귀적 정의의 기저 사례가 될 것입니다.

주

§§3.1, 3.3 및 3.11에서처럼 모든 고차 호모토피가 자동으로 처리되는 방식으로 타입 이론에서 집합, 단순 명제, 축약 가능한 타입을 정의할 수 있다는 사실은 Voevodsky가 처음 관찰하였습니다. 실제로 그는 제7장에서 우리가 할 것처럼 n-타입의 위계 전체를 귀납으로 정의하였습니다.

정리 3.2.2 및 따름정리 3.2.7는 본질적으로 헤드베리의 고전적인 정리에 의존하며, 이 정리는 §7.2에서 증명할 것입니다. 명제-타입 대응 형태의 LEM 이 유니밸런스와 모순된다는 함의는 Martín Escardó가 Agda 메일링 리스트에서 관찰하였습니다. 우리가 제시한 정리 3.2.2의 증명은 Thierry Coquand에 의한 것입니다.

명제 절단은 1983년 Constable [Con85]이 "부분집합" 타입과 "몫" 타입의 응용으로서 NuPRL의 외연적 타입 이론에 도입하였습니다. 여기서 "명제 절단"이라고 부르는 것은 NuPRL 타입 이론 [CAB+86]에서 "squashing"이라고 불렸습니다. 여전히 외연적 타입 이론 안에서, 명제 절단을 직접 특성화하는 규칙이 문헌 [AB04]에서 주어졌습니다. 호모토피 타입 이론에서의 내포적 버전은 Voevodsky가 비술어적 양화를 이용하여 구성하였고, 이후 Lumsdaine이 고차 귀납적 타입을 이용하여 구성하였습니다(§6.9 참조).

Voevodsky [Voe12]는 §3.5에서 고려한 종류의 크기 재조정 규칙을 제안하였습니다. 이 규칙들은 Russell이 Whitehead와 함께 저술한 Principia Mathematica [WR27]에서 제안한 악명 높은 환원 가능성 공리와 분명히 관련되어 있습니다.

절단되지 않은 논리를 가리키는 데 사용된 부사 "순수하게"는 프로그래밍 언어에서 효과를 모델링하기 위해 모나드적 모달리티를 사용하는 것을 가리킵니다. §7.7와 제7장의 주석을 참조하십시오.

타입 이론에서 논리를 다루는 방식은 여러 가지가 있습니다. 예를 들어, §1.11에서 설명한 순수한 명제-타입 대응 논리와 §3.6에서 설명한 단순 명제만을 사용하는 대안 외에도, 명제를 위한 별도의 "종류(sort)"를 도입할 수 있습니다. 이 명제들은 타입과 어느 정도 비슷하게 동작하지만 타입과 동일시되지는 않습니다. 이는 논리 강화 타입 이론 [AG02]과 토포스 및 관련 범주의 내부 언어에 대한 일부 표현(예: [Jac99, Joh02]), 그리고 증명 보조기 Coq 에서 취하는 접근 방식입니다. 이러한 접근 방식은 더 일반적이지만 덜 강력합니다. 예를 들어, 유일 선택 원리(§3.9)는 Coq 의 이른바 세토이드 범주 [Spi11], 논리 강화 타입 이론 [AG02], 그리고 최소 타입 이론 [MS05]에서 성립하지 않습니다. 따라서 유니밸런스 공리는 우리의 타입 이론이 토포스의 내부 논리에 더 가깝게 동작하도록 만듭니다. 제10장도 참조하십시오.

Martin-Löf [ML06]는 선택 공리의 역사에 대한 논의를 제공합니다. 물론 구성적 수학과 직관주의 수학은 길고 복잡한 역사를 가지고 있으며, 여기서는 이를 깊이 다루지 않겠습니다. 예를 들어 [TvD88a, TvD88b]를 참조하십시오.

연습문제

연습문제 3.1. $A \simeq B$이고 A가 집합이면 B도 집합임을 증명하십시오.

연습문제 3.2. A와 B가 집합이면 $A + B$도 집합임을 증명하십시오.

연습문제 3.3. A가 집합이고 $B : A \to \mathcal{U}$가 모든 $x : A$에 대해 $B(x)$가 집합인 타입 족이면, $\sum_{(x:A)} B(x)$가 집합임을 증명하십시오.

연습문제 3.4. A가 단순 명제일 필요충분조건은 $A \to A$가 축약 가능한 것임을 보이십시오.

연습문제 3.5. $\mathsf{isProp}(A) \simeq (A \to \mathsf{isContr}(A))$ 임을 보이십시오.

연습문제 3.6. A가 단순 명제이면 $A + (\neg A)$도 단순 명제임을 보이십시오. 따라서 (3.4.1)에 명제 절단을 넣을 필요가 없습니다.

연습문제 3.7. 더 일반적으로, A와 B가 단순 명제이고 $\neg(A \times B)$이면 $A + B$도 단순 명제임을 보이십시오.

연습문제 3.8. 어떤 타입 $\mathsf{isequiv}(f)$가 §2.4의 조건 (i)–(iii)을 만족한다고 가정할 때, 타입 $\|\mathsf{qinv}(f)\|$도 같은 조건을 만족하며 $\mathsf{isequiv}(f)$와 동치임을 보이십시오.

연습문제 3.9. LEM 이 성립하면 타입 $\mathsf{Prop} :\equiv \sum_{(A:\mathcal{U})} \mathsf{isProp}(A)$가 $\mathbf{2}$ 타입과 동치임을 보이십시오.

연습문제 3.10. $\mathcal{U}_{i+1}$이 LEM 을 만족하면 표준 포함 사상 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i} \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_{i+1}}$이 동치임을 보이십시오.

연습문제 3.11. 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $\|A\| \to A$가 성립하지는 않음을 보이십시오. (그러나 $\|A\| \to A$가 성립하는 특정한 타입은 있을 수 있습니다. 연습문제 3.8에 따르면 $\mathsf{qinv}(f)$가 그러한 타입입니다.)

연습문제 3.12. LEM 이 성립하면 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $\big\|(\|A\| \to A)\big\|$가 성립함을 보이십시오. (이 성질은 선택 공리의 매우 단순한 형태로, LEM 이 없으면 성립하지 않을 수 있습니다. [KECA13]를 참조하십시오.)

연습문제 3.13. 따름정리 3.2.7에서 다음과 같은 소박한 형태의 LEM 이 유니밸런스와 양립하지 않음을 보였습니다:

$$\prod_{A:\mathcal{U}} (A + (\neg A))$$

유니밸런스가 없으면 이 공리는 무모순입니다. 그러나 이 공리가 선택 공리 (3.8.1)를 함의함을 보이십시오.

연습문제 3.14. LEM 을 가정하면 이중 부정 $\neg\neg A$가 명제 절단 $\|A\|$와 같은 재귀 원리를 가지되, 판단적 계산 규칙이 아닌 명제적 계산 규칙을 가짐을 보이십시오. 다시 말해, LEM 을 가정할 때 B가 단순 명제이고 $f : A \to B$가 주어지면, 모든 $a : A$에 대해 $g(|a|) = f(a)$를 만족하는 유도된 $g : \neg\neg A \to B$가 존재함을 증명하십시오. 이로부터 (LEM 을 가정하면) $\neg\neg A \simeq \|A\|$가 성립함을 이끌어 내십시오. 따라서 LEM 아래에서는 명제 절단을 별도의 타입 형성자로 도입하지 않고 정의할 수 있습니다.

연습문제 3.15.

(i) 임의의 $A : \mathcal{U}$에 대해 다음 타입이

$$\prod_{P:\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}} \Big((A \to P) \to P\Big)$$

적어도 $\mathcal{U}$에 속하는 명제에 대해서는 $\|A\|$와 같은 재귀 원리를 가지며, 같은 판단적 계산 규칙도 함께 가짐을 보이십시오.

(ii) 앞 부분에서 고려한 타입은 같은 유니버스 $\mathcal{U}$에 속하지 않으며, 그 재귀 원리는 $\mathcal{U}$ 안의 명제에만 적용됩니다. 명제적 크기 재조정을 가정하면, 비록 명제적 계산 규칙만 가지기는 하지만, 같은 유니버스 $\mathcal{U}$에 속하면서 $\|A\|$와 같은 재귀 원리를 만족하는 타입을 정의할 수 있음을 보이십시오. 따라서 이 경우에도 명제 절단을 정의할 수 있습니다.

연습문제 3.16. LEM 을 가정할 때, 이중 부정이 집합 위의 단순 명제에 대한 전칭 양화와 교환됨을 보이십시오. 즉, X가 집합이고 각 $Y(x)$가 단순 명제이면 LEM 이 다음을 함의함을 보이십시오.

$$\Big(\prod_{x:X} \neg\neg Y(x)\Big) \simeq \Big(\neg\neg \prod_{x:X} Y(x)\Big). \tag{3.11.11}$$

대신 각 $Y(x)$가 집합이라고 가정하면 (3.11.11)가 선택 공리 (3.8.3)와 동치가 됨을 확인하십시오.

연습문제 3.17. §3.7에서 주어진 명제 절단의 규칙들이 다음 귀납 원리를 함의하기에 충분함을 보이십시오: 각 $B(x)$가 단순 명제인 임의의 타입 족 $B : \|A\| \to \mathcal{U}$에 대하여, 모든 $a : A$에 대해 $B(|a|)$가 성립하면, 모든 $x : \|A\|$에 대해 $B(x)$가 성립합니다.

연습문제 3.18. 배중률 (3.4.1)과 이중 부정 법칙 (3.4.2)이 논리적으로 동치임을 보이십시오.

연습문제 3.19. $P : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$가 단순 명제들로 이루어진 결정 가능한 족(정의 3.4.3(ii) 참조)이라고 가정합시다. 다음을 증명하십시오.

$$\Big\|\sum_{n:\mathbb{N}} P(n)\Big\| \to \sum_{n:\mathbb{N}} P(n).$$

연습문제 3.20. 보조정리 3.11.9(ii)를 증명하십시오. A가 중심이 a인 축약 가능한 타입이면 $\sum_{(x:A)} P(x)$는 $P(a)$와 동치입니다.

연습문제 3.21. $\mathsf{isProp}(P) \simeq (P \simeq \|P\|)$임을 증명하십시오.

연습문제 3.22. 고전적 집합론에서와 마찬가지로, 선택 공리의 유한 버전은 정리입니다. X가 (연습문제 1.9에서 정의된) 유한 타입 $\mathsf{Fin}(n)$일 때 선택 공리 (3.8.1)가 성립함을 증명하십시오.

연습문제 3.23. $P : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$가 임의의 결정 가능한 족이어도 연습문제 3.19의 결론이 참임을 보이십시오.

연습문제 3.24. 먼저 모든 m, n에 대해 $\mathsf{code}(m, n)$이 단순 명제임을 증명하여 정리 2.13.1의 증명을 간단히 하십시오.

제4장

동치

이제 §2.4에서 간략히 소개한 타입의 동치 개념을 더 자세히 살펴봅니다. 구체적으로, 그곳에서 언급한 성질들을 갖는 타입 $\mathsf{isequiv}(f)$를 정의하는 여러 가지 방법을 제시하겠습니다. $\mathsf{isequiv}(f)$가 다음 성질들을 갖기를 원했다는 점을 상기하십시오. 여기서 그 성질들을 다시 서술합니다:

(i) $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{isequiv}(f)$.
(ii) $\mathsf{isequiv}(f) \to \mathsf{qinv}(f)$.
(iii) $\mathsf{isequiv}(f)$는 단순 명제입니다.

여기서 $\mathsf{qinv}(f)$는 f의 준역원들의 타입을 나타냅니다:

$$\sum_{g:B\to A} \big((f \circ g \sim \mathsf{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathsf{id}_A)\big).$$

함수 외연성에 의해 $\mathsf{qinv}(f)$는 다음 타입과 동치입니다:

$$\sum_{g:B\to A} \big((f \circ g = \mathsf{id}_B) \times (g \circ f = \mathsf{id}_A)\big).$$

성질 (i)–(iii)을 갖는 서로 다른 세 가지 타입을 정의할 것이며, 이들을 각각 다음과 같이 부릅니다:

- 반수반 동치,
- 양쪽 가역 사상, 그리고
- 축약 가능 함수.

또한 이 타입들이 모두 동치임을 보이겠습니다. 이 이름들은 의도적으로 다소 번거롭게 지은 것입니다. 이들이 모두 동치이며 성질 (i)–(iii)을 갖는다는 것을 알고 나면, 어떤 특정한 정의를 선택하는지 명시할 필요 없이 다시 간단히 "동치"라고 부를 것이기 때문입니다. 그러나 이 장에서 비교를 하기 위해서는 각 정의에 서로 다른 이름이 필요합니다.

그러나 여러 동치 개념을 살펴보기 전에, 왜 준가역성과는 다른 개념이 필요한지 조금 더 설명하겠습니다.

4.1 준역원

앞에서 $\mathsf{qinv}(f)$는 단순 명제가 아니기 때문에 만족스럽지 않다고 말했습니다. 주어진 함수가 "동치가 되는" 방법은 많아야 하나이기를 바라기 때문입니다. 그러나 $\mathsf{qinv}(f)$가 단순 명제가 아니라는 근거는 아직 제시하지 않았습니다. 이 절에서는 구체적인 반례를 제시합니다.

보조정리 4.1.1. $f : A \to B$에 대해 $\mathsf{qinv}(f)$가 거주된다면, 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{qinv}(f) \simeq \Big(\prod_{x:A}(x = x)\Big).$$

증명. 가정에 의해 f는 동치입니다. 즉, $e : \mathsf{isequiv}(f)$가 있으므로 $(f, e) : A \simeq B$입니다. 유니밸런스에 의해 $\mathsf{idtoeqv} : (A = B) \to (A \simeq B)$는 동치이므로, 어떤 $p : A = B$에 대해 (f, e)가 $\mathsf{idtoeqv}(p)$ 꼴이라고 가정할 수 있습니다. 그러면 경로 귀납법에 의해 p가 refl_A라고 가정할 수 있으며, 이 경우 f는 id_A입니다. 따라서 $\mathsf{qinv}(\mathsf{id}_A) \simeq (\prod_{(x:A)}(x = x))$를 증명하는 문제로 귀결됩니다. 이제 정의에 의해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{qinv}(\mathsf{id}_A) \equiv \sum_{g:A\to A} \big((g \sim \mathsf{id}_A) \times (g \sim \mathsf{id}_A)\big).$$

함수 외연성에 의해 이는 다음과 동치입니다.

$$\sum_{g:A\to A} \big((g = \mathsf{id}_A) \times (g = \mathsf{id}_A)\big).$$

그리고 연습문제 2.10에 의해 이는 다음과 동치입니다.

$$\sum_{h:\sum_{(g:A\to A)}(g=\mathsf{id}_A)} (\mathsf{pr}_1(h) = \mathsf{id}_A)$$

그런데 보조정리 3.11.8에 의해 $\sum_{(g:A\to A)}(g = \mathsf{id}_A)$는 중심이 $(\mathsf{id}_A, \mathsf{refl}_{\mathsf{id}_A})$인 축약 가능 타입입니다. 따라서 보조정리 3.11.9에 의해 이 타입은 $\mathsf{id}_A = \mathsf{id}_A$와 동치입니다. 그리고 함수 외연성에 의해 $\mathsf{id}_A = \mathsf{id}_A$는 $\prod_{(x:A)} x = x$와 동치입니다. □

연습문제 4.3에서는 유니밸런스를 사용하지 않는 위 보조정리의 증명을 요구한다는 점을 덧붙입니다.

따라서 필요한 것은 $\prod_{(x:A)}(x = x)$의 비자명한 원소를 갖는 어떤 A입니다. A를 고차 그루포이드로 생각하면, $\prod_{(x:A)}(x = x)$의 거주자는 A의 항등 함자에서 자기 자신으로 가는 자연 변환입니다. 이러한 변환들은 **범주의 중심**을 이룬다고 하는데, 이는 자연성 공리가 이 변환들이 모든 사상과 교환할 것을 요구하기 때문입니다. 고전적으로, A가 단순히 대상이 하나인 그루포이드로 간주한 군이라면, 이는 정확히 통상적인 군론적 의미에서의 중심이 됩니다. 이것이 다음 내용에 대한 어느 정도의 동기를 제공합니다.

보조정리 4.1.2. $a : A$와 $q : a = a$를 가지며 다음을 만족하는 타입 A가 있다고 가정합시다.

(i) 타입 $a = a$는 집합입니다.
(ii) 모든 $x : A$에 대해 $\|a = x\|$가 성립합니다.
(iii) 모든 $p : a = a$에 대해 $p \cdot q = q \cdot p$가 성립합니다.

그러면 $f(a) = q$를 만족하는 $f : \prod_{(x:A)}(x = x)$가 존재합니다.

증명. $g : \prod_{(x:A)}\|a = x\|$를 (ii)에서 주어진 것이라고 합시다. 먼저 각 타입 $x =_A y$가 집합임을 관찰합니다. 집합이라는 성질은 단순 명제이므로, 명제 절단의 귀납 원리를 적용하여 $p : a = x$와 $p' : a = y$에 대해 $g(x) = |p|$이고 $g(y) = |p'|$라고 가정할 수 있습니다. 이 경우 p 및 p'^{-1}와 합성하면 동치 $(x = y) \simeq (a = a)$를 얻습니다. 그런데 (i)에 의해 $(a = a)$는 집합이므로 $(x = y)$ 역시 집합입니다.

이제 각 x에 경로 $g(x)^{-1} \cdot q \cdot g(x)$를 대응시켜 f를 정의하고 싶지만, 이 방법은 통하지 않습니다. $g(x)$는 $a = x$가 아니라 $\|a = x\|$의 원소이고, 타입 $(x = x)$는 단순 명제가 아닐 수 있으므로 명제 절단에 대한 귀납법을 사용할 수 없기 때문입니다. 대신 §3.9에서 언급한 기법을 적용할 수 있습니다. 즉, 구성하고자 하는 대상을 유일하게 특징짓는 것입니다. 각 $x : A$에 대해 다음 타입을 정의합시다.

$$B(x) :\equiv \sum_{(r:x=x)} \prod_{(s:a=x)} (r = s^{-1} \cdot q \cdot s).$$

각 $x : A$에 대해 $B(x)$가 단순 명제라고 주장합니다. 이 주장 자체가 단순 명제이므로, 다시 절단에 대한 귀납법을 적용하여 어떤 $p : a = x$에 대해 $g(x) = |p|$라고 가정할 수 있습니다. 이제 $B(x)$의 원소 (r, h)와 (r', h')가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$h(p) \cdot h'(p)^{-1} : r = r'.$$

이제 이 등식을 따라 수송한 h가 h'와 동일시됨을 보이는 일이 남았으며, 이는 동일성 타입과 함수 타입에서의 수송(§§2.9 및 2.11)에 의해 다음을 보이는 것으로 귀결됩니다.

$$h(s) = h(p) \cdot h'(p)^{-1} \cdot h'(s)$$

여기서 $s : a = x$는 임의입니다. 그런데 이 식의 양변은 각각 $(x = x)$의 원소들 사이의 등식이므로, $(x = x)$가 집합이라는 앞의 관찰로부터 결론이 따라 나옵니다.

따라서 각 $B(x)$는 단순 명제입니다. 이제 $\prod_{(x:A)} B(x)$가 성립한다고 주장합니다. $x : A$가 주어지면, 이제 명제 절단의 귀납 원리를 사용하여 $p : a = x$에 대해 $g(x) = |p|$라고 가정할 수 있습니다. $r :\equiv p^{-1} \cdot q \cdot p$로 정의합니다. $B(x)$의 원소를 구성하려면 임의의 $s : a = x$에 대해 $r = s^{-1} \cdot q \cdot s$임을 보이는 일이 남습니다. 경로를 조작하면 이는 $q \cdot (p \cdot s^{-1}) = (p \cdot s^{-1}) \cdot q$임을 보이는 것으로 귀결됩니다. 그런데 이는 (iii)의 한 사례에 불과합니다. □

정리 4.1.3. $\mathsf{qinv}(f)$가 단순 명제가 아니게 되는 타입 A와 B, 그리고 함수 $f : A \to B$가 존재합니다.

증명. $\prod_{(x:X)}(x = x)$가 단순 명제가 아니게 되는 타입 X를 제시하면 충분합니다. 보조정리 3.8.5의 증명에서와 같이 $X :\equiv \sum_{(A:\mathcal{U})}\|\mathbf{2} = A\|$로 정의합니다. $\lambda x.\, \mathsf{refl}_x$와 같지 않은 $f : \prod_{(x:X)}(x = x)$를 제시하면 충분할 것입니다.

$a :\equiv (\mathbf{2}, |\mathsf{refl}_{\mathbf{2}}|) : X$라 하고, $q : a = a$를 $e(0_{\mathbf{2}}) :\equiv 1_{\mathbf{2}}$와 $e(1_{\mathbf{2}}) :\equiv 0_{\mathbf{2}}$로 정의되는 비항등 동치 $e : \mathbf{2} \simeq \mathbf{2}$에 대응하는 경로라 합시다. f를 구성하기 위해 보조정리 4.1.2를 적용하고자 합니다. X의 정의, 부분집합 타입에서의 상등(§3.5), 그리고 유니밸런스에 의해 $(a = a) \simeq (\mathbf{2} \simeq \mathbf{2})$이고 이는 집합이므로, (i)이 성립합니다. 마찬가지로 X의 정의와 부분집합 타입에서의 상등에 의해 (ii)를 얻습니다. 마지막으로 연습문제 2.13에 의해 모든 동치 $\mathbf{2} \simeq \mathbf{2}$는 $\mathsf{id}_{\mathbf{2}}$ 또는 e 중 하나와 같으므로, 네 가지 경우에 대한 경우 분석으로 (iii)을 보일 수 있습니다.

따라서 $f(a) = q$를 만족하는 $f : \prod_{(x:X)}(x = x)$를 얻습니다. e는 $\mathsf{id}_{\mathbf{2}}$와 같지 않으므로 q는 refl_a와 같지 않으며, 따라서 f는 $\lambda x.\, \mathsf{refl}_x$와 같지 않습니다. 그러므로 $\prod_{(x:X)}(x = x)$는 단순 명제가 아닙니다. □

더 일반적으로, 보조정리 4.1.2에 의해 G가 자명하지 않은 아벨 군인 임의의 "Eilenberg–Mac Lane 공간" $K(G,1)$은 반례가 됩니다. 제8장를 참고하십시오. 우리가 사용한 타입 X는 $K(\mathbb{Z}_2,1)$과 동치임이 밝혀집니다. 제6장에서는 원 $\mathbb{S}^1 = K(\mathbb{Z},1)$이 설명하기 쉬운 또 다른 예임을 보게 될 것입니다.

이제 더 나은 동치 개념들을 설명하는 것으로 넘어갑니다.

4.2 반수반 동치

§4.1에서 우리는 축약 가능한 타입을 버림으로써 $\mathsf{qinv}(f)$가 $\prod_{(x:A)}(x = x)$와 동치라는 결론을 내렸습니다. 대략적으로 말하면, 타입 $\mathsf{qinv}(f)$는 세 개의 데이터 g, η, ϵ을 포함하며, 그중 두 개(g와 η)는 f가 동치일 때 함께 축약 가능함을 알 수 있었습니다. 문제는 이 데이터를 제거하고 나면 하나(ϵ)가 남는다는 점입니다. 이 문제를 해결하기 위한 발상은, ϵ과 함께 축약 가능한 타입을 이루는 추가적인 데이터 하나를 더하는 것입니다.

정의 4.2.1. 함수 $f : A \to B$에 대해 $g : B \to A$와 호모토피 $\eta : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$ 및 $\epsilon : f \circ g \sim \mathsf{id}_B$가 존재하여 다음과 같은 호모토피가 존재하면, f를 **반수반 동치**라고 합니다.

$$\tau : \prod_{x:A} f(\eta x) = \epsilon(fx).$$

따라서 다음과 같이 정의되는 타입 $\mathsf{ishae}(f)$를 얻습니다.

$$\sum_{(g:B\to A)} \sum_{(\eta:g\circ f\sim \mathsf{id}_A)} \sum_{(\epsilon:f\circ g\sim \mathsf{id}_B)} \prod_{(x:A)} f(\eta x) = \epsilon(fx).$$

위의 정의에서 η와 ϵ을 연관 짓는 정합성 조건에는 f만 관여한다는 점에 유의하십시오. 대신 g가 관여하는 유사한 정합성 조건을 생각해 볼 수도 있습니다.

$$\upsilon : \prod_{y:B} g(\epsilon y) = \eta(gy)$$

그리고 그로부터 얻어지는 유사한 정의 $\mathsf{ishae}'(f)$도 생각할 수 있습니다.

다행히도 각 조건이 다른 조건을 함의한다는 것이 밝혀집니다.

보조정리 4.2.2. 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to A$, 그리고 호모토피 $\eta : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$와 $\epsilon : f \circ g \sim \mathsf{id}_B$에 대해 다음 조건들은 논리적으로 동치입니다.

- $\prod_{(x:A)} f(\eta x) = \epsilon(fx)$
- $\prod_{(y:B)} g(\epsilon y) = \eta(gy)$

증명. 한 방향만 보이면 충분합니다. 다른 방향은 A, f, η를 각각 B, g, ϵ으로 바꾸어 얻을 수 있습니다. $\tau : \prod_{(x:A)} f(\eta x) = \epsilon(fx)$라고 합시다. $y : B$를 고정합시다. ϵ의 자연성을 사용하고 g를 적용하면 다음과 같은 경로들의 가환 도표를 얻습니다.

$$\begin{array}{ccc} gfgfgy & \xrightarrow{gfg(\epsilon y)} & gfgy \\ {\scriptstyle g(\epsilon(fgy))}\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow{\scriptstyle g(\epsilon y)} \\ gfgy & \xrightarrow[g(\epsilon y)]{} & gy \end{array}$$

도표의 왼쪽에 $\tau(gy)$를 사용하면 다음을 얻습니다.

$$\begin{array}{ccc} gfgfgy & \xrightarrow{gfg(\epsilon y)} & gfgy \\ {\scriptstyle gf(\eta(gy))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(\epsilon y)} \\ gfgy & \xrightarrow[g(\epsilon y)]{} & gy \end{array}$$

η와 $g \circ f$의 가환성(따름정리 2.4.4)을 사용하면 다음이 성립합니다.

$$\begin{array}{ccc} gfgfgy & \xrightarrow{gfg(\epsilon y)} & gfgy \\ {\scriptstyle \eta(gfgy)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(\epsilon y)} \\ gfgy & \xrightarrow[g(\epsilon y)]{} & gy \end{array}$$

그러나 η의 자연성에 의해 다음도 성립합니다.

$$\begin{array}{ccc} gfgfgy & \xrightarrow{gfg(\epsilon y)} & gfgy \\ {\scriptstyle \eta(gfgy)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta(gy)} \\ gfgy & \xrightarrow[g(\epsilon y)]{} & gy \end{array}$$

따라서 오른쪽 호모토피를 제외한 모든 것을 소거하면, 원하던 대로 $g(\epsilon y) = \eta(gy)$를 얻습니다. □

그러나 $\mathsf{ishae}(f)$의 정의에 τ와 v을 둘 다 포함하지 않는 것이 중요합니다("반 수반 동치"라는 이름은 여기서 유래합니다). 둘 다 포함하면 또 다른 고차 정합성 조건을 추가하지 않는 한 축약 가능한 타입들을 소거한 뒤에도 자료 하나가 여전히 남게 됩니다. 일반적으로 홀수 개의 정합성 조건 뒤에서 끊으면 성질이 좋은 타입을 얻을 것으로 기대할 수 있습니다.

물론 $\mathsf{ishae}(f) \to \mathsf{qinv}(f)$임은 자명합니다. 정합성 자료를 그냥 잊으면 됩니다. 반대 방향은 호모토피 이론과 범주론의 표준적인 논증을 변형한 것입니다.

정리 4.2.3. 임의의 $f : A \to B$에 대해 $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{ishae}(f)$가 성립합니다.

증명. (g, η, ϵ)이 f의 준역원이라고 가정합시다. f가 반수반 동치임을 보여 주는 사중쌍 $(g', \eta', \epsilon', \tau)$를 제시해야 합니다. g'과 η'을 정의할 때는 $g' :\equiv g$, $\eta' :\equiv \eta$로 두어 자명한 선택을 하면 됩니다. 그러나 ϵ'을 정의할 때는 τ의 구성을 염두에 두어야 하므로, 단순히 직관을 따라 ϵ'을 ϵ으로 잡을 수는 없습니다. 대신 다음과 같이 잡습니다.

$$\epsilon'(b) :\equiv \epsilon(f(g(b)))^{-1} \cdot (f(\eta(g(b))) \cdot \epsilon(b)).$$

이제 다음을 찾아야 합니다.

$$\tau(a) : f(\eta(a)) = \epsilon(f(g(f(a))))^{-1} \cdot (f(\eta(g(f(a)))) \cdot \epsilon(f(a))).$$

먼저 따름정리 2.4.4에 의해 다음이 성립함에 주목하십시오. $\eta(g(f(a))) = g(f(\eta(a)))$ 입니다. 따라서 보조정리 2.4.3을 적용하여 다음을 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} f(\eta(g(f(a)))) \cdot \epsilon(f(a)) &= f(g(f(\eta(a)))) \cdot \epsilon(f(a)) \\ &= \epsilon(f(g(f(a)))) \cdot f(\eta(a)) \end{aligned}$$

이로부터 원하는 경로 $\tau(a)$를 얻습니다. □

이를 보조정리 4.2.2와 결합하면(또는 증명을 대칭적으로 바꾸면) $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{ishae}'(f)$도 성립합니다.

이제 $\mathsf{ishae}(f)$가 단순 명제임을 보이는 일이 남았습니다. 이를 위해서는 동치의 섬유가 축약 가능하다는 사실이 필요합니다.

정의 4.2.4. 사상 $f : A \to B$의 점 $y : B$ 위의 **섬유** 는 다음과 같습니다.

$$\mathsf{fib}_f(y) :\equiv \sum_{x:A} (f(x) = y).$$

호모토피 이론에서는 이것을 f의 호모토피 섬유라고 부릅니다. §2.5의 경로 보조정리들로부터 섬유 안의 경로를 다음과 같이 특징지을 수 있습니다.

보조정리 4.2.5. 임의의 $f : A \to B$, $y : B$, 그리고 $(x, p), (x', p') : \mathsf{fib}_f(y)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\big((x, p) = (x', p')\big) \simeq \Big(\sum_{\gamma : x = x'} f(\gamma) \cdot p' = p\Big)$$

정리 4.2.6. $f : A \to B$가 반수반 동치이면, 임의의 $y : B$에 대해 섬유 $\mathsf{fib}_f(y)$는 축약 가능합니다.

증명. $(g, \eta, \epsilon, \tau) : \mathsf{ishae}(f)$라 하고 $y : B$를 고정합시다. $\mathsf{fib}_f(y)$의 축약 중심으로 $(gy, \epsilon y)$를 택합니다. 이제 임의의 $(x, p) : \mathsf{fib}_f(y)$를 잡고, $(gy, \epsilon y)$에서 (x, p)로 가는 경로를 구성하려고 합니다. 보조정리 4.2.5에 의해 $f(\gamma) \cdot p = \epsilon y$를 만족하는 경로 $\gamma : gy = x$를 제시하면 충분합니다. $\gamma :\equiv g(p)^{-1} \cdot \eta x$로 둡니다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} f(\gamma) \cdot p &= fg(p)^{-1} \cdot f(\eta x) \cdot p \\ &= fg(p)^{-1} \cdot \epsilon(fx) \cdot p \\ &= \epsilon y \end{aligned}$$

여기서 두 번째 등식은 τx에 의해 성립하고, 세 번째 등식은 ϵ의 자연성입니다. □

이제 축약 가능한 자료 쌍을 담아내는 타입들을 정의합니다. 다음 타입들은 준역원 g를 호모토피 중 하나와 묶은 것입니다.

정의 4.2.7. 함수 $f : A \to B$가 주어졌을 때, 다음 타입들을 정의합니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{linv}(f) &:\equiv \sum_{g : B \to A} (g \circ f \sim \mathsf{id}_A) \\ \mathsf{rinv}(f) &:\equiv \sum_{g : B \to A} (f \circ g \sim \mathsf{id}_B) \end{aligned}$$

이들은 각각 f의 **왼쪽 역원** 과 **오른쪽 역원** 의 타입입니다. $\mathsf{linv}(f)$에 원소가 존재하면 f를 **왼쪽 가역** 이라 하고, 마찬가지로 $\mathsf{rinv}(f)$에 원소가 존재하면 **오른쪽 가역** 이라 합니다.

보조정리 4.2.8. $f : A \to B$가 준역원을 가지면, 다음도 준역원을 가집니다.

$$(f \circ -) : (C \to A) \to (C \to B)$$
$$(- \circ f) : (B \to C) \to (A \to C).$$

증명. g가 f의 준역원이면, $(g \circ -)$와 $(- \circ g)$는 각각 $(f \circ -)$와 $(- \circ f)$의 준역원입니다. □

보조정리 4.2.9. $f : A \to B$가 준역원을 가지면, 타입 $\mathsf{rinv}(f)$와 $\mathsf{linv}(f)$는 축약 가능합니다.

증명. 함수 외연성에 의해 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{linv}(f) \simeq \sum_{g:B\to A} (g \circ f = \mathsf{id}_A).$$

그런데 이것은 id_A 위에서의 $(- \circ f)$의 섬유이므로, 보조정리 4.2.8 및 정리 4.2.3 및 4.2.6에 의해 축약 가능합니다. 마찬가지로 $\mathsf{rinv}(f)$는 id_B 위에서의 $(f \circ -)$의 섬유와 동치이며, 따라서 축약 가능합니다. □

다음으로, 나머지 호모토피와 추가적인 정합성 데이터를 한데 묶는 타입들을 정의합니다.

정의 4.2.10. $f : A \to B$, 왼쪽 역 $(g, \eta) : \mathsf{linv}(f)$, 오른쪽 역 $(g, \epsilon) : \mathsf{rinv}(f)$에 대하여 다음과 같이 표기합니다.

$$\mathsf{lcoh}_f(g, \eta) :\equiv \sum_{(\epsilon : f\circ g \sim \mathsf{id}_B)} \prod_{(y:B)} g(\epsilon y) = \eta(gy),$$
$$\mathsf{rcoh}_f(g, \epsilon) :\equiv \sum_{(\eta : g\circ f \sim \mathsf{id}_A)} \prod_{(x:A)} f(\eta x) = \epsilon(fx).$$

보조정리 4.2.11. 임의의 f, g, ϵ, η에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{lcoh}_f(g, \eta) \simeq \prod_{y:B} (fgy, \eta(gy)) =_{\mathsf{fib}_g(gy)} (y, \mathsf{refl}_{gy}),$$
$$\mathsf{rcoh}_f(g, \epsilon) \simeq \prod_{x:A} (gfx, \epsilon(fx)) =_{\mathsf{fib}_f(fx)} (x, \mathsf{refl}_{fx}).$$

증명. 보조정리 4.2.5를 사용합니다. □

보조정리 4.2.12. f가 반수반 동치이면, 임의의 $(g, \epsilon) : \mathsf{rinv}(f)$에 대하여 타입 $\mathsf{rcoh}_f(g, \epsilon)$는 축약 가능합니다.

증명. 보조정리 4.2.11와 의존 함수 타입이 축약 가능한 공간을 보존한다는 사실에 의해, 각 $x : A$에 대하여 타입 $(gfx, \epsilon(fx)) =_{\mathsf{fib}_f(fx)} (x, \mathsf{refl}_{fx})$가 축약 가능함을 보이면 충분합니다. 그런데 정리 4.2.6에 의해 $\mathsf{fib}_f(fx)$는 축약 가능하며, 축약 가능한 공간의 모든 경로 공간은 그 자체로 축약 가능합니다. □

정리 4.2.13. 임의의 $f : A \to B$에 대하여 타입 $\mathsf{ishae}(f)$는 단순 명제입니다.

증명. 연습문제 3.5에 의해, f가 반수반 동치라고 가정하고 $\mathsf{ishae}(f)$가 축약 가능함을 보이면 충분합니다. 이제 Σ의 결합성(연습문제 2.10)에 의해 타입 $\mathsf{ishae}(f)$는 다음과 동치입니다.

$$\sum_{u:\mathsf{rinv}(f)} \mathsf{rcoh}_f(\mathsf{pr}_1(u), \mathsf{pr}_2(u)).$$

그런데 보조정리 4.2.9 및 4.2.12와 Σ가 축약 가능성을 보존한다는 사실에 의해, 후자의 타입 역시 축약 가능합니다. □

이로써 $\mathsf{ishae}(f)$가 타입 $\mathsf{isequiv}(f)$에 요구되는 세 가지 조건을 모두 갖춤을 보였습니다. 다음 두 절에서는 몇 가지 다른 가능성을 살펴봅니다.

4.3 양쪽 가역 사상

§4.2에서 도입한 용어를 사용하면, §2.4에서 제안한 정의를 다음과 같이 다시 서술할 수 있습니다.

정의 4.3.1. $f : A \to B$가 왼쪽 역과 오른쪽 역을 모두 가질 때 f를 **양쪽 가역**이라고 합니다:

$$\mathsf{biinv}(f) :\equiv \mathsf{linv}(f) \times \mathsf{rinv}(f).$$

§2.4에서 $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{biinv}(f)$와 $\mathsf{biinv}(f) \to \mathsf{qinv}(f)$를 증명했습니다. 남은 것은 다음과 같습니다.

정리 4.3.2. 임의의 $f : A \to B$에 대하여 타입 $\mathsf{biinv}(f)$는 단순 명제입니다.

증명. f가 양쪽 가역이라고 가정하고 $\mathsf{biinv}(f)$가 축약 가능함을 보이면 됩니다. 그런데 $\mathsf{biinv}(f) \to \mathsf{qinv}(f)$이므로, 이 경우 보조정리 4.2.9에 의해 $\mathsf{linv}(f)$와 $\mathsf{rinv}(f)$는 모두 축약 가능하며, 축약 가능한 타입들의 곱은 축약 가능합니다. □

이것 역시 §4.2의 첫머리에서 한 제안에 부합한다는 점에 유의하십시오. 즉, g와 η를 결합하여 축약 가능한 타입을 만들고, ϵ과 결합하여 축약 가능한 타입을 이루는 추가 데이터를 더합니다. 차이점은 ϵ과 결합할 더 높은 차원의 데이터(2차원 경로)를 더하는 대신, 더 낮은 차원의 데이터(왼쪽 역과는 별개인 오른쪽 역)를 더한다는 것입니다.

따름정리 4.3.3. 임의의 $f : A \to B$에 대하여 $\mathsf{biinv}(f) \simeq \mathsf{ishae}(f)$가 성립합니다.

증명. $\mathsf{biinv}(f) \to \mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{ishae}(f)$이고 $\mathsf{ishae}(f) \to \mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{biinv}(f)$입니다. $\mathsf{ishae}(f)$와 $\mathsf{biinv}(f)$가 모두 단순 명제이므로, 동치는 보조정리 3.3.3로부터 따라 나옵니다. □

4.4 축약 가능한 섬유

$\mathsf{ishae}(f)$와 $\mathsf{biinv}(f)$에 관한 우리의 증명이 동치의 섬유가 축약 가능하다는 사실을 본질적으로 사용했다는 점에 유의하십시오. 실제로 이 성질 자체가 동치의 충분한 정의가 된다는 것이 밝혀집니다.

정의 4.4.1 (축약 가능한 사상). 모든 $y : B$에 대해 섬유 $\mathsf{fib}_f(y)$가 축약 가능하면, 사상 $f : A \to B$를 **축약 가능**하다고 합니다.

따라서 타입 $\mathsf{isContr}(f)$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{isContr}(f) :\equiv \prod_{y:B} \mathsf{isContr}(\mathsf{fib}_f(y)) \tag{4.4.2}$$

§3.11에서는 타입이 축약 가능하다는 것의 의미를 정의했다는 점에 유의하십시오. 여기서는 사상이 축약 가능하다는 것의 의미를 정의합니다. 이 용어는 어떤 사상의 모든 (호모토피) 섬유가 특정 성질을 가질 때 그 사상이 그 성질을 가진다고 말하는 호모토피 이론의 일반적인 관례를 따릅니다. 따라서 타입 A가 축약 가능할 필요충분조건은 사상 $A \to \mathbf{1}$이 축약 가능한 것입니다. 제7장부터는 축약 가능한 사상과 타입을 (-2)-절단된 사상과 타입이라고도 부르겠습니다.

정리 4.2.6에서 이미 $\mathsf{ishae}(f) \to \mathsf{isContr}(f)$임을 보였습니다. 역으로 다음이 성립합니다:

정리 4.4.3. 임의의 $f : A \to B$에 대해 $\mathsf{isContr}(f) \to \mathsf{ishae}(f)$가 성립합니다.

증명. $P : \mathsf{isContr}(f)$라고 합시다. 각 $y : B$를 y에서의 섬유의 축약 중심으로 보내는 역사상 $g : B \to A$를 다음과 같이 정의합니다:

$$g(y) :\equiv \mathsf{pr}_1(\mathsf{pr}_1(Py)).$$

따라서 y를 $g(y)$가 실제로 y에서의 섬유에 속한다는 증거로 보내어 호모토피 ϵ을 다음과 같이 정의할 수 있습니다:

$$\epsilon(y) :\equiv \mathsf{pr}_2(\mathsf{pr}_1(Py)).$$

이제 η와 τ를 정의하는 일이 남았습니다. 이는 물론 $\mathsf{rcoh}_f(g,\epsilon)$의 원소를 하나 제시하는 것과 같습니다. 보조정리 4.2.11에 의해 이는 각 $x : A$에 대해 fx 위의 f의 섬유 안에서 $(gfx, \epsilon(fx))$에서 (x, refl_{fx})로 가는 경로를 제시하는 것과 같습니다. 그런데 이는 쉽습니다. 임의의 $x : A$에 대해 타입 $\mathsf{fib}_f(fx)$는 가정에 의해 축약 가능하므로, 그러한 경로가 반드시 존재합니다. 이 경로를 명시적으로 다음과 같이 구성할 수 있습니다.

$$\big(\mathsf{pr}_2(P(fx))(gfx, \epsilon(fx))\big)^{-1} \cdot \big(\mathsf{pr}_2(P(fx))(x, \mathsf{refl}_{fx})\big). \qquad \square$$

다음도 쉽게 확인할 수 있습니다:

보조정리 4.4.4. 임의의 f에 대해 타입 $\mathsf{isContr}(f)$는 단순 명제입니다.

증명. 보조정리 3.11.4에 의해 각 타입 $\mathsf{isContr}(\mathsf{fib}_f(y))$는 단순 명제입니다. 따라서 예 3.6.2에 의해 (4.4.2)도 단순 명제입니다. $\square$

정리 4.4.5. 임의의 $f : A \to B$에 대해 $\mathsf{isContr}(f) \simeq \mathsf{ishae}(f)$가 성립합니다.

증명. 논리적 동치 $\mathsf{isContr}(f) \Leftrightarrow \mathsf{ishae}(f)$는 이미 확립했으며, 둘 다 단순 명제입니다(보조정리 4.4.4 및 정리 4.2.13). 따라서 보조정리 3.3.3를 적용할 수 있습니다. $\square$

보통은 준역원을 제시하여 함수가 동치임을 증명하지만, 때로는 이 정의가 더 편리합니다. 예를 들어 이 정의에 따르면, 함수가 동치임을 증명할 때 그 공역에 원소가 있다고 자유롭게 가정할 수 있습니다.

따름정리 4.4.6. $f : A \to B$에 대해 $B \to \mathsf{isequiv}(f)$가 성립하면, f는 동치입니다.

증명. f가 동치임을 보이려면 임의의 $y : B$에 대해 $\mathsf{fib}_f(y)$가 축약 가능함을 보이면 충분합니다. 그런데 $e : B \to \mathsf{isequiv}(f)$이면, 그러한 y가 주어질 때마다 $e(y) : \mathsf{isequiv}(f)$를 얻으므로 f는 동치이고, 따라서 원하던 대로 $\mathsf{fib}_f(y)$는 축약 가능합니다. $\square$

4.5 동치의 정의에 관하여

동치의 세 가지 정의가 모두 바람직한 세 가지 성질을 만족하며 서로 동치임을 보였습니다:

$$\mathsf{isContr}(f) \simeq \mathsf{ishae}(f) \simeq \mathsf{biinv}(f).$$

(동치를 정의하는 방법은 이 밖에도 더 있지만, 여기서는 이 세 가지에서 멈추겠습니다. 몇 가지 다른 정의는 연습문제 3.8와 이 장의 연습문제를 참조하십시오.) 따라서 이들 중 어느 것이든 $\mathsf{isequiv}(f)$의 "공식" 정의로 선택할 수 있습니다. 명확성을 위해 다음과 같이 정의하기로 합니다.

$$\mathsf{isequiv}(f) :\equiv \mathsf{ishae}(f).$$

$\mathsf{ishae}(f)$에는 가장 직접적으로 유용한 데이터가 들어 있으므로, 이 선택은 형식화에 유리합니다. 반면 다른 목적에서는 $\mathsf{biinv}(f)$를 다루기가 더 쉬운 경우가 많습니다. $\mathsf{biinv}(f)$에는 2차원 경로가 없고, 대칭적인 두 절반을 서로 독립적으로 다룰 수 있기 때문입니다. 그러나 이 책의 목적에서는 구체적으로 어떤 것을 선택하든 큰 차이가 없습니다.

이 장의 나머지 부분에서는 동치의 다른 몇 가지 성질과 특성화를 살펴봅니다.

4.6 전사와 매장

A와 B가 집합이고 $f : A \to B$가 동치일 때, f를 **동형사상** 또는 **전단사 함수**라고도 부릅니다. (집합이 아닌 타입에 대해서는 이 용어들을 사용하지 않습니다. 호모토피 이론과 고차 범주론에서 이 용어들은 흔히 호모토피 동치보다 더 엄격한 "같음"의 개념을 가리키기 때문입니다.) 집합론에서 함수가 전단사 함수일 필요충분조건은 그 함수가 단사이면서 전사인 것입니다. 이 조건들을 적절히 정식화하면 타입 이론에서도 마찬가지입니다. 명확성을 위해 집합이 아닌 타입을 다룰 때는 단사 대신 매장이라는 용어를 사용하겠습니다.

정의 4.6.1. $f : A \to B$라고 합시다.

(i) 모든 $b : B$에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|$가 성립하면 f를 **전사** (또는 **전사 함수**) 라고 합니다.

(ii) 모든 $x, y : A$에 대해 함수 $\mathsf{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$가 동치이면 f를 **매장** 이라고 합니다.

다시 말해, f의 모든 섬유가 단지 원소를 가지면, 또는 동치적으로 모든 $b : B$에 대해 $f(a) = b$를 만족하는 $a : A$가 단지 존재하면 f는 전사입니다. 전통적인 논리 표기법으로는 $\forall(b : B).\exists(a : A).(f(a) = b)$이면 f는 전사입니다. 이는 더 강한 주장인 $\prod_{(b:B)} \sum_{(a:A)} (f(a) = b)$와 구별해야 합니다. 이 주장이 성립하면 f를 **분할 전사**라고 합니다. (후자의 타입은 $\sum_{(g:B\to A)} \prod_{(b:B)} (f(g(b)) = b)$와 동치이므로, 분할 전사라는 것은 §3.11에서 정의한 수축이라는 것과 같습니다.)

§3.8의 선택 공리는 정확히 집합 사이의 모든 전사가 분할된다는 것을 말합니다. 그러나 유니밸런스 공리가 있는 상황에서는 모든 전사가 분할된다는 것은 명백히 거짓입니다. 보조정리 3.8.5에서 우리는 $\prod_{(x:X)} \|Y(x)\|$이지만 $\neg \prod_{(x:X)} Y(x)$인 타입 족 $Y : X \to \mathcal{U}$을 구성했습니다. 이러한 족이라면 어느 것이든 첫 번째 사영 $(\sum_{(x:X)} Y(x)) \to X$는 분할되지 않는 전사입니다.

A와 B가 집합이면, 보조정리 3.3.3에 의해 f가 매장인 것은 정확히 다음이 성립할 때입니다.

$$\prod_{x,y:A} (f(x) =_B f(y)) \to (x =_A y). \tag{4.6.2}$$

이 경우 f를 **단사적**이라고 하거나, **단사**라고 합니다. 집합이 아닌 타입에 대해서는 이 용어들을 사용하지 않습니다. 이 용어들이 (4.6.2)로 해석될 수 있는데, 이는 집합이 아닌 것에 대해서는 잘 작동하지 않는 개념이기 때문입니다. 또한 집합 사이의 임의의 함수는 적절한 의미에서 에피사상일 때, 그리고 그때에만 전사라는 것도 참이지만, 이 역시 더 일반적인 타입에 대해서는 성립하지 않으며, 일반적으로 전사성이 더 중요한 개념입니다.

정리 4.6.3. 함수 $f : A \to B$가 동치일 필요충분조건은 전사이면서 매장인 것입니다.

증명. f가 동치이면 각 $\mathsf{fib}_f(b)$는 축약 가능하고, 따라서 $\|\mathsf{fib}_f(b)\|$도 축약 가능하므로 f는 전사입니다. 그리고 정리 2.11.1에서 임의의 동치가 매장임을 보였습니다.

역으로, f가 전사인 매장이라고 가정합시다. $b : B$라 하고, $\sum_{(x:A)}(f(x) = b)$가 축약 가능함을 보이겠습니다. f가 전사이므로 $f(a) = b$를 만족하는 $a : A$가 단지 존재합니다. 따라서 b 위의 f의 섬유는 원소를 가지며, 이제 이 섬유가 단순 명제임을 보이는 일만 남습니다. 이를 위해 $p : f(x) = b$와 $q : f(y) = b$를 갖는 $x, y : A$가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 ap_f가 동치이므로 $\mathsf{ap}_f(r) = p \cdot q^{-1}$를 만족하는 $r : x = y$가 존재합니다. 그런데 Σ-타입에서의 경로에 대한 특성화를 이용하면, 후자의 등식은 $r_*(p) = q$로 재배열됩니다. 따라서 이 등식은 r과 함께 b 위의 f의 섬유에서 $(x, p) = (y, q)$를 보여 줍니다. □

따름정리 4.6.4. 임의의 $f : A \to B$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{isequiv}(f) \simeq (\mathsf{isEmbedding}(f) \times \mathsf{isSurjective}(f)).$$

증명. 전사라는 것과 매장이라는 것은 모두 단순 명제입니다. 이제 보조정리 3.3.3을 적용하십시오. □

물론 매장의 정의가 동치를 참조하므로, 이것을 "동치"의 정의로 사용할 수는 없습니다. 그러나 이 특성화는 여전히 유용할 수 있습니다. §8.8를 참고하십시오. 제7장에서 이를 일반화할 것입니다.

4.7 동치의 닫힘 성질

동치가 합성에 대해 닫혀 있다는 것은 보조정리 2.4.12에서 이미 보았습니다. 나아가 다음이 성립합니다.

정리 4.7.1 (셋 중 둘 성질). $f : A \to B$이고 $g : B \to C$라고 가정합시다. f, g, $g \circ f$ 중 어느 둘이 동치이면 나머지 하나도 동치입니다.

증명. $g \circ f$와 g가 동치이면, $(g \circ f)^{-1} \circ g$는 f의 준역원입니다. 한편으로는 $(g \circ f)^{-1} \circ g \circ f \sim \mathsf{id}_A$이고, 다른 한편으로는 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g &\sim g^{-1} \circ g \circ f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g \\ &\sim g^{-1} \circ g \\ &\sim \mathsf{id}_B. \end{aligned}$$

마찬가지로 $g \circ f$와 f가 동치이면, $f \circ (g \circ f)^{-1}$는 g의 준역원입니다. □

이는 호모토피 이론에서 온 동치에 대한 표준적인 닫힘 조건입니다. 또한 동치가 다음과 같은 의미에서 수축에 대해 닫혀 있다는 것도 잘 알려져 있습니다.

정의 4.7.2. 다음과 같은 도식이 존재하면 함수 $g : A \to B$를 함수 $f : X \to Y$의 **수축**이라고 합니다.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s} & X & \xrightarrow{r} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[s']{} & Y & \xrightarrow[r']{} & B \end{array}$$

이 도식에 대해 다음이 존재합니다.

(i) 호모토피 $R : r \circ s \sim \mathsf{id}_A$.
(ii) 호모토피 $R' : r' \circ s' \sim \mathsf{id}_B$.
(iii) 호모토피 $L : f \circ s \sim s' \circ g$.
(iv) 호모토피 $K : g \circ r \sim r' \circ f$.
(v) 모든 $a : A$에 대하여, 다음 사각형의 가환성을 보여 주는 경로 $H(a)$

$$\begin{array}{ccc} g(r(s(a))) & \xrightarrow{K(s(a))} & r'(f(s(a))) \\ {\scriptstyle g(R(a))}\Vert & & \Vert{\scriptstyle r'(L(a))} \\ g(a) & \xrightarrow[R'(g(a))^{-1}]{} & r'(s'(g(a))) \end{array}$$

§3.11에서 한 타입이 다른 타입의 수축이라는 것이 무엇을 의미하는지 정의했음을 상기하십시오. 이는 위 정의에서 B와 Y가 $\mathbf{1}$인 특수한 경우입니다. 역으로, 축약 가능성의 경우와 마찬가지로 사상의 수축은 그 섬유들의 수축을 유도합니다.

보조정리 4.7.3. 함수 $g : A \to B$가 함수 $f : X \to Y$의 레트랙트이면, 모든 $b : B$에 대하여 $\mathsf{fib}_g(b)$는 $\mathsf{fib}_f(s'(b))$의 레트랙트입니다. 여기서 $s' : B \to Y$는 정의 4.7.2에서와 같습니다.

증명. $g : A \to B$가 $f : X \to Y$의 레트랙트라고 가정합시다. 그러면 임의의 $b : B$에 대하여 다음 함수들이 있습니다

$$\begin{aligned} &\varphi_b : \mathsf{fib}_g(b) \to \mathsf{fib}_f(s'(b)), && \varphi_b(a,p) :\equiv (s(a), L(a) \cdot s'(p)), \\ &\psi_b : \mathsf{fib}_f(s'(b)) \to \mathsf{fib}_g(b), && \psi_b(x,q) :\equiv (r(x), K(x) \cdot r'(q) \cdot R'(b)). \end{aligned}$$

그러면 $\psi_b(\varphi_b(a,p)) \equiv (r(s(a)), K(s(a)) \cdot r'(L(a) \cdot s'(p)) \cdot R'(b))$입니다. 모든 $b : B$에 대해 ψ_b가 단면 φ_b를 갖는 수축이라고 주장합니다. 즉, 모든 $(a,p) : \mathsf{fib}_g(b)$에 대해 $\psi_b(\varphi_b(a,p)) = (a,p)$라는 것입니다. 다시 말해, 다음을 보이고자 합니다.

$$\prod_{(b:B)} \prod_{(a:A)} \prod_{(p:g(a)=b)} \psi_b(\varphi_b(a,p)) = (a,p).$$

처음 두 Π의 순서를 바꾸고 보조정리 3.11.9의 한 변형을 적용하면, 이는 다음과 동치입니다

$$\prod_{a:A} \psi_{g(a)}(\varphi_{g(a)}(a, \mathsf{refl}_{g(a)})) = (a, \mathsf{refl}_{g(a)}).$$

임의의 a에 대하여, 정리 2.7.2에 의해 이 쌍들의 등식은 등식들의 쌍과 동치입니다. 첫 번째 성분들은 $R(a) : r(s(a)) = a$에 의해 같으므로, 다음만 보이면 됩니다

$$R(a)_*\big(K(s(a)) \cdot r'(L(a)) \cdot R'(g(a))\big) = \mathsf{refl}_{g(a)}.$$

그런데 이 수송은 $g(R(a))^{-1} \cdot K(s(a)) \cdot r'(L(a)) \cdot R'(g(a))$로 계산되므로, 필요한 경로는 $H(a)$로 주어집니다. □

정리 4.7.4. g가 동치 f의 레트랙트이면, g 또한 동치입니다.

증명. 보조정리 4.7.3에 의해 g의 모든 섬유는 f의 어떤 섬유의 레트랙트입니다. 따라서 보조정리 3.11.7에 의해, 후자가 모두 축약 가능하면 전자도 모두 축약 가능합니다. □

마지막으로, 섬유별 동치를 전체 공간의 동치로 특징지을 수 있음을 보입니다. 용어를 설명하기 위해, §2.3에서 타입 족 $P : A \to \mathcal{U}$를 전체 공간이 $\sum_{(x:A)} P(x)$인 A 위의 올뭉치로 볼 수 있으며, 이때 올뭉치는 사영 $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} P(x) \to A$라는 것을 상기하십시오. 이러한 관점에서, 두 타입 족 $P, Q : A \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때 함수 $f : \prod_{(x:A)}(P(x) \to Q(x))$를 **섬유별 사상** 또는 **섬유별 변환**이라고 부를 수 있습니다. 이러한 사상은 전체 공간 사이의 함수를 유도합니다:

정의 4.7.5. 타입 족 $P, Q : A \to \mathcal{U}$와 사상 $f : \prod_{(x:A)} P(x) \to Q(x)$가 주어졌을 때, 다음과 같이 정의합니다

$$\mathsf{total}(f) :\equiv \lambda w.\,(\mathsf{pr}_1 w, f(\mathsf{pr}_1 w, \mathsf{pr}_2 w)) : \sum_{x:A} P(x) \to \sum_{x:A} Q(x).$$

정리 4.7.6. f가 타입 A 위의 족 P와 Q 사이의 섬유별 변환이라고 가정하고, $x : A$와 $v : Q(x)$라고 합시다. 그러면 다음 동치가 있습니다

$$\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}((x, v)) \simeq \mathsf{fib}_{f(x)}(v).$$

증명. 다음과 같이 계산합니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}((x,v)) &\equiv \sum_{w:\sum_{(x:A)} P(x)} (\mathsf{pr}_1 w, f(\mathsf{pr}_1 w, \mathsf{pr}_2 w)) = (x, v) \\
&\simeq \sum_{(a:A)} \sum_{(u:P(a))} (a, f(a,u)) = (x,v) && \text{(연습문제 2.10에 의해)} \\
&\simeq \sum_{(a:A)} \sum_{(u:P(a))} \sum_{(p:a=x)} p_*(f(a,u)) = v && \text{(정리 2.7.2에 의해)} \\
&\simeq \sum_{(a:A)} \sum_{(p:a=x)} \sum_{(u:P(a))} p_*(f(a,u)) = v \\
&\simeq \sum_{u:P(x)} f(x,u) = v && (*) \\
&\equiv \mathsf{fib}_{f(x)}(v).
\end{aligned}$$

동치 $(*)$는 보조정리 3.11.8 및 3.11.9 및 연습문제 2.10로부터 따라 나옵니다. □

섬유별 변환 $f : \prod_{(x:A)} P(x) \to Q(x)$의 각 $f(x) : P(x) \to Q(x)$가 동치이면, f를 **섬유별 동치**라고 합니다.

정리 4.7.7. f가 타입 A 위의 족 P와 Q 사이의 섬유별 변환이라고 가정합시다. 그러면 f가 섬유별 동치일 필요충분조건은 $\mathsf{total}(f)$가 동치인 것입니다.

증명. f, P, Q, A를 정리의 진술에서와 같이 둡시다. 정리 4.7.6에 의해, 모든 $x : A$와 $v : Q(x)$에 대하여 $\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}((x,v))$가 축약 가능할 필요충분조건은 $\mathsf{fib}_{f(x)}(v)$가 축약 가능한 것입니다. 따라서 모든 $w : \sum_{(x:A)} Q(x)$에 대하여 $\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}(w)$가 축약 가능할 필요충분조건은 모든 $x : A$와 $v : Q(x)$에 대하여 $\mathsf{fib}_{f(x)}(v)$가 축약 가능한 것입니다. □

4.8 대상 분류자

타입 이론에는 타입족이라는 기본 개념, 즉 함수 $B : A \to \mathcal{U}$가 있습니다. 이러한 족이 호모토피 이론의 올뭉치와 어느 정도 비슷하게 동작하며, 이때 올뭉치는 사영 $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(a:A)} B(a) \to A$임을 보았습니다. 호모토피 이론의 기본적인 사실 중 하나는 모든 사상이 올뭉치와 동치라는 것입니다. 유니밸런스를 사용하면 타입 이론에서도 같은 사실을 증명할 수 있습니다.

보조정리 4.8.1. 임의의 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$에 대하여, $a : A$ 위에서 $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \to A$의 섬유는 $B(a)$와 동치입니다:

$$\mathsf{fib}_{\mathsf{pr}_1}(a) \simeq B(a)$$

증명. 다음이 성립합니다

$$\begin{aligned}
\mathsf{fib}_{\mathsf{pr}_1}(a) &:\equiv \sum_{u:\sum_{(x:A)} B(x)} \mathsf{pr}_1(u) = a \\
&\simeq \sum_{(x:A)} \sum_{(b:B(x))} (x = a) \\
&\simeq \sum_{(x:A)} \sum_{(p:x=a)} B(x) \\
&\simeq B(a)
\end{aligned}$$

이때 동일성 타입의 왼쪽 보편 성질을 사용합니다. □

보조정리 4.8.2. 임의의 함수 $f : A \to B$에 대하여 $A \simeq \sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_f(b)$가 성립합니다.

증명. 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\sum_{b:B} \mathsf{fib}_f(b) &:\equiv \sum_{(b:B)} \sum_{(a:A)} (f(a) = b) \\
&\simeq \sum_{(a:A)} \sum_{(b:B)} (f(a) = b) \\
&\simeq A
\end{aligned}$$

여기서 $\sum_{(b:B)}(f(a) = b)$가 축약 가능하다는 사실을 사용합니다. □

정리 4.8.3. 임의의 타입 B에 대하여 다음 동치가 존재합니다.

$$\chi : \left(\sum_{A:\mathcal{U}} (A \to B)\right) \simeq (B \to \mathcal{U}).$$

증명. 다음 준역원들을 구성해야 합니다.

$$\chi : \left(\sum_{A:\mathcal{U}} (A \to B)\right) \to B \to \mathcal{U}$$
$$\psi : (B \to \mathcal{U}) \to \left(\sum_{A:\mathcal{U}} (A \to B)\right).$$

χ를 $\chi((A,f),b) :\equiv \mathsf{fib}_f(b)$로, ψ를 $\psi(P) :\equiv \left((\sum_{(b:B)} P(b)), \mathsf{pr}_1\right)$로 정의합니다. 이제 $\chi \circ \psi \sim \mathsf{id}$임과 $\psi \circ \chi \sim \mathsf{id}$임을 확인해야 합니다.

(i) $P : B \to \mathcal{U}$라고 합시다. 보조정리 4.8.1에 의해 임의의 $b : B$에 대하여 $\mathsf{fib}_{\mathsf{pr}_1}(b) \simeq P(b)$이므로, $P \sim \chi(\psi(P))$가 곧바로 따라 나옵니다.

(ii) $f : A \to B$를 함수라고 합시다. 다음 경로를 찾아야 합니다.

$$\left(\textstyle\sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_f(b),\ \mathsf{pr}_1\right) = (A, f).$$

먼저 보조정리 4.8.2에 의해 $e(b,a,p) :\equiv a$이고 $e^{-1}(a) :\equiv (f(a), a, \mathsf{refl}_{f(a)})$인 $e : \sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_f(b) \simeq A$가 존재함에 주목하십시오. 정리 2.7.2에 의해 $(\mathsf{ua}(e))_*(\mathsf{pr}_1) = f$임을 보이는 일만 남습니다. 그런데 유니밸런스의 계산 규칙과 (2.9.4)에 의해 $(\mathsf{ua}(e))_*(\mathsf{pr}_1) = \mathsf{pr}_1 \circ e^{-1}$이며, e^{-1}의 정의로부터 곧바로 $\mathsf{pr}_1 \circ e^{-1} \equiv f$를 얻습니다. □

특히 이는 고차 토포스 이론의 의미에서 대상 분류자가 존재함을 뜻합니다. 정의 2.1.7에서 $\mathcal{U}_\bullet$가 점을 가진 타입들의 타입 $\sum_{(A:\mathcal{U})} A$를 나타낸다는 것을 상기하십시오.

정리 4.8.4. $f : A \to B$를 함수라고 합시다. 그러면 다음 도식을 생각합시다.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\vartheta_f} & \mathcal{U}_\bullet \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}_1} \\ B & \xrightarrow[\chi_f]{} & \mathcal{U} \end{array}$$

이 도식은 당김 사각형입니다(연습문제 2.11 참조). 여기서 함수 ϑ_f는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\lambda a.\, (\mathsf{fib}_f(f(a)), (a, \mathsf{refl}_{f(a)})).$$

증명. 다음 동치들이 성립함에 주목하십시오.

$$\begin{aligned} A &\simeq \sum_{b:B} \mathsf{fib}_f(b) \\ &\simeq \sum_{(b:B)} \sum_{(X:\mathcal{U})} \sum_{(p:\mathsf{fib}_f(b)=X)} X \\ &\simeq \sum_{(b:B)} \sum_{(X:\mathcal{U})} \sum_{(x:X)} \mathsf{fib}_f(b) = X \\ &\simeq \sum_{(b:B)} \sum_{(Y:\mathcal{U}_\bullet)} \mathsf{fib}_f(b) = \mathsf{pr}_1 Y \\ &\equiv B \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_\bullet \end{aligned}$$

이로부터 합성 동치 $e : A \simeq B \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_\bullet$를 얻습니다. 이 합성 동치의 작용을 다음과 같이 단계별로 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned} a &\mapsto (f(a),\ (a, \mathsf{refl}_{f(a)})) \\ &\mapsto (f(a),\ \mathsf{fib}_f(f(a)),\ \mathsf{refl}_{\mathsf{fib}_f(f(a))},\ (a, \mathsf{refl}_{f(a)})) \\ &\mapsto (f(a),\ \mathsf{fib}_f(f(a)),\ (a, \mathsf{refl}_{f(a)}),\ \mathsf{refl}_{\mathsf{fib}_f(f(a))}) \\ &\mapsto (f(a),\ (\mathsf{fib}_f(f(a)),\ (a, \mathsf{refl}_{f(a)})),\ \mathsf{refl}_{\mathsf{fib}_f(f(a))}). \end{aligned}$$

따라서 호모토피 $f \sim \mathsf{pr}_1 \circ e$와 $\vartheta_f \sim \mathsf{pr}_2 \circ e$를 얻습니다. □

4.9 유니밸런스는 함수 외연성을 함의합니다

이 장의 마지막 절에서는 유니밸런스 공리가 함수 외연성을 함의한다는 증명을 제시합니다. 따라서 이 절에서는 함수 외연성 공리 없이 논의를 진행합니다. 증명은 두 단계로 이루어집니다. 먼저 정리 4.9.4에서 유니밸런스 공리가 아래 정의 4.9.1에서 정의하는 약한 형태의 함수 외연성을 함의함을 보입니다. 약한 함수 외연성 원리는 다시 통상적인 함수 외연성을 함의하며, 이때 유니밸런스 공리는 필요하지 않습니다(정리 4.9.5).

$\mathcal{U}$를 유니버스라고 합시다. 이 유니버스가 유니밸런트하다고 가정하는 곳은 명시적으로 밝히겠습니다.

정의 4.9.1. **약한 함수 외연성 원리** 는 다음 함수가 존재한다고 주장합니다.

$$\Big(\prod_{x:A} \mathsf{isContr}(P(x))\Big) \to \mathsf{isContr}\Big(\prod_{x:A} P(x)\Big)$$

이는 임의의 타입 A 위의 임의의 타입족 $P : A \to \mathcal{U}$에 대해 성립합니다.

다음 보조정리는 함수 외연성을 사용하면 쉽게 증명됩니다. 여기서 요점은 이 보조정리가 함수 외연성을 따로 가정하지 않고도 유니밸런스로부터 따라 나온다는 것입니다.

보조정리 4.9.2. $\mathcal{U}$가 유니밸런트하다고 가정하면, 임의의 $A, B, X : \mathcal{U}$와 임의의 $e : A \simeq B$에 대하여 다음 동치가 존재합니다.

$$(X \to A) \simeq (X \to B)$$

그 바탕 사상은 e의 바탕 함수와의 후합성으로 주어집니다.

증명. 보조정리 4.1.1의 증명에서와 같이, 어떤 $p : A = B$에 대하여 $e = \mathsf{idtoeqv}(p)$라고 가정할 수 있습니다. 그러면 경로 귀납법에 의해 p가 refl_A라고 가정할 수 있으므로 $e = \mathsf{id}_A$입니다. 그런데 이 경우 e와의 후합성은 항등 함수이므로 동치입니다. □

따름정리 4.9.3. $P : A \to \mathcal{U}$를 축약 가능한 타입들의 족, 즉 $\prod_{(x:A)} \mathsf{isContr}(P(x))$.이라고 합시다. 그러면 사영 $\mathsf{pr}_1 : (\sum_{(x:A)} P(x)) \to A$는 동치입니다. $\mathcal{U}$이 유니밸런트하다고 가정하면, pr_1과의 후합성이 다음 동치를 준다는 사실이 곧바로 따라옵니다.

$$\alpha : \Big(A \to \sum_{x:A} P(x)\Big) \simeq (A \to A).$$

증명. 보조정리 4.8.1에 의해, $\mathsf{pr}_1 : (\sum_{(x:A)} P(x)) \to A$와 $x : A$에 대하여 다음 동치가 성립합니다.

$$\mathsf{fib}_{\mathsf{pr}_1}(x) \simeq P(x).$$

따라서 각 $P(x)$가 축약 가능할 때마다 pr_1은 동치입니다. 이제 이 주장은 보조정리 4.9.2로부터 따라옵니다. □

특히, 위 동치의 id_A에서의 호모토피 섬유는 축약 가능합니다. 따라서 의존 함수 타입 $\prod_{(x:A)} P(x)$가 $\mathsf{fib}_\alpha(\mathsf{id}_A)$의 레트랙트임을 보임으로써, 유니밸런스가 약한 함수 외연성을 함의함을 보일 수 있습니다.

정리 4.9.4. 유니밸런트 유니버스 $\mathcal{U}$에서 $P : A \to \mathcal{U}$가 축약 가능한 타입들의 족이라고 가정하고, α를 따름정리 4.9.3의 함수라고 합시다. 그러면 $\prod_{(x:A)} P(x)$는 $\mathsf{fib}_\alpha(\mathsf{id}_A)$의 레트랙트입니다. 그 결과로 $\prod_{(x:A)} P(x)$는 축약 가능합니다. 다시 말해, 유니밸런스 공리는 약한 함수 외연성 원리를 함의합니다.

증명. 다음 함수들을 정의합니다.

$$\varphi : (\textstyle\prod_{(x:A)} P(x)) \to \mathsf{fib}_\alpha(\mathsf{id}_A),$$
$$\varphi(f) :\equiv (\lambda x.\, (x, f(x)), \mathsf{refl}_{\mathsf{id}_A}),$$

그리고

$$\psi : \mathsf{fib}_\alpha(\mathsf{id}_A) \to \textstyle\prod_{(x:A)} P(x),$$
$$\psi(g, p) :\equiv \lambda x.\, \mathsf{happly}(p, x)_*(\mathsf{pr}_2(g(x))).$$

그러면 $\psi(\varphi(f)) = \lambda x.\, f(x)$이며, 의존 함수 타입의 유일성 원리에 의해 이는 f입니다. □

이제 약한 함수 외연성이 통상적인 함수 외연성을 함의함을 보입니다. 함수들의 상등을 호모토피로 변환하는 함수 $\mathsf{happly}(f, g) : (f = g) \to (f \sim g)$를 (2.9.2)에서 상기하십시오. 이어지는 증명에서는 유니밸런스 공리를 사용하지 않습니다.

정리 4.9.5. 약한 함수 외연성은 함수 외연성 공리 2.9.3를 함의합니다.

증명. 다음을 보이고자 합니다.

$$\prod_{(A:\mathcal{U})} \prod_{(P:A\to\mathcal{U})} \prod_{(f,g:\prod_{(x:A)} P(x))} \mathsf{isequiv}(\mathsf{happly}(f, g)).$$

정리 4.7.7에 의해 섬유별 사상이 전체 공간 사이의 동치를 유도하는 것은 그 사상이 섬유별로 동치인 것과 필요충분조건이므로, 다음 타입의 함수

$$\Big(\sum_{g:\prod_{(x:A)} P(x)} (f = g)\Big) \to \sum_{g:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim g)$$

즉 $\lambda(g : \prod_{(x:A)} P(x)).\, \mathsf{happly}(f, g)$에 의해 유도되는 함수가 동치임을 보이면 충분합니다. 왼쪽의 타입은 보조정리 3.11.8에 의해 축약 가능하므로, 다음 오른쪽의 타입

$$\sum_{(g:\prod_{(x:A)} P(x))} \prod_{(x:A)} f(x) = g(x) \tag{4.9.6}$$

이 축약 가능함을 보이면 충분합니다. 이제 정리 2.15.7에 따르면 이것은 다음과 동치입니다.

$$\prod_{(x:A)} \sum_{(u:P(x))} f(x) = u. \tag{4.9.7}$$

정리 2.15.7의 증명은 함수 외연성을 사용하지만, 합성 중 하나에 대해서만 사용합니다. 따라서 함수 외연성을 가정하지 않고도 (4.9.6)가 (4.9.7)의 레트랙트라고 결론지을 수 있습니다. 그리고 (4.9.7)는 축약 가능한 타입들의 곱이며, 이는 약한 함수 외연성 원리에 의해 축약 가능합니다. 그러므로 (4.9.6) 역시 축약 가능합니다. □

주

준역원을 갖춘 연속 사상들의 공간이 "호모토피 동치들의 공간"이 되기에는 잘못된 호모토피 타입을 갖는다는 사실은 대수적 위상수학에서 잘 알려져 있습니다. 그 맥락에서 "호모토피 동치들의 공간" $(A \simeq B)$는 보통 함수 공간 $(A \to B)$에서 호모토피 동치인 함수들로 이루어진 부분공간으로 간단히 정의됩니다. 타입 이론에서 이에 가장 가깝게 대응하는 것은 $\sum_{(f:A\to B)} \|\mathsf{qinv}(f)\|$ 입니다. 연습문제 3.8를 참고하십시오.

호모토피 타입 이론에서 처음 주어진 동치의 정의는 우리가 $\mathsf{isContr}(f)$라고 부른 것이었으며, 이는 Voevodsky에 의한 것입니다. 다른 정의들이 가능하다는 사실은 이후 여러 사람에 의해 관찰되었습니다. 보조정리 4.2.2 및 정리 4.2.3와 같은 수반 동치에 관한 기본 정리들은 고차 범주론과 호모토피 이론의 표준적인 사실들을 옮겨 온 것입니다. 양방향 가역성을 동치의 정의로 사용하는 것은 André Joyal이 제안하였습니다.

§§4.6 및 4.7에서 논의한 동치의 성질들은 호모토피 이론에서 잘 알려져 있습니다. 그중 대부분은 Voevodsky가 타입 이론에서 처음으로 증명하였습니다.

모든 함수가 올뭉치와 동치라는 것은 호모토피 이론의 표준적인 사실입니다. $(\infty,1)$-범주 이론에서의 대상 분류자 개념(정리 4.8.3의 범주론적 유사물)은 Rezk에 의한 것입니다([Rez05, Lur09] 참고).

마지막으로, 유니밸런스가 함수 외연성을 함의한다는 사실(§4.9)은 Voevodsky에 의한 것입니다. 우리의 증명은 그의 증명을 단순화한 것입니다. 연습문제 4.9 역시 Voevodsky에 의한 것입니다.

연습문제

연습문제 4.1. $f : A \to B$에 대한 다음 "양측 수반 동치 데이터"의 타입을 생각해 봅시다.

$$\sum_{(g:B\to A)} \sum_{(\eta:g\circ f\sim \mathsf{id}_A)} \sum_{(\epsilon:f\circ g\sim \mathsf{id}_B)} \Big(\prod_{x:A} f(\eta x) = \epsilon(fx)\Big) \times \Big(\prod_{y:B} g(\epsilon y) = \eta(gy)\Big).$$

보조정리 4.2.2에 의해, f가 동치이면 이 타입에 원소가 존재함을 압니다. 보조정리 4.1.1와 유사하게 이 타입의 특성화를 제시하십시오.

이 타입이 일반적으로 단순 명제가 아님을 보이는 예를 제시할 수 있겠습니까? (이는 제6장 이후에 더 쉬워질 것입니다.)

연습문제 4.2. 임의의 $A, B : \mathcal{U}$에 대하여 다음 타입이 $A \simeq B$와 동치임을 보이십시오.

$$\sum_{R:A\to B\to\mathcal{U}} \Big(\prod_{a:A} \mathsf{isContr}\Big(\sum_{b:B} R(a,b)\Big)\Big) \times \Big(\prod_{b:B} \mathsf{isContr}\Big(\sum_{a:A} R(a,b)\Big)\Big).$$

이로부터 $\mathsf{isequiv}(f)$의 세 가지 요구 조건을 만족하는 타입의 정의를 이끌어 낼 수 있겠습니까?

연습문제 4.3. 유니밸런스를 사용하지 않고 보조정리 4.1.1의 증명을 다시 정식화하십시오.

연습문제 4.4 (불안정 팔면체 공리). $f : A \to B$, $g : B \to C$, $b : B$라고 가정합시다.

(i) $(b, \mathsf{refl}_{g(b)})$ 위의 섬유가 $\mathsf{fib}_f(b)$와 동치인 자연스러운 사상 $\mathsf{fib}_{g\circ f}(g(b)) \to \mathsf{fib}_g(g(b))$가 존재함을 보이십시오.

(ii) $\mathsf{fib}_{g\circ f}(c) \simeq \sum_{(w:\mathsf{fib}_g(c))} \mathsf{fib}_f(\mathsf{pr}_1 w)$임을 보이십시오.

연습문제 4.5. 동치가 6개 중 2개 성질을 만족함을 증명하십시오. 즉, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$가 주어졌을 때 $g \circ f$와 $h \circ g$가 동치이면 f, g, h, $h \circ g \circ f$도 동치입니다. 이를 이용하여 정리 2.11.1의 더 고수준의 증명을 제시하십시오.

연습문제 4.6. $A, B : \mathcal{U}$에 대해 다음을

$$\mathsf{idtoqinv}_{A,B} : (A = B) \to \sum_{f:A\to B} \mathsf{qinv}(f)$$

경로 귀납법을 자명한 방식으로 적용하여 정의합니다. 모든 $A, B : \mathcal{U}$에 대해 함수 $\mathsf{idtoqinv}_{A,B}$가 준역원을 갖는다고 주장하는, 유니밸런스 공리의 수정된 형태를 qinv-**유니밸런스**라 합시다.

(i) §4.9의 함수 외연성 증명에서 유니밸런스 대신 qinv-유니밸런스를 사용할 수 있음을 보이십시오.

(ii) 정리 4.1.3의 증명에서 유니밸런스 대신 qinv-유니밸런스를 사용할 수 있음을 보이십시오.

(iii) qinv-유니밸런스가 모순적임(즉, $\mathbf{0}$의 원소를 구성할 수 있게 함)을 보이십시오. 따라서 유니밸런스를 진술할 때 isequiv의 "좋은" 버전을 사용하는 것이 필수적입니다.

연습문제 4.7. 함수 $f : A \to B$가 매장일 필요충분조건은 다음 두 조건이 성립하는 것임을 보이십시오.

(i) f는 좌소거 가능합니다. 즉, 임의의 $x, y : A$에 대해 $f(x) = f(y)$이면 $x = y$입니다.

(ii) 임의의 $x : A$에 대해 사상 $\mathsf{ap}_f : \Omega(A, x) \to \Omega(B, f(x))$는 동치입니다.

(특히 A가 집합이면, f가 매장일 필요충분조건은 f가 좌소거 가능하고 모든 $x : A$에 대해 $\Omega(B, f(x))$가 축약 가능한 것입니다.) (i)과 (ii) 중 어느 쪽도 다른 쪽을 함의하지 않음을 보여 주는 예를 제시하십시오.

연습문제 4.8. 좌소거 가능한 함수 $\mathbf{2} \to B$의 타입(연습문제 4.7 참조)이 $\sum_{(x,y:B)}(x \neq y)$와 동치임을 보이십시오. 매장 $\mathbf{2} \to B$의 타입에 대해서도 이와 비슷한 명시적 특성화를 제시하십시오.

연습문제 4.9. **소박한 비의존 함수 외연성 공리**는 $A, B : \mathcal{U}$와 $f, g : A \to B$에 대해 함수 $(\prod_{(x:A)} f(x) = g(x)) \to (f = g)$가 존재한다는 공리입니다. §4.9의 논증을 수정하여 이 공리가 완전한 함수 외연성 공리(공리 2.9.3)를 함의함을 보이십시오.

제5장

귀납법

제1장에서는 기존 타입으로부터 새로운 타입을 형성하는 여러 방법을 소개했습니다. (의존) 함수 타입과 유니버스를 제외하면, 이 규칙들은 모두 귀납적 정의라는 일반적인 개념의 특수한 경우입니다. 이 장에서는 귀납적 정의를 더 일반적으로 살펴봅니다.

5.1 귀납적 타입 소개

귀납적 타입 X는 유한 개의 특정한 생성자들에 의해 "자유롭게 생성된" 타입으로 직관적으로 이해할 수 있습니다. 각 생성자는 공역이 X인 (몇 개의 인자를 받는) 함수입니다. 인자를 하나도 받지 않는 함수도 여기에 포함되며, 이러한 함수는 단순히 X의 원소입니다.

특정한 귀납적 타입을 기술할 때에는 생성자들을 글머리 기호로 나열합니다. 예를 들어 §1.8의 타입 $\mathbf{2}$ 는 다음 생성자들에 의해 귀납적으로 생성됩니다:

- $0_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$
- $1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$

마찬가지로, $\mathbf{1}$은 다음 생성자에 의해 귀납적으로 생성됩니다:

- $\star : \mathbf{1}$

반면 $\mathbf{0}$은 생성자가 전혀 없이 귀납적으로 생성됩니다. 생성자 함수가 인자를 받는 예로는 쌍대곱 $A + B$가 있으며, 이는 다음 두 생성자에 의해 생성됩니다

- $\mathsf{inl} : A \to A + B$
- $\mathsf{inr} : B \to A + B$.

그리고 생성자가 여러 개의 인자를 받는 예로는 데카르트 곱 $A \times B$가 있으며, 이는 다음 하나의 생성자에 의해 생성됩니다

- $(-,-) : A \to B \to A \times B$.

결정적으로, 귀납적 타입의 생성자가 현재 정의되고 있는 그 귀납적 타입의 인자를 받는 것도 허용합니다. 예를 들어 자연수의 타입 $\mathbb{N}$에는 다음 생성자들이 있습니다

- $0 : \mathbb{N}$
- $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

또 다른 유용한 예로는 어떤 타입 A의 원소들로 이루어진 유한 리스트의 타입 $\mathsf{List}(A)$가 있으며, 이 타입에는 다음 생성자들이 있습니다

- $\mathsf{nil} : \mathsf{List}(A)$
- $\mathsf{cons} : A \to \mathsf{List}(A) \to \mathsf{List}(A)$.

직관적으로, 귀납적 타입은 그 생성자들에 의해 자유롭게 생성된 것으로 이해해야 합니다. 즉, 귀납적 타입의 원소는 아무것도 없는 상태에서 시작하여 생성자들을 반복적으로 적용해서 얻을 수 있는 것들과 정확히 일치합니다. (§5.8 및 제6장에서 보겠지만, 더 일반적인 종류의 귀납적 정의에서는 이 관점을 약간 수정해야 합니다. 그러나 지금은 이것으로 충분합니다.) 예를 들어 $\mathbf{2}$ 의 경우, 원소는 $0_{\mathbf{2}}$와 $1_{\mathbf{2}}$뿐일 것으로 예상해야 합니다. 마찬가지로 $\mathbb{N}$ 의 경우, 모든 원소는 0이거나, "이전에 구성된" 어떤 자연수에 succ을 적용하여 얻은 것일 것으로 예상해야 합니다.

그러나 이와 같은 성질을 직접 단언하는 대신, (의존) 제거 규칙이라고도 불리는 귀납 원리를 통해 이를 표현합니다. 이러한 원리는 제1장에서 이미 보았습니다. 예를 들어 $\mathbf{2}$ 에 대한 귀납 원리는 다음과 같습니다:

- $\mathbf{2}$ 의 모든 원소에 대한 명제 $E : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$를 증명할 때에는 $0_{\mathbf{2}}$와 $1_{\mathbf{2}}$에 대해서만 증명하면 충분합니다. 즉, 증명 $e_0 : E(0_{\mathbf{2}})$와 $e_1 : E(1_{\mathbf{2}})$를 제시하면 됩니다.

나아가, 그 결과로 얻는 증명 $\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(E, e_0, e_1) : \prod_{(b:\mathbf{2})} E(b)$는 생성자 $0_{\mathbf{2}}$와 $1_{\mathbf{2}}$에 적용했을 때 예상대로 동작합니다. 이 원리는 다음 계산 규칙으로 표현됩니다:

- $\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(E, e_0, e_1, 0_{\mathbf{2}}) \equiv e_0$이 성립합니다.
- $\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(E, e_0, e_1, 1_{\mathbf{2}}) \equiv e_1$이 성립합니다.

따라서 불리언의 타입 $\mathbf{2}$에 대한 귀납 원리를 사용하면 경우 분석으로 추론할 수 있습니다. 두 생성자 모두 인자를 받지 않으므로, 불리언에 대해서는 이것만으로 충분합니다.

그러나 자연수의 경우에는 일반적으로 경우 분석만으로 충분하지 않습니다. 귀납 단계 $\mathsf{succ}(n)$에 해당하는 경우에서는 증명하려는 진술이 n에 대해 이미 증명되었다고 가정하고 싶기 때문입니다. 이로부터 다음과 같은 귀납 원리를 얻습니다:

- 모든 자연수에 관한 진술 $E : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$를 증명할 때에는, 이를 0에 대해 증명하고, n에 대해 성립한다고 가정하여 $\mathsf{succ}(n)$에 대해 증명하는 것으로 충분합니다. 즉, $e_z : E(0)$과 $e_s : \prod_{(n:\mathbb{N})} E(n) \to E(\mathsf{succ}(n))$을 구성합니다.

불리언의 경우와 마찬가지로, 함수 $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s) : \prod_{(x:\mathbb{N})} E(x)$에 대해서도 관련된 계산 규칙이 있습니다:

- $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s, 0) \equiv e_z$.
- 임의의 $n : \mathbb{N}$에 대해 $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s, \mathsf{succ}(n)) \equiv e_s(n, \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s, n))$이 성립합니다.

따라서 의존 함수 $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s)$는 **점화식**이라고 부르는 함수 e_z와 e_s를 통해 인자 $x : \mathbb{N}$에 대해 재귀적으로 정의된 것으로 이해할 수 있습니다. x가 영이면, 이 함수는 단순히 e_z를 반환합니다. x가 다른 자연수 n의 후속자이면, 점화식 e_s에 구체적인 선행자 n과 재귀 호출의 값 $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(E, e_z, e_s, n)$을 대입하여 결과를 얻습니다.

위에서 언급한 모든 예의 귀납 원리는 이러한 가족 유사성을 공유합니다. §5.6에서는 "귀납적 정의"의 일반적인 개념과 이에 적합한 귀납 원리를 유도하는 방법을 논의할 것입니다. 그러나 먼저 귀납적 정의들 사이의 여러 공통점을 살펴봅니다.

예를 들어 제1장에서는 모든 경우에 대해, 귀납 원리로부터 공역이 (족이 아닌) 단순한 타입인 재귀 원리를 유도할 수 있다고 언급했습니다. 귀납 원리와 재귀 원리는 모두 함수를 유일하게 특징짓는 것처럼 보이지 않으면서 함수의 존재만을 제공하므로 이상하게 느껴질 수 있습니다. 그러나 실제로 귀납 원리는 다음 정리에서와 같이 자기 자신의 유일성 원리까지 증명할 수 있을 만큼 강력합니다.

정리 5.1.1. $f, g : \prod_{(x:\mathbb{N})} E(x)$가 다음 점화식들을 만족하는 두 함수라고 합시다.

$$e_z : E(0) \qquad \text{그리고} \qquad e_s : \prod_{n:\mathbb{N}} E(n) \to E(\mathsf{succ}(n))$$

단, 이 점화식들은 명제적 등식을 법으로 하여 성립하면 충분합니다. 즉, 다음이 성립하고

$$f(0) = e_z \qquad \text{그리고} \qquad g(0) = e_z$$

또한 다음도 성립한다고 합시다.

$$\prod_{n:\mathbb{N}} f(\mathsf{succ}(n)) = e_s(n, f(n)),$$
$$\prod_{n:\mathbb{N}} g(\mathsf{succ}(n)) = e_s(n, g(n)).$$

그러면 f와 g는 같습니다.

증명. 타입 족 $D(x) :\equiv f(x) = g(x)$에 대한 귀납을 사용합니다. 기저 사례에서는 다음을 얻습니다.

$$f(0) = e_z = g(0).$$

귀납 사례에서는 $f(n) = g(n)$을 만족하는 $n : \mathbb{N}$을 가정합니다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$f(\mathsf{succ}(n)) = e_s(n, f(n)) = e_s(n, g(n)) = g(\mathsf{succ}(n)).$$

첫 번째와 마지막 등식은 f와 g에 대한 가정으로부터 따라 나옵니다. 가운데 등식은 귀납 가설과, 함수 적용이 등식을 보존한다는 사실로부터 따라 나옵니다. 이로써 f와 g 사이의 점별 등식을 얻으며, 함수 외연성을 적용하면 증명이 끝납니다. □

이 유일성 원리는 점화식을 명제적 등식을 법으로 하여서만, 즉 경로로서만 만족하는 함수에도 적용된다는 점에 유의하십시오. 물론 귀납 원리로부터 얻어지는 특정한 함수는 이 점화식들을 판단적으로 만족합니다. 이 점은 §5.5에서 다시 다루겠습니다. 한편, 정리 자체는 함수들 사이의 명제적 등식만을 주장합니다(연습문제 5.2도 참고하십시오). 호모토피적 관점에서는 이 경로가 정합적인지, 즉 등식 $f = g$가 고차 경로를 법으로 하여 유일한지를 묻는 것이 자연스럽습니다. §5.4에서 실제로 그러하다는 것을 보게 될 것입니다.

물론 함수에 대한 이와 비슷한 유일성 정리는 일반적으로 다른 귀납적 타입에 대해서도 정식화하고 증명할 수 있습니다. 다음 절에서는 이 유일성 성질이 유니벌런스와 함께, 자연수와 같은 귀납적 타입이 그 도입 규칙, 제거 규칙, 계산 규칙에 의해 완전히 특징지어진다는 것을 어떻게 함의하는지 보입니다.

5.2 귀납적 타입의 유일성

우리는 "그" 자연수를 특정한 귀납적 생성자 0과 succ를 갖는 특정한 타입 $\mathbb{N}$ 로 정의하였습니다. 그러나 앞 절에서 설명한 타입 이론에서의 귀납적 정의의 일반 원리에 따르면, 또 다른 타입을 똑같은 방식으로 정의하는 것을 막는 것은 아무것도 없습니다. 즉, $\mathbb{N}'$를 다음 생성자들로 생성되는 귀납적 타입이라고 합시다.

- $0' : \mathbb{N}'$
- $\mathsf{succ}' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$.

그러면 $\mathbb{N}'$는 $\mathbb{N}$와 똑같아 보이는 귀납 원리와 재귀 원리를 갖게 됩니다. 이 모든 "새로운" 자연수에 대하여 명제 $E : \mathbb{N}' \to \mathcal{U}$를 증명할 때에는 증명 $e_z : E(0')$와 다음 증명을 제시하는 것으로 충분합니다. $e_s : \prod_{(n:\mathbb{N}')} E(n) \to E(\mathsf{succ}'(n))$. 그리고 함수 $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(E, e_z, e_s) : \prod_{(n:\mathbb{N}')} E(n)$는 다음 계산 규칙들을 갖습니다.

- $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(E, e_z, e_s, 0') \equiv e_z$,
- 임의의 $n : \mathbb{N}'$에 대하여 $\mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(E, e_z, e_s, \mathsf{succ}'(n)) \equiv e_s(n, \mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(E, e_z, e_s, n))$ 입니다.

그렇다면 $\mathbb{N}$와 $\mathbb{N}'$ 사이에는 어떤 관계가 있습니까?

이는 단지 학문적인 질문에 그치지 않습니다. 자연수와 "닮은" 구조는 다른 많은 곳에서도 찾아볼 수 있기 때문입니다. 예를 들어, 자연수를 원소가 하나인 타입 위의 리스트와 동일시할 수도 있고 (이는 동굴 벽에서 발견되는, 아마도 가장 오래된 등장 형태일 것입니다), 음이 아닌 정수나 유리수와 실수의 부분집합 등과 동일시할 수도 있습니다. 또한 프로그래밍의 관점에서 보면 우리 자연수의 "일진" 표현은 매우 비효율적이므로, 때로는 이진 표현을 대신 사용하는 편을 선호할 수도 있습니다. 우리는 구성과 결과를 한 버전에서 다른 버전으로 옮기기 위하여, "자연수"의 이러한 모든 버전을 서로 동일시할 수 있기를 원합니다.

물론 자연수의 두 버전이 똑같은 귀납 원리를 만족한다면, 그로부터 유도되는 구조도 똑같습니다. 예를 들어, §1.9에서 정의한 함수 double의 예를 떠올려 보십시오. 우리의 새로운 자연수에 대한 비슷한 함수는 이를 복제하고 프라임을 붙이는 것만으로 쉽게 정의됩니다.

$$\mathsf{double}' :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(\mathbb{N}',\ 0',\ \lambda n.\, \lambda m.\, \mathsf{succ}'(\mathsf{succ}'(m))).$$

이는 간단해 보이지만, 중복이 끝없이 늘어난다는 명백한 단점이 있습니다. 함수뿐만 아니라 모든 보조 정리와 그 증명까지도 복제해야 합니다. 예를 들어, $\prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{double}(\mathsf{succ}(n)) = \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(n)))$와 같은 쉬운 결과도 그 귀납적 증명과 함께 "프라임을 붙여야" 합니다.

전통적인 수학에서는 $\mathbb{N}$와 $\mathbb{N}'$가 명백히 "같은 것"이며 필요할 때마다 서로 대체할 수 있다고 그냥 선언합니다. 이는 보통 문제가 되지 않지만, 상당히 많은 것을 덮어 두는 것이어서 비형식적인 수학과 그 엄밀한 기술 사이의 간극을 넓힙니다. 호모토피 타입 이론에서는 이보다 더 잘할 수 있습니다.

먼저 다음과 같은 사상들을 정의할 수 있음에 주목하십시오.

- $f :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}',\ 0',\ \lambda n.\, \mathsf{succ}') : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$,
- $g :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}'}(\mathbb{N},\ 0,\ \lambda n.\, \mathsf{succ}) : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}$.

g와 f의 합성은 $\mathbb{N}$ 위의 항등 함수와 같은 점화식을 만족하므로 정리 5.1.1에 의해 $\prod_{(n:\mathbb{N})} g(f(n)) = n$이 성립하고, 같은 정리의 "프라임이 붙은" 버전에 의해 $\prod_{(n:\mathbb{N}')} f(g(n)) = n$이 성립합니다. 따라서

f와 g는 준역원이며, 그러므로 $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}'$입니다. 이제 이 동치를 따라 $\mathbb{N}$ 위의 함수를 $\mathbb{N}'$ 위의 함수로 (그리고 그 반대 방향으로) 직접 옮길 수 있습니다. 예를 들면 다음과 같습니다.

$$\mathsf{double}' :\equiv \lambda n.\, f(\mathsf{double}(g(n))).$$

이 버전의 double'가 앞의 것과 같음을 보이는 것은 쉬운 연습문제입니다.

물론 여기에 놀라운 점은 전혀 없습니다. 이러한 동형사상이야말로 수학자가 $\mathbb{N}$와 $\mathbb{N}'$를 "동일시"한다고 할 때 떠올리는 바로 그것입니다. 그러나 동형사상을 가로지르는 "옮기기"의 메커니즘은 옮겨지는 대상에 따라 달라집니다. 단일 함수의 앞뒤에 f와 g를 합성하는 것처럼 언제나 간단하지는 않습니다. 예를 들어, 다음과 같은 간단한 보조정리를 생각해 보십시오.

$$\prod_{n:\mathbb{N}'} \mathsf{double}'(\mathsf{succ}'(n)) = \mathsf{succ}'(\mathsf{succ}'(\mathsf{double}'(n))).$$

올바른 f와 g들을 끼워 넣는 것은 $n : \mathbb{N}'$에 대한 귀납법으로 이를 직접 다시 증명하는 것보다 조금 더 쉬울 뿐입니다.

바로 여기서 유니밸런스 공리가 개입합니다. $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}'$이므로 $\mathbb{N} =_{\mathcal{U}} \mathbb{N}'$도 성립합니다. 즉 $\mathbb{N}$와 $\mathbb{N}'$는 타입으로서 같습니다. 이제 동일성에 대한 귀납 원리는 $\mathbb{N}$와 관련된 모든 구성이나 증명이 같은 방식으로 $\mathbb{N}'$로 자동으로 옮겨질 수 있음을 보장합니다. 함수나 정리의 타입을 타입으로 색인된 타입족 $P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$로 보고, 주어진 대상을 $P(\mathbb{N})$의 원소로 본 다음, 경로 $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$를 따라 수송하기만 하면 됩니다. 이 방법은 부담이 훨씬 적습니다.

간단히 설명하기 위해, 동일해 보이는 정의를 가진 두 타입 $\mathbb{N}$ 와 $\mathbb{N}'$ 의 경우로 이 방법을 설명했습니다. 그러나 실제로 더 흔한 상황은 두 정의가 문자 그대로 동일하지는 않지만, 그럼에도 한 귀납 원리가 다른 귀납 원리를 함의하는 경우입니다. 예를 들어, 원소가 하나인 타입의 원소로 이루어진 리스트의 타입 $\mathsf{List}(\mathbf{1})$을 생각해 봅시다. 이 타입은 다음 두 가지로 생성됩니다.

- 원소 $\mathsf{nil} : \mathsf{List}(\mathbf{1})$, 그리고
- 함수 $\mathsf{cons} : \mathbf{1} \times \mathsf{List}(\mathbf{1}) \to \mathsf{List}(\mathbf{1})$.

이는 $\mathbb{N}$ 의 정의와 동일하지 않으며, 동일한 귀납 원리를 낳지도 않습니다. $\mathsf{List}(\mathbf{1})$의 귀납 원리에 따르면, 임의의 $E : \mathsf{List}(\mathbf{1}) \to \mathcal{U}$와 점화식 데이터 $e_{\mathsf{nil}} : E(\mathsf{nil})$ 및 $e_{\mathsf{cons}} : \prod_{(u:\mathbf{1})} \prod_{(\ell:\mathsf{List}(\mathbf{1}))} E(\ell) \to E(\mathsf{cons}(u,\ell))$가 주어지면 $f(\mathsf{nil}) \equiv e_{\mathsf{nil}}$이고 $f(\mathsf{cons}(u,\ell)) \equiv e_{\mathsf{cons}}(u,\ell,f(\ell))$인 $f : \prod_{(\ell:\mathsf{List}(\mathbf{1}))} E(\ell)$가 존재합니다. (귀납적 정의의 귀납 원리를 유도하는 방법은 §5.6에서 살펴보겠습니다.)

이제 $0'' :\equiv \mathsf{nil} : \mathsf{List}(\mathbf{1})$으로 정의하고, $\mathsf{succ}'' : \mathsf{List}(\mathbf{1}) \to \mathsf{List}(\mathbf{1})$를 $\mathsf{succ}''(\ell) :\equiv \mathsf{cons}(\star,\ell)$로 정의한다고 합시다. 그러면 임의의 $E : \mathsf{List}(\mathbf{1}) \to \mathcal{U}$와 $e_0 : E(0'')$ 및 $e_s : \prod_{(\ell:\mathsf{List}(\mathbf{1}))} E(\ell) \to E(\mathsf{succ}''(\ell))$에 대해 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$e_{\mathsf{nil}} :\equiv e_0$$
$$e_{\mathsf{cons}}(\star,\ell,x) :\equiv e_s(\ell,x).$$

(e_{cons}의 정의에서는 $\mathbf{1}$ 의 귀납 원리를 사용하여 u가 $\star$라고 가정합니다.) 이제 $\mathsf{List}(\mathbf{1})$의 귀납 원리를 적용하면 다음을 만족하는 $f : \prod_{(\ell:\mathsf{List}(\mathbf{1}))} E(\ell)$를 얻습니다.

$$f(0'') \equiv f(\mathsf{nil}) \equiv e_{\mathsf{nil}} \equiv e_0$$
$$f(\mathsf{succ}''(\ell)) \equiv f(\mathsf{cons}(\star,\ell)) \equiv e_{\mathsf{cons}}(\star,\ell,f(\ell)) \equiv e_s(\ell,f(\ell)).$$

따라서 $\mathsf{List}(\mathbf{1})$은 $\mathbb{N}$와 같은 귀납 원리를 만족하며, 그러므로 (위와 같은 논증에 의해) $\mathbb{N}$와 같습니다.

끝으로, 이러한 결론은 자연수에만 국한되지 않고 모든 귀납적 타입에 적용됩니다. 예컨대 귀납적으로 정의된 타입 W가 있고, W와 같은 귀납 원리를 만족하는 다른 타입 W'가 있다면 $W \simeq W'$가 성립하며, 따라서 $W = W'$입니다. W와 W'에서 유도되는 재귀 원리를 사용하여 각각 사상 $W \to W'$와 $W' \to W$를 구성한 다음, 각각의 귀납 원리를 사용하여 두 합성이 모두 항등 사상과 같음을 증명합니다. 예를 들어, 제1장에서 쌍대곱 $A + B$를 $\sum_{(x:\mathbf{2})} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, A, B, x)$로 정의할 수도 있었음을 보았습니다. 후자의 타입은 전자와 같은 귀납 원리를 만족하므로, 두 타입은 표준적으로 동치입니다.

물론 이것은 두 대상이 같은 보편 성질을 가지면 두 대상이 동치라는, 범주론에서 익숙한 사실과 매우 비슷합니다. §5.4에서는 귀납적 타입이 실제로 보편 성질을 가진다는 것을 살펴볼 것이며, 따라서 이것은 그 일반 원리가 드러난 한 사례입니다.

5.3 W-타입

귀납적 타입은 매우 일반적입니다. 그 덕분에 유용성과 적용 범위는 뛰어나지만, 전체를 한꺼번에 연구하기는 어렵습니다. 다행히 귀납적 타입은 모두 몇 가지 특수한 경우로 형식적으로 환원할 수 있습니다. 이 환원에 관한 논의는 — 어차피 실제로 타입 이론을 사용하는 수학자와는 무관하지만 — 이 책의 범위를 벗어납니다. 다만 아직 다루지 않은 기본적인 특수한 경우 하나를 잠시 논의하겠습니다. 바로 Martin-Löf의 W-타입으로, 정초된 트리의 타입이라고도 합니다. W-타입은 자연수, 리스트, 이진 트리와 같은 타입을 일반화한 것으로, 임의의 귀납적 타입이 지닌 "재귀" 측면을 담아낼 만큼 충분히 일반적입니다.

특정한 W-타입은 두 매개변수 $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$를 주어 지정하며, 이렇게 얻은 W-타입은 $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$로 씁니다. 타입 A는 $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$의 레이블들의 타입을 나타내며, 이 레이블들은 생성자 역할을 합니다(다만 생성자라는 말은 귀납적 정의에서 실제로 나타나는 함수를 가리키는 데에만 쓰겠습니다). 예를 들어, 자연수를 W-타입으로 정의할 때 타입 A는 두 원소 $0_{\mathbf{2}}$와 $1_{\mathbf{2}}$가 거주하는 타입 $\mathbf{2}$이 됩니다. 자연수를 얻는 방법은 정확히 두 가지이기 때문입니다 — 자연수는 0이거나 다른 자연수의 후속자입니다.

타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$는 레이블의 항수를 기록하는 데 사용됩니다. 레이블 $a : A$는 $B(a)$로 색인된 귀납적 인자들의 족을 받습니다. 따라서 a의 인자가 "$B(a)$개" 있다고 생각할 수 있습니다. 이 인자들은 함수 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$로 표현되며, 임의의 $b : B(a)$에 대해 $f(b)$는 레이블 a의 "b번째" 인자로 이해됩니다. 따라서 W-타입 $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$는 정초 트리의 타입으로 생각할 수 있습니다. 여기서 각 노드는 A의 원소로 레이블이 붙고, $a : A$로 레이블이 붙은 각 노드는 $B(a)$개의 가지를 가집니다.

자연수의 경우, 레이블 $0_{\mathbf{2}}$는 상수 0을 구성하므로 항수가 0이고, 레이블 $1_{\mathbf{2}}$는 인자의 후속자를 구성하므로 항수가 1입니다. 이를 나타내기 위해 $\mathbf{2}$에 대한 단순 제거를 사용하여 타입들의 유니버스로 가는 함수 $\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$를 정의할 수 있습니다. 이 함수는 $0_{\mathbf{2}}$에 대해서는 빈 타입 $\mathbf{0}$를, $1_{\mathbf{2}}$에 대해서는 단위 타입 $\mathbf{1}$을 돌려줍니다. 따라서 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathbf{N}^{\mathbf{w}} :\equiv \mathsf{W}_{(b:\mathbf{2})} \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, b)$$

여기서 위첨자 $\mathbf{w}$는 이 버전의 자연수를 앞서 사용한 버전과 구별하는 역할을 합니다. 마찬가지로, A 위의 리스트의 타입은 $\mathbf{1} + A$개의 레이블을 가진 W-타입으로 정의할 수 있습니다. 빈 리스트를 위한 0항 레이블 하나와 각 $a : A$마다 단항 레이블 하나가 있으며, 단항 레이블은 리스트의 머리에 a를 덧붙이는 것에 대응합니다.

$$\mathsf{List}(A) :\equiv \mathsf{W}_{(x:\mathbf{1}+A)} \mathsf{rec}_{\mathbf{1}+A}(\mathcal{U},\ \mathbf{0},\ \lambda a.\, \mathbf{1},\ x).$$

일반적으로, $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$로 지정되는 W-타입 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$는 다음 생성자로 생성되는 귀납적 타입입니다.

- $\mathsf{sup} : \prod_{(a:A)} \left(B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)\right) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$.

생성자 sup(상한을 뜻하는 supremum의 줄임말)는 레이블 $a : A$와 a의 인자들을 나타내는 함수 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$를 받아 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$의 새 원소를 구성합니다. 앞에서 자연수를 W-타입으로 인코딩한 방식을 사용하면, 예를 들어 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$0^{\mathbf{w}} :\equiv \mathsf{sup}(0_{\mathbf{2}},\ \lambda x.\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x)).$$

달리 말하면, 레이블 $0_{\mathbf{2}}$를 사용하여 $0^{\mathbf{w}}$를 구성합니다. 그러면 $\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0_{\mathbf{2}})$는 $\mathbf{0}$로 계산되는데, $0_{\mathbf{2}}$가 0항 레이블이므로 마땅히 그래야 합니다. 따라서 $0_{\mathbf{2}}$에 주어지는 (0개의) 인자들을 나타내는 함수 $f : \mathbf{0} \to \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$를 구성해야 합니다. 물론 이것은 위에 보인 대로 $\mathbf{0}$에 대한 단순 제거를 사용하면 자명합니다. 마찬가지로, $1^{\mathbf{w}}$와 후속자 함수 $\mathsf{succ}^{\mathbf{w}}$를 정의할 수 있습니다.

$$1^{\mathbf{w}} :\equiv \mathsf{sup}(1_{\mathbf{2}},\ \lambda x.\, 0^{\mathbf{w}})$$
$$\mathsf{succ}^{\mathbf{w}} :\equiv \lambda n.\, \mathsf{sup}(1_{\mathbf{2}},\ \lambda x.\, n).$$

W-타입에 대해 다음 귀납 원리가 성립합니다.

- W-타입 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$의 모든 원소에 관한 명제 $E : \left(\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)\right) \to \mathcal{U}$를 증명할 때에는, $b : B(a)$인 모든 $f(b)$에 대해 그 명제가 성립한다고 가정하고 $\mathsf{sup}(a, f)$에 대해 증명하면 충분합니다. 다시 말해, 다음과 같은 증명을 제시하면 충분합니다.

$$e : \prod_{(a:A)} \prod_{(f:B(a)\to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x))} \prod_{(g:\prod_{(b:B(a))} E(f(b)))} E(\mathsf{sup}(a, f))$$

변수 g는 귀납 가설, 즉 a의 모든 인자가 E를 만족한다는 것을 나타냅니다. 각 $b : B(a)$는 a의 인자 $f(b)$ 하나에 대응하므로, 이를 진술하기 위해 타입 $B(a)$의 모든 원소에 대해 양화합니다.

W-타입으로 인코딩된 자연수에서 함수 double은 어떻게 정의하겠습니까? 공역이 $\mathbf{N}^{\mathbf{w}}$ 자신인 $\mathbf{N}^{\mathbf{w}}$의 재귀 원리를 사용하려고 합니다. 따라서 다음과 같은 적절한 함수를 구성해야 합니다.

$$e : \prod_{(a:\mathbf{2})} \prod_{(f:B(a)\to \mathbf{N}^{\mathbf{w}})} \prod_{(g:B(a)\to \mathbf{N}^{\mathbf{w}})} \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$$

이는 double 함수에 대한 점화식을 나타냅니다. 간단히 하기 위해 타입 족 $\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$를 B로 표기합니다.

분명히 e는 $a : \mathbf{2}$을 첫 번째 인자로 받는 함수가 됩니다. 다음 단계는 a에 대해 경우 분석을 수행하여, a가 $0_{\mathbf{2}}$인지 $1_{\mathbf{2}}$인지에 따라 진행하는 것입니다. 이로부터 다음과 같은 형태를 생각할 수 있습니다.

$$e :\equiv \lambda a.\, \mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(C, e_0, e_1, a)$$

여기서

$$C :\equiv \lambda a.\ \prod_{(f:B(a)\to \mathbf{N}^{\mathbf{w}})} \prod_{(g:B(a)\to \mathbf{N}^{\mathbf{w}})} \mathbf{N}^{\mathbf{w}}.$$

a가 $0_{\mathbf{2}}$이면 타입 $B(a)$는 $\mathbf{0}$가 됩니다. 따라서 $f : \mathbf{0} \to \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$와 $g : \mathbf{0} \to \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$가 주어졌을 때 $\mathbf{N}^{\mathbf{w}}$의 원소를 구성하고자 합니다. 레이블 $0_{\mathbf{2}}$는 $\mathbf{0}$를 나타내므로 귀납적 인자가 하나도 필요하지 않으며, 변수 f와 g는 무관합니다. 결과로 $0^{\mathbf{w}}$를 반환합니다:

$$e_0 :\equiv \lambda f.\, \lambda g.\, 0^{\mathbf{w}}.$$

마찬가지로, a가 $1_{\mathbf{2}}$이면 타입 $B(a)$는 $\mathbf{1}$가 됩니다. 레이블 $1_{\mathbf{2}}$는 후속자 연산자를 나타내므로 귀납적 인자 하나 — 선행자 — 가 필요하며, 이는 변수 $f : \mathbf{1} \to \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$로 표현됩니다. 선행자에 대한 재귀 호출의 값은 변수 $g : \mathbf{1} \to \mathbf{N}^{\mathbf{w}}$로 표현됩니다. 따라서 이 값(즉 $g(\star)$)을 취하여 후속자 함수를 두 번 적용하면 원하는 결과를 얻습니다:

$$e_1 :\equiv \ \lambda f.\, \lambda g.\, \mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(\mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(g(\star))).$$

이를 종합하면 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{double} :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{N}^{\mathbf{w}}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, e)$$

여기서 e는 위에서 정의한 것과 같습니다.

함수 $\mathsf{rec}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}(E, e) : \prod_{(w:\mathsf{W}_{(x:A)}B(x))} E(w)$에 대응하는 계산 규칙은 다음과 같습니다.

- 임의의 $a : A$와 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}(E, e, \mathsf{sup}(a, f)) \equiv e(a, f, (\lambda b.\, \mathsf{rec}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}(E, e, f(b)))).$$

다시 말해, 함수 $\mathsf{rec}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}(E, e)$는 점화식 e를 만족합니다.

위의 계산 규칙에 의해 함수 double은 예상대로 동작합니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{double}(0^{\mathbf{w}}) &\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{N}^{\mathbf{w}}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, e, \mathsf{sup}(0_{\mathbf{2}},\ \lambda x.\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x))) \\
&\equiv e(0_{\mathbf{2}}, (\lambda x.\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x)), (\lambda x.\, \mathsf{double}(\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x)))) \\
&\equiv e_0((\lambda x.\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x)), (\lambda x.\, \mathsf{double}(\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x)))) \\
&\equiv 0^{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}
\mathsf{double}(1^{\mathbf{w}}) &\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{N}^{\mathbf{w}}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, e, \mathsf{sup}(1_{\mathbf{2}},\ \lambda x.\, 0^{\mathbf{w}})) \\
&\equiv e(1_{\mathbf{2}}, (\lambda x.\, 0^{\mathbf{w}}), (\lambda x.\, \mathsf{double}(0^{\mathbf{w}}))) \\
&\equiv e_1((\lambda x.\, 0^{\mathbf{w}}), (\lambda x.\, \mathsf{double}(0^{\mathbf{w}}))) \\
&\equiv \mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(\mathsf{succ}^{\mathbf{w}}((\lambda x.\, \mathsf{double}(0^{\mathbf{w}}))(\star))) \\
&\equiv \mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(\mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(0^{\mathbf{w}}))
\end{aligned}$$

등이 성립합니다.

자연수의 경우와 마찬가지로, W-타입에 대해서도 유일성 정리를 증명할 수 있습니다:

정리 5.3.1. $g, h : \prod_{(w:\mathsf{W}_{(x:A)}B(x))} E(w)$가 다음 점화식을 만족하는 두 함수라고 합시다.

$$e : \prod_{a,f} \Big(\prod_{b:B(a)} E(f(b)) \Big) \to E(\mathsf{sup}(a, f)),$$

명제적으로 만족하는, 즉 다음을 만족하는 두 함수라고 합시다.

$$\prod_{a,f} g(\mathsf{sup}(a,f)) = e(a,f,\lambda b.\, g(f(b))),$$
$$\prod_{a,f} h(\mathsf{sup}(a,f)) = e(a,f,\lambda b.\, h(f(b))).$$

그러면 g와 h는 같습니다.

5.4 귀납적 타입은 시작 대수입니다

앞서 암시했듯이, 귀납적 타입은 범주론적 보편 성질도 가집니다. 귀납적 타입은 호모토피 시작 대수, 즉 지정된 생성자들에 의해 결정되는 "대수"들의 범주에서 (정합적 호모토피 수준에서) 시작 대상입니다. 간단한 예로 자연수를 생각해 봅시다. 여기서 적절한 종류의 "대수"란 $\mathbb{N}$의 생성자들이 $\mathbb{N}$에 부여하는 것과 같은 구조를 갖춘 타입입니다.

정의 5.4.1. $\mathbb{N}$-**대수** 는 두 원소 $c_0 : C$, $c_s : C \to C$를 갖춘 타입 C입니다. 이러한 대수들의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathbb{N}\mathsf{Alg} :\equiv \sum_{C:\mathcal{U}} C \times (C \to C).$$

정의 5.4.2. $\mathbb{N}$-대수 (C, c_0, c_s)와 (D, d_0, d_s) 사이의 $\mathbb{N}$-**준동형사상** 은 $h(c_0) = d_0$이고 모든 $c : C$에 대해 $h(c_s(c)) = d_s(h(c))$를 만족하는 함수 $h : C \to D$입니다. 이러한 준동형사상들의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathbb{N}\mathsf{Hom}((C,c_0,c_s),(D,d_0,d_s)) :\equiv \sum_{(h:C\to D)} (h(c_0) = d_0) \times \prod_{(c:C)} (h(c_s(c)) = d_s(h(c))).$$

따라서 $\mathbb{N}$-대수와 $\mathbb{N}$-준동형사상의 범주가 있으며, $\mathbb{N}$이 이 범주의 시작 대상이라는 것이 우리의 주장입니다. 범주론 학자라면 이것이 범주에서 자연수 대상의 정의임을 즉시 알아볼 것입니다.

물론 우리의 타입은 ∞-그루포이드처럼 동작하므로, 실제로는 $\mathbb{N}$-대수들의 $(\infty,1)$-범주가 있으며, $\mathbb{N}$이 적절한 $(\infty,1)$-범주적 의미에서 시작 대상이기를 요구해야 합니다. 다행히도 $(\infty,1)$-범주를 정의하지 않고도 이를 정식화할 수 있습니다.

정의 5.4.3. 임의의 다른 $\mathbb{N}$-대수 C에 대해 I에서 C로 가는 $\mathbb{N}$-준동형사상들의 타입이 축약 가능하면, $\mathbb{N}$-대수 I를 **호모토피 시작** , 줄여서 h-**시작** 이라고 합니다. 따라서 다음과 같습니다.

$$\mathsf{isHinit}_{\mathbb{N}}(I) :\equiv \prod_{C:\mathbb{N}\mathsf{Alg}} \mathsf{isContr}(\mathbb{N}\mathsf{Hom}(I,C)).$$

h-시작 대수는 존재한다면 유일합니다. 이때 유일성은 범주론에서 흔히 그렇듯 동형사상을 제외하고 유일한 정도가 아니라, 유니밸런스 공리에 의해 상등을 제외하고 유일하다는 뜻입니다.

정리 5.4.4. 임의의 두 h-시작 $\mathbb{N}$-대수는 같습니다. 따라서 h-시작 $\mathbb{N}$-대수들의 타입은 단순 명제입니다.

증명. I와 J가 h-시작 $\mathbb{N}$-대수라고 합시다. 그러면 $\mathbb{N}\mathsf{Hom}(I,J)$는 축약 가능하므로 어떤 $\mathbb{N}$-준동형사상 $f : I \to J$를 원소로 가지며, 마찬가지로 $\mathbb{N}$-준동형사상 $g : J \to I$도 얻습니다. 이제 합성 $g \circ f$는 id_I와 마찬가지로 I에서 I로 가는 $\mathbb{N}$-준동형사상입니다. 그런데 $\mathbb{N}\mathsf{Hom}(I,I)$는 축약 가능하므로

$g \circ f = \mathsf{id}_I$입니다. 마찬가지로 $f \circ g = \mathsf{id}_J$입니다. 따라서 $I \simeq J$이고, 그러므로 $I = J$입니다. 축약 가능하다는 것은 단순 명제이고 의존 곱은 단순 명제를 보존하므로, h-시작이라는 것 자체도 단순 명제입니다. 따라서 I(또는 J)가 h-시작이라는 임의의 두 증명은 반드시 같으며, 이로써 증명이 완료됩니다. □

이제 다음 정리를 얻습니다.

정리 5.4.5. $\mathbb{N}$-대수 $(\mathbb{N}, \mathbf{0}, \mathsf{succ})$는 호모토피 시작 대수입니다.

증명 개요. 임의의 $\mathbb{N}$-대수 (C, c_0, c_s)를 고정합시다. $\mathbb{N}$의 재귀 원리에 의해 다음과 같이 정의되는 함수 $f : \mathbb{N} \to C$를 얻습니다.

$$f(0) :\equiv c_0$$
$$f(\mathsf{succ}(n)) :\equiv c_s(f(n)).$$

이 두 등식에 의해 f는 $\mathbb{N}$-준동형사상이 되며, 이를 $\mathbb{N}\mathsf{Hom}(\mathbb{N}, C)$의 축약 중심으로 삼을 수 있습니다. 그러면 유일성 정리(정리 5.1.1)에 의해 다른 모든 $\mathbb{N}$-준동형사상은 f와 같습니다. □

이를 더 일반적인 맥락에 놓으려면 자기 함자에 대한 대수라는 개념을 생각하는 것이 유용합니다. 타입 C를 $\mathbb{N}$-대수로 만드는 것은 함수 $c : C + \mathbf{1} \to C$를 주는 것과 같으며, 함수 $f : C \to D$가 $\mathbb{N}$-준동형사상인 것은 정확히 $f \circ c \sim d \circ (f + \mathbf{1})$일 때라는 점에 유의하십시오. 범주론의 언어로 말하면, 이는 $\mathbb{N}$-대수가 타입들의 범주의 자기 함자 $F(X) :\equiv X + 1$에 대한 대수라는 뜻입니다.

더 일반적인 경우로, $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$에 연관된 W-타입을 생각해 봅시다. 이 경우에는 이에 연관된 **다항 함자**가 있습니다.

$$P(X) = \sum_{x:A} (B(x) \to X). \tag{5.4.6}$$

사실 이 대응은 호모토피를 허용하는 수준에서만 함자적이지만, 이는 이후의 내용에 아무런 차이를 만들지 않습니다. 그러면 정의에 따라 P-**대수** 는 함수 $s_C : PC \to C$를 갖춘 타입 C입니다. Σ-타입의 보편 성질에 의해, 이는 함수 $\prod_{(a:A)}(B(a) \to C) \to C$를 주는 것과 동치입니다. 이러한 대상을 A와 B에 대한 W-**대수** 라고도 부르며, 다음과 같이 씁니다.

$$\mathsf{WAlg}(A, B) :\equiv \sum_{(C:\mathcal{U})} \prod_{(a:A)} (B(a) \to C) \to C.$$

마찬가지로, P-대수 (C, s_C)와 (D, s_D)에 대해, 이들 사이의 **준동형사상** $(f, s_f) : (C, s_C) \to (D, s_D)$는 함수 $f : C \to D$와, 사상 $PC \to D$ 사이의 다음 호모토피로 이루어집니다.

$$s_f : f \circ s_C = s_D \circ Pf,$$

여기서 $Pf : PC \to PD$는 쉽게 정의할 수 있는 P의 작용을 $f : C \to D$에 적용한 결과입니다. 이러한 대수 준동형사상은 다음과 같은 형태로 시사적으로 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{array}{ccc} PC & \xrightarrow{Pf} & PD \\ {\scriptstyle s_C}\downarrow & \overset{s_f}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle s_D} \\ C & \xrightarrow[f]{} & D \end{array}$$

원소의 관점에서, 다음이 성립하면 f는 P-준동형사상(또는 W-**준동형사상**)입니다.

$$f(s_C(a,h)) = s_D(a, f \circ h).$$

W-준동형사상들의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{WHom}_{A,B}((C,s_C),(D,s_D)) :\equiv \sum_{(f:C\to D)} \prod_{(a:A)} \prod_{(h:B(a)\to C)} f(s_C(a,h)) = s_D(a, f\circ h)$$

마지막으로, 모든 P-대수 (D,s_D)에 대해 모든 대수 준동형사상 $(C,s_C)\to(D,s_D)$의 타입이 축약 가능하면, P-대수 (C,s_C)를 **호모토피 시작** 대수라고 합니다. 즉, 다음과 같습니다.

$$\mathsf{isHinit}_{\mathsf{W}}(A,B,I) :\equiv \prod_{C:\mathsf{WAlg}(A,B)} \mathsf{isContr}(\mathsf{WHom}_{A,B}(I,C)).$$

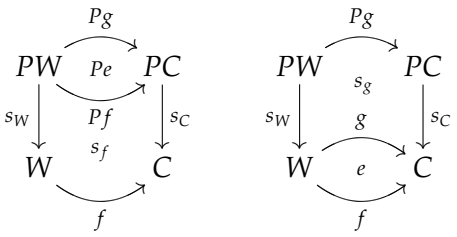
이제 정리 5.4.5에 대응하는 정리는 다음과 같습니다.

정리 5.4.7. 임의의 타입 $A:\mathcal{U}$와 타입 족 $B:A\to\mathcal{U}$에 대해, W-대수 $(\mathsf{W}_{(x:A)}B(x),\mathsf{sup})$는 h-시작 대수입니다.

증명 개요. $A:\mathcal{U}$와 $B:A\to\mathcal{U}$가 주어졌다고 가정하고, 이에 연관된 다항 함자 $P(X) :\equiv \sum_{(x:A)}(B(x)\to X)$를 생각합시다. $W :\equiv \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$라고 둡시다. 그러면 §5.3의 W-도입 규칙을 사용하여 구조 사상 $s_W :\equiv \mathsf{sup} : PW\to W$를 얻습니다. 우리는 대수 (W,s_W)가 h-시작 대수임을 보이고자 합니다. 따라서 또 다른 대수 (C,s_C)를 생각하고, (W,s_W)에서 (C,s_C)로 가는 W-준동형사상들의 타입 $T :\equiv \mathsf{WHom}_{A,B}((W,s_W),(C,s_C))$가 축약 가능함을 보입시다. 이를 위해 W-제거 규칙과 W-계산 규칙을 사용하면 W-준동형사상 $(f,s_f):(W,s_W)\to(C,s_C)$를 정의할 수 있고, 따라서 T에 원소가 있음을 보일 수 있다는 점에 주목하십시오. 나아가 모든 W-준동형사상 $(g,s_g):(W,s_W)\to(C,s_C)$에 대해 다음과 같은 동일성 증명이 존재함을 보여야 합니다.

$$p : (f,s_f) = (g,s_g). \tag{5.4.8}$$

이는 일반적으로 $(f,s_f)=(g,s_g)$ 꼴의 타입이 f에서 g로 가는 **대수 2-세포** 의 타입과 동치라는 사실을 이용합니다. 대수 2-세포의 표준적인 원소는 (e,s_e) 꼴의 쌍이며, 여기서 $e:f=g$이고 s_e는 다음 붙임 도표가 나타내는 동일성 증명들 사이의 고차 동일성 증명입니다.



이 사실에 비추어 볼 때, 식 (5.4.8)에서와 같은 원소가 존재함을 증명하려면 f에서 g로 가는 대수 2-세포 (e,s_e)가 존재함을 보이는 것으로 충분합니다. 이제 동일성 증명 $e:f=g$는 필요한 동일성 증명 s_e의 존재가 보장되도록 함수 외연성과 W-제거를 통해 구성됩니다. □

5.5 호모토피 귀납적 타입

§5.3에서 우리는 자연수를 다음과 같이 W-타입으로 부호화하는 방법을 보였습니다.

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{\mathbf{w}} &:\equiv \mathsf{W}_{(b:\mathbf{2})}\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(\mathcal{U}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, b),\\ 0^{\mathbf{w}} &:\equiv \mathsf{sup}(0_{\mathbf{2}}, (\lambda x.\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(\mathbf{N}^{\mathbf{w}}, x))),\\ \mathsf{succ}^{\mathbf{w}} &:\equiv \lambda n.\, \mathsf{sup}(1_{\mathbf{2}}, (\lambda x.\, n)).\end{aligned}$$

또한 재귀 원리를 사용하여 $\mathbf{N}^{\mathbf{w}}$ 위의 double 함수를 정의하는 방법도 보였습니다. 그러나 귀납 원리에 관해서는 이 부호화가 더 이상 만족스럽지 않습니다. $E : \mathbf{N}^{\mathbf{w}} \to \mathcal{U}$와 점화식 $e_z : E(0^{\mathbf{w}})$ 및 $e_s : \prod_{(n:\mathbf{N}^{\mathbf{w}})} E(n) \to E(\mathsf{succ}^{\mathbf{w}}(n))$가 주어졌을 때, 주어진 점화식을 명제적으로, 즉 경로를 허용하는 수준에서만 만족하는 의존 함수 $r(E, e_z, e_s) : \prod_{(n:\mathbf{N}^{\mathbf{w}})} E(n)$를 구성할 수 있을 뿐입니다. 이는 판단적 등식을 주는 자연수의 계산 규칙을 W-타입의 규칙으로부터 명백한 방법으로는 유도할 수 없다는 뜻입니다.

기존의 귀납적 타입 대신 모든 계산 규칙이 경로를 허용하는 수준에서 기술되는, 즉 기호 $\equiv$가 $=$로 대체되는 호모토피 귀납적 타입을 생각하면 이 문제는 사라집니다. 예를 들어, W-타입의 호모토피 버전 W^{h}에 대한 계산 규칙은 다음과 같이 됩니다.

- 임의의 $a : A$와 $f : B(a) \to \mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{rec}_{\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)}(E, e, \mathsf{sup}(a, f)) = e\Big(a, f, \big(\lambda b.\, \mathsf{rec}_{\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)}(E, f(b))\big)\Big)$$

호모토피 귀납적 타입은 계산적 성질 면에서 분명한 단점이 있습니다. 귀납 원리를 사용해 구성한 함수의 동작을 이제 명제적으로만 특징지을 수 있기 때문입니다. 그러나 다른 여러 이유로 호모토피 귀납적 타입도 함께 고려할 필요가 있습니다. 예를 들어 §5.4에서 귀납적 타입이 호모토피 시작 대수임을 보였지만, 모든 호모토피 시작 대수가 귀납적 타입인 것은 (즉, 대응하는 귀납 원리를 만족하는 것은) 아닙니다. 하지만 모든 호모토피 시작 대수는 호모토피 귀납적 타입입니다. 마찬가지로, 관련된 타입 중 하나(또는 둘 다)가 호모토피 귀납적 타입일 뿐인 경우에도 §5.2의 유일성 논증을 적용하고 싶을 수 있습니다. 예를 들어 $\mathbb{N}$의 W-타입 인코딩이 일반적인 $\mathbb{N}$과 동치임을 보이는 경우가 그렇습니다.

또한 호모토피 귀납적 타입이라는 개념은 이제 타입 이론 내부의 개념입니다. 예를 들어 이는 모든 자연수 대상의 타입을 만들고 그 타입에 관해 주장할 수 있다는 뜻입니다. W-타입의 경우, 호모토피 W-타입 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$를 상한 함수와 함께 적절한 (명제적) 계산 규칙을 만족하는 귀납 원리를 갖춘 임의의 타입으로 특징지을 수 있습니다:

$$\begin{aligned}\mathsf{W}_d(A, B) :\equiv \sum_{(W:\mathcal{U})} \sum_{(\mathsf{sup}:\prod_{(a)}(B(a)\to W)\to W)} \prod_{(E:W\to\mathcal{U})} \\ \prod_{(e:\prod_{(a,f)}(\prod_{(b:B(a))} E(f(b)))\to E(\mathsf{sup}(a,f)))} \sum_{(\mathsf{ind}:\prod_{(w:W)} E(w))} \prod_{(a,f)} \\ \mathsf{ind}(\mathsf{sup}(a, f)) = e(a, \lambda b.\, \mathsf{ind}(f(b))).\end{aligned}$$

제6장에서는 명제적 계산 규칙을 고려할 가치가 있는 다른 이유들도 살펴보겠습니다.

이 절에서는 호모토피 귀납적 타입에 관한 몇 가지 기본 사실을 서술합니다. 증명은 다소 기술적이므로 대부분 생략합니다.

정리 5.5.1. 임의의 $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$에 대해 타입 $\mathsf{W}_d(A, B)$는 단순 명제입니다.

사실 재귀 원리에 특정한 유일성 법칙과 정합성 법칙을 더하여 W-타입을 동치로 특징지을 수도 있습니다. 먼저 재귀 원리를 제시합니다:

- W-타입 $\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)$에서 타입 C로 가는 함수를 구성할 때는, $b : B(a)$인 모든 $f(b)$의 값이 주어졌다고 가정하고 $\mathsf{sup}(a, f)$에서의 값을 제시하면 충분합니다. 다시 말해, 다음 함수를 구성하면 충분합니다

$$c : \prod_{a:A} (B(a) \to C) \to C.$$

$\mathsf{rec}_{\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)}(C, c) : (\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)) \to C$에 대응하는 계산 규칙은 다음과 같습니다:

- 임의의 $a : A$와 $f : B(a) \to \mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)$에 대해 다음 등식의 증인 $\beta(C, c, a, f)$가 존재합니다

$$\mathsf{rec}_{\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)}(C, c, \mathsf{sup}(a, f)) = c(a, \lambda b.\, \mathsf{rec}_{\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)}(C, c, f(b))).$$

나아가 같은 점화식으로 정의된 임의의 두 함수는 서로 같다는 다음 유일성 원리를 가정합니다:

- $C : \mathcal{U}$와 $c : \prod_{(a:A)}(B(a) \to C) \to C$가 주어졌다고 합시다. $g, h : (\mathsf{W}^h_{(x:A)}B(x)) \to C$가 명제적 등식 수준에서 점화식 c를 만족하는 두 함수, 즉 다음이 성립하는 두 함수라고 합시다

$$\beta_g : \prod_{a,f} g(\mathsf{sup}(a, f)) = c(a, \lambda b.\, g(f(b))),$$
$$\beta_h : \prod_{a,f} h(\mathsf{sup}(a, f)) = c(a, \lambda b.\, h(f(b))).$$

  그러면 g와 h는 같습니다. 즉 타입이 $g = h$인 $\alpha(C, c, f, g, \beta_g, \beta_h)$가 존재합니다.

재귀 원리뿐만 아니라 귀납 원리도 있을 때는 이 명제적 유일성 원리를 유도할 수 있음을 상기하십시오(정리 5.3.1). 그러나 재귀만 있으면 유일성 원리는 더 이상 유도할 수 없습니다 — 사실 그 명제는 참이지도 않습니다(연습문제). 따라서 이를 공리로 가정합니다. 또한 유일성의 증명이 표준 원소에서 어떻게 동작하는지 알려 주는 다음 정합성 법칙도 가정합니다:

- 임의의 $a : A$와 $f : B(a) \to C$에 대해 다음 도식은 명제적으로 가환합니다:

$$\begin{array}{ccc} g(\mathsf{sup}(a, f)) & \xrightarrow{\beta_g} & c(a, \lambda b.\, g(f(b))) \\ {\scriptstyle \alpha(\mathsf{sup}(a,f))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c(a,-)(\mathsf{funext}(\lambda b.\, \alpha(f(b))))} \\ h(\mathsf{sup}(a, f)) & \xrightarrow[\beta_h]{} & c(a, \lambda b.\, h(f(b))) \end{array}$$

  여기서 α는 경로 $\alpha(C, c, f, g, \beta_g, \beta_h) : g = h$의 약칭입니다.

이 모든 데이터를 종합하면 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$를 상한 함수를 갖추고 단순 제거 규칙, 계산 규칙, 유일성 규칙, 정합성 규칙을 만족하는 타입으로 특징짓는 또 다른 방법을 얻습니다:

$$\mathsf{W}_s(A,B) :\equiv \sum_{(W:\mathcal{U})} \sum_{(\mathsf{sup}:\prod_{(a)}(B(a)\to W)\to W)} \prod_{(C:\mathcal{U})} \prod_{(c:\prod_{(a)}(B(a)\to C)\to C)}$$
$$\sum_{(\mathsf{rec}:W\to C)} \sum_{(\beta:\prod_{(a,f)} \mathsf{rec}(\mathsf{sup}(a,f))=c(a,\lambda b.\,\mathsf{rec}(f(b))))} \prod_{(g:W\to C)} \prod_{(h:W\to C)} \prod_{(\beta_g:\prod_{(a,f)} g(\mathsf{sup}(a,f))=c(a,\lambda b.\,g(f(b))))}$$
$$\prod_{(\beta_h:\prod_{(a,f)} h(\mathsf{sup}(a,f))=c(a,\lambda b.\,h(f(b))))} \sum_{(\alpha:\prod_{(w:W)} g(w)=h(w))} \prod_{(a,f)}$$
$$\alpha(\mathsf{sup}(a,f))\cdot\beta_h = \beta_g \cdot c(a,-)(\mathsf{funext}\ \lambda b.\,\alpha(f(b)))$$

정리 5.5.2. 임의의 $A:\mathcal{U}$와 $B:A\to\mathcal{U}$에 대해 타입 $\mathsf{W}_s(A,B)$는 단순 명제입니다.

마지막으로, $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$를 h-시작 W-대수로 보는 매우 간결한 세 번째 특징화가 있습니다.

$$\mathsf{W}_h(A,B) :\equiv \sum_{I:\mathsf{WAlg}(A,B)} \mathsf{isHinit}_{\mathsf{W}}(A,B,I).$$

정리 5.5.3. 임의의 $A:\mathcal{U}$와 $B:A\to\mathcal{U}$에 대해 타입 $\mathsf{W}_h(A,B)$는 단순 명제입니다.

사실 W-타입의 세 가지 특징짓기는 모두 동치입니다:

보조정리 5.5.4. 임의의 $A:\mathcal{U}$와 $B:A\to\mathcal{U}$에 대해 다음이 성립합니다

$$\mathsf{W}_d(A,B) \simeq \mathsf{W}_s(A,B) \simeq \mathsf{W}_h(A,B)$$

실제로 정리 5.4.7을 개선한 다음 정리가 성립합니다:

정리 5.5.5. W-타입의 형성 규칙, 도입 규칙, 제거 규칙, 명제적 계산 규칙을 만족하는 타입은 정확히 호모토피 초기 W-대수입니다.

증명 개요. 정리 5.4.7의 증명을 살펴보면, $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$의 h-시작성을 확립하는 데에는 명제적 계산 규칙만 필요했음을 알 수 있습니다. 역방향 함의를 위해, $A:\mathcal{U}$와 $B:A\to\mathcal{U}$에 연관된 다항 함자가 h-시작 대수 (W,s_W)를 가진다고 가정합시다. 이제 W가 W-타입의 명제적 규칙들을 만족함을 보입니다. W-도입 규칙은 간단합니다. 즉, $a:A$와 $t:B(a)\to W$에 대해 $\mathsf{sup}(a,t):W$를 구조 사상 $s_W:PW\to W$를 $(a,t):PW$에 적용한 결과로 정의합니다. W-제거 규칙에 대해서는 그 전제들, 특히 $C':W\to\mathcal{U}$를 가정합시다. 나머지 전제들을 이용하면 타입 $C :\equiv \sum_{(w:W)} C'(w)$에 구조 사상 $s_C:PC\to C$를 줄 수 있음을 보일 수 있습니다. W의 h-시작성에 의해 대수 준동형사상 $(f,s_f):(W,s_W)\to(C,s_C)$를 얻습니다. 또한 첫 번째 사영 $\mathsf{pr}_1:C\to W$에 준동형사상의 구조를 줄 수 있으므로, 다음 꼴의 도표를 얻습니다.

$$\begin{array}{ccccc} PW & \xrightarrow{Pf} & PC & \xrightarrow{P\mathsf{pr}_1} & PW \\ \downarrow{\scriptstyle s_W} & & \downarrow{\scriptstyle s_C} & & \downarrow{\scriptstyle s_W} \\ W & \xrightarrow[f]{} & C & \xrightarrow[\mathsf{pr}_1]{} & W. \end{array}$$

그러나 항등 함수 $1_W:W\to W$는 대수 준동형사상의 표준적인 구조를 가지므로, (W,s_W)에서 자기 자신으로 가는 준동형사상들의 타입이 갖는 축약 가능성에 의해 (f,s_f)와 $(\mathsf{pr}_1,s_{\mathsf{pr}_1})$의 합성과

$(1_W, s_{1_W})$ 사이에 동일성 증명이 존재해야 합니다. 이는 특히 동일성 증명 $p : \mathsf{pr}_1 \circ f = 1_W$가 존재함을 함의합니다.

$(\mathsf{pr}_2 \circ f)w : C((\mathsf{pr}_1 \circ f)w)$이므로, 다음과 같이 정의할 수 있습니다

$$\mathsf{rec}(w, c) :\equiv p_*((\mathsf{pr}_2 \circ f)w) : C(w)$$

여기서 수송 p_*는 다음 족에 대한 것입니다

$$\lambda u.\, C \circ u : (W \to W) \to W \to \mathcal{U}.$$

명제적 W-계산 규칙의 검증은 p_* 형태의 연산들이 갖는 자연성 성질을 이용하는 계산입니다. □

마지막으로, 원하던 대로 호모토피-자연수를 호모토피-W-타입으로 부호화할 수 있습니다:

정리 5.5.6. 명제적 계산 규칙을 갖는 자연수의 규칙들은 명제적 계산 규칙을 갖는 W-타입의 규칙들로부터 유도할 수 있습니다.

5.6 귀납적 정의의 일반적인 구문

지금까지 우리는 **0**, **1**, **2**, $\mathbb{N}$, 쌍대곱, 곱, Σ-타입, W-타입 등 특정한 귀납적 타입들만을 논의해 왔습니다. 그러나 타입 이론의 중요한 측면 중 하나는, 고정된 특정 목록의 귀납적 타입들에만 국한되지 않고 새로운 귀납적 타입을 정의할 수 있다는 점입니다. 하지만 이렇게 하려면 어떤 종류의 "귀납적 정의"가 유효하거나 합리적인지 알아야 합니다.

"귀납적 정의처럼 보이는" 모든 것이 의미를 갖지는 않는다는 것을 확인하기 위해, 타입 C의 다음 "생성자"를 생각해 봅시다:

- $g : (C \to \mathbb{N}) \to C$.

이러한 타입 C에 대한 재귀 원리는, 타입 P가 주어졌을 때 함수 $f : C \to P$를 구성하려면 입력 $c : C$가 어떤 $\alpha : C \to \mathbb{N}$에 대하여 $g(\alpha)$ 형태인 경우만 고려하면 충분하다고 말해야 할 것입니다. 나아가 α에 적용된 f의 "재귀적 데이터"를 어떤 방식으로든 사용할 수 있으리라 기대할 것입니다. 그러나 둘 다 정의역이 C인 함수이므로, "f를 α에 적용"하는 방법은 전혀 분명하지 않습니다.

f를 α에 적용하여 함수 $P \to \mathbb{N}$를 얻는 어떤 방법이 있다고 (정당한 근거 없이) 그냥 가정함으로써 C에 대한 "재귀 원리"를 적어 볼 수는 있습니다. 그러면 재귀 규칙의 입력은 타입 P와 함께 다음 함수를 요구할 것입니다

$$h : (C \to \mathbb{N}) \to (P \to \mathbb{N}) \to P \tag{5.6.1}$$

여기서 h의 두 인수는 α와 "f를 α에 적용한 결과"입니다. 그러나 그 결과로 얻어지는 함수 $f : C \to P$의 계산 규칙은 무엇이 되겠습니까? 다른 계산 규칙들을 살펴보면 $\alpha : C \to \mathbb{N}$에 대해 "$f(g(\alpha)) \equiv h(\alpha, f(\alpha))$"와 같은 것을 기대하겠지만, 앞서 보았듯이 "$f(\alpha)$"는 의미를 갖지 않습니다. C의 귀납 원리는 훨씬 더 문제가 많습니다. 그 가정들을 어떻게 적어야 할지조차 분명하지 않습니다.

한편, α의 정의역에 C가 "재귀적으로" 나타난다는 사실을 무시하고, 이를 단지 자연수 족의 색인 타입으로 간주함으로써 C에 대한 다른 "재귀 원리"를 적어 볼 수도 있습니다. 이 경우 입력은 타입 P와 함께 다음 함수를 요구할 것입니다

$$h : (C \to \mathbb{N}) \to P,$$

따라서 재귀 원리의 타입은 $\mathsf{rec}_C : \prod_{(P:\mathcal{U})}((C \to \mathbb{N}) \to P) \to C \to P$가 되고, 귀납 원리도 마찬가지입니다. 이제는 계산 규칙, 즉 $\mathsf{rec}_C(P, h, g(\alpha)) \equiv h(\alpha)$를 적을 수 있습니다. 그러나 이러한 재귀자와 계산 규칙을 갖는 타입 C의 존재는 모순을 낳는 것으로 드러납니다. 이것과 다른 변형들의 증명은 연습문제 5.7 to 5.10를 참조하십시오.

이 예는 귀납적 정의에 대한 하나의 제약을 시사합니다. 즉, 모든 생성자의 정의역은 정의되는 타입의 공변 함자여야 하며, 그래야 "f를 그것들에 적용"하여 "재귀 호출"의 결과를 얻을 수 있습니다. 다시 말해, 정의되는 타입이 나타나는 모든 곳을 변수 $X : \mathcal{U}$로 바꾸면, 생성자의 각 정의역 은 X의 공변 함자로 만들 수 있는 표현식이어야 합니다. 지금까지 살펴본 모든 예가 이 경우에 해당합니다. 예를 들어 생성자 $\mathsf{inl} : A \to A + B$의 경우 관련 함자는 A에서의 상수 함자(즉 $X \mapsto A$)이고, 생성자 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$의 경우 함자는 항등 함자($X \mapsto X$)입니다.

그러나 이 필요조건 역시 충분하지는 않습니다. 공변성은 위에서 살펴본 "생성자" g의 인수 $C \to \mathbb{N}$에서처럼 귀납적 타입이 단일 함수 타입의 왼쪽에 나타나는 것을 막습니다. 이는 공변 함자가 아니라 반변 함자를 낳기 때문입니다. 그러나 두 반변 함자의 합성은 공변이므로, $((X \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N})$과 같은 이중 함수 타입은 다시 공변이 됩니다. 이로 인해 칸토어식 역설을 재현할 수 있습니다.

예를 들어, 다음 생성자를 갖는 "귀납적 타입" D를 생각해 봅시다:

- $k : ((D \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}) \to D$.

이러한 타입이 존재한다고 가정하고, 다음 함수들을 정의합니다

$$\begin{aligned} r &: D \to (D \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}, \\ f &: (D \to \mathsf{Prop}) \to D, \\ p &: (D \to \mathsf{Prop}) \to (D \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}, \end{aligned}$$

에 의해

$$\begin{aligned} r(k(\theta)) &:\equiv \theta, \\ f(\delta) &:\equiv k(\lambda x.\,(x = \delta)), \\ p(\delta) &:\equiv \lambda x.\,\delta(f(x)). \end{aligned}$$

여기서 r은 D의 재귀 원리로 정의되고, f와 p는 명시적으로 정의됩니다. 그러면 임의의 $\delta : D \to \mathsf{Prop}$에 대하여 $r(f(\delta)) = \lambda x.\,(x = \delta)$가 성립합니다.

따라서 특히 $f(\delta) = f(\delta')$이면 경로 $s : (\lambda x.\,(x = \delta)) = (\lambda x.\,(x = \delta'))$를 얻습니다. 그러므로 $\mathsf{happly}(s, \delta) : (\delta = \delta) = (\delta = \delta')$이고, 따라서 특히 $\delta = \delta'$가 성립합니다. 그러므로 f는 "단사"입니다(선험적으로는 D가 집합이 아닐 수도 있지만). 이것만으로도 이미 의심스럽습니다 — D의 "멱집합"에서 D로 가는 "단사 함수"를 가진 셈이기 때문입니다 — 그리고 조금만 더 작업하면 이를 모순으로 다듬어 낼 수 있습니다.

$\theta : (D \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}$가 주어졌다고 하고, $\delta : D \to \mathsf{Prop}$를 다음과 같이 정의합니다

$$\delta(d) :\equiv \exists(\gamma : D \to \mathsf{Prop}).\,(f(\gamma) = d) \times \theta(\gamma). \tag{5.6.2}$$

우리는 $p(\delta) = \theta$라고 주장합니다. 함수 외연성에 의해, 임의의 $\gamma : D \to \mathsf{Prop}$에 대하여 $p(\delta)(\gamma) =_{\mathsf{Prop}} \theta(\gamma)$를 보이면 충분합니다. 그리고 유니밸런스에 의해, 이를 위해서는 각각이 다른 하나를 함의함을 보이면 충분합니다. 이제 p의 정의에 의해 다음을 얻습니다

$$\begin{aligned} p(\delta)(\gamma) &\equiv \delta(f(\gamma)) \\ &\equiv \exists(\gamma' : D \to \mathsf{Prop}).\,(f(\gamma') = f(\gamma)) \times \theta(\gamma'). \end{aligned}$$

$\theta(\gamma)$이면 $\gamma' :\equiv \gamma$로 잡을 수 있으므로 이것은 분명히 성립합니다. 반대로 $f(\gamma') = f(\gamma)$와 $\theta(\gamma')$를 만족하는 γ'가 있다면, f가 단사이므로 $\gamma' = \gamma$이고, 따라서 $\theta(\gamma)$도 성립합니다.

이로써 $p(\delta) = \theta$의 증명이 완료됩니다. 따라서 모든 원소 $\theta : (D \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}$는 어떤 원소 $\delta : D \to \mathsf{Prop}$의 p에 의한 상입니다. 그러나 θ를 고전적인 대각선 논법으로 다음과 같이 정의하면:

$$\theta(\gamma) :\equiv \neg p(\gamma)(\gamma) \quad \text{모든 } \gamma : D \to \mathsf{Prop} \text{에 대해}$$

그러면 $\theta = p(\delta)$로부터 $p(\delta)(\delta) = \neg p(\delta)(\delta)$를 이끌어 냅니다. 이는 모순입니다. 어떤 명제도 자신의 부정과 동치일 수 없기 때문입니다. ($P \Leftrightarrow \neg P$라고 가정하면, P일 경우 $\neg P$이고, 따라서 $\mathbf{0}$입니다. 그러므로 $\neg P$이지만, 그러면 P이고, 따라서 $\mathbf{0}$입니다.)

주 5.6.3. 다루어야 할 유니버스 크기의 문제가 있습니다. 일반적으로 귀납적 타입은 그 정의에 들어가는 모든 타입을 이미 포함하는 유니버스에 속해야 합니다. 따라서 D의 정의에서 모호한 표기 Prop가 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$를 의미한다면, $D : \mathcal{U}$가 아니라 $\mathcal{U} : \mathcal{U}'$인 어떤 더 큰 유니버스 $\mathcal{U}'$에 대해 $D : \mathcal{U}'$만 성립합니다. 그러므로 술어적 이론에서 식 (5.6.2)의 우변은 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$가 아니라 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}'}$에 속합니다. 따라서 이 모순에는 §3.5에서 언급한 명제적 크기 재조정 공리 가 실제로 필요합니다.

이 반례는 귀납적 타입이 그 생성자의 정의역에서 화살표의 왼쪽에 나타나는 것을, 설령 그 출현이 다른 화살표 안에 중첩되어 결국 공변적이 되더라도, 결코 허용하지 말아야 함을 시사합니다. (마찬가지로, 의존 함수 타입의 정의역에 나타나는 것도 금지합니다.) 이 제한을 **엄격 양성** (일반적인 "양성"은 본질적으로 공변성입니다)이라고 부르며, 이것으로 충분하다는 것이 밝혀집니다.

그러므로 결론적으로, 타입 W의 유효한 귀납적 정의는 생성자들의 목록으로 이루어집니다. 각 생성자에는 (서로 의존할 수도 있는) 몇 개(0개일 수도 있음)의 입력을 받아 W의 원소를 반환하는 함수 타입이 부여됩니다. 마지막으로, W 자체가 그 생성자들의 입력 타입에 나타나는 것을 허용하되, 엄격하게 양성적으로만 허용합니다. 이는 본질적으로 생성자의 각 인자가 W를 포함하지 않는 타입이거나, 공역이 W인 어떤 반복된 함수 타입이라는 뜻입니다. 예를 들어, 다음은 유효한 생성자 타입입니다:

$$c : (A \to W) \to (B \to C \to W) \to D \to W \to W. \tag{5.6.4}$$

이 함수 타입들은 모두 의존 함수(Π-타입)일 수도 있습니다.[1]

귀납적 정의는 유한한 생성자 목록으로 주어져야 한다는 점에 유의하십시오. 이는 단순히 그것을 지면에 적어야 하기 때문입니다. 무한히 많은 생성자를 가진 것처럼 동작하는 귀납적 타입을 원한다면, 하나의 생성자를 어떤 무한 타입으로 매개화하면 됩니다. 예를 들어, $\mathbb{N} \to W \to W$와 같은 생성자는 $W \to W$ 형태의 가산 무한 개의 생성자와 동치인 것으로 생각할 수 있습니다. (물론 이제 그 무한은 타입 이론에 내재적이지만, 이는 어떤 기초 체계에서든 마땅히 그래야 하는 바입니다.) 마찬가지로, "무한히 많은 인자"를 받는 생성자를 원한다면, W의 원소들의 무한 수열을 받는 $(\mathbb{N} \to W) \to W$처럼 어떤 무한 타입으로 매개화된 인자들의 족을 받도록 허용할 수 있습니다.

그렇다면 이러한 귀납적 정의가 주어졌을 때, 그것으로 무엇을 할 수 있겠습니까? 먼저, 함수 $f : W \to P$를 정의하려면 입력 $w : W$가 생성자 중 하나로부터 생겨나는 경우만 고려하면 충분하며, 이때 그 생성자의 입력들에 대해 f를 재귀적으로 호출할 수 있다는 **재귀 원리**가 있습니다. 예시 생성자 (5.6.4)의 경우, P가 다음 타입의 함수를 갖추고 있을 것을 요구합니다.

$$d : (A \to W) \to (A \to P) \to (B \to C \to W) \to (B \to C \to P) \to D \to W \to P \to P. \tag{5.6.5}$$

[1] §5.4의 언어로 말하면, 엄격 양성 조건은 관련된 자기 함자가 다항 함자임을 보장합니다. 범주론에서는 모든 자기 함자가 시작 대수를 가질 수 있는 것은 아니라는 사실이 잘 알려져 있습니다. 다항 함자로 제한하면 무모순성이 보장됩니다. 이 조건을 다양하게 완화하는 방안을 고려해 볼 수 있지만, 이 책에서는 여기서 정의한 엄격 양성으로 한정하겠습니다.

이러한 가정 아래에서 재귀 원리는 $f : W \to P$를 산출하며, 더욱이 이 함수는 명백한 방식으로 "생성자 데이터를 보존"합니다 — 이것이 계산 규칙이며, 여기서 입력의 공변성을 사용합니다. 예를 들어, 예시 (5.6.4)에서 계산 규칙은 임의의 $\alpha : A \to W$, $\beta : B \to C \to W$, $\delta : D$, $\omega : W$에 대해 다음이 성립한다고 말합니다.

$$f(c(\alpha, \beta, \delta, \omega)) \equiv d(\alpha, f \circ \alpha, \beta, f \circ \beta, \delta, \omega, f(\omega)). \tag{5.6.6}$$

일반적인 귀납적 타입 W에 대한 **귀납 원리**는 조금 더 복잡할 뿐입니다. 물론 타입 족 $P : W \to \mathcal{U}$에서 시작하며, 이 타입 족에는 W의 생성자 데이터 "위에 놓인" 생성자 데이터가 갖추어져 있어야 합니다. 이는 앞에서 본 $A \to P$와 같은 "재귀 호출" 인자를 $\prod_{(a:A)} P(\alpha(a))$와 같은 타입을 갖는 의존 함수로 바꾸어야 한다는 뜻입니다. 식 (5.6.4)의 전체 예에서, 귀납 원리에 대응하는 가설은 다음을 요구합니다.

$$d : \prod_{\alpha:A\to W} \left(\prod_{a:A} P(\alpha(a))\right) \to \prod_{\beta:B\to C\to W} \left(\prod_{(b:B)} \prod_{(c:C)} P(\beta(b,c))\right) \to \prod_{(\delta:D)} \prod_{(\omega:W)} P(\omega) \to P(c(\alpha,\beta,\delta,\omega)). \tag{5.6.7}$$

대응하는 계산 규칙은 식 (5.6.6)와 동일해 보입니다. 물론 재귀 원리는 P가 상수 족인 귀납 원리의 특수한 경우입니다. 앞에서 언급했듯이, 귀납 원리는 **제거자**라고도 하며, 재귀 원리는 **비의존 제거자**라고도 합니다.

§1.10에서 논의했듯이, 귀납 원리의 가정이 될 각 표현식에 대해 $:\equiv$를 사용한 정의상 등식을 적음으로써 귀납 원리와 재귀 원리를 암묵적으로 호출하는 것도 허용합니다. 이를 (의존) **패턴 매칭**에 의한 정의라고 합니다. 지금까지 사용해 온 예시에서, 이는 $f : \prod_{(w:W)} P(w)$를 다음과 같이 정의할 수 있다는 뜻입니다.

$$f(c(\alpha, \beta, \delta, \omega)) :\equiv \cdots$$

여기서 $\alpha : A \to W$, $\beta : B \to C \to W$, $\delta : D$, $\omega : W$는 우변에서 속박되는 변수 입니다. 또한 우변에는 $f(\alpha(a))$, $f(\beta(b,c))$, $f(\omega)$ 꼴의 f에 대한 재귀 호출이 포함될 수 있습니다. 이 정의를 귀납 원리의 관점에서 다시 표현할 때에는 이러한 재귀 호출을 각각 $\bar{\alpha}(a)$, $\bar{\beta}(b,c)$, $\bar{\omega}$로 대체하며, 이때 도입되는 새로운 변수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &: \prod_{a:A} P(\alpha(a)) \\ \bar{\beta} &: \prod_{(b:B)} \prod_{(c:C)} P(\beta(b,c)) \\ \bar{\omega} &: P(\omega). \end{aligned}$$

그러면 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$f :\equiv \mathsf{ind}_W(P,\ \lambda\alpha.\, \lambda\bar{\alpha}.\, \lambda\beta.\, \lambda\bar{\beta}.\, \lambda\delta.\, \lambda\omega.\, \lambda\bar{\omega}.\, \cdots)$$

여기서 ind_W의 두 번째 인자는 (5.6.7)의 타입을 갖습니다.

유효한 귀납적 정의의 문법과 그로부터 얻어지는 귀납 원리, 재귀 원리, 패턴 매칭 규칙을 형식적으로 제시하려고 시도하지는 않겠습니다. 그렇게 하는 것은 가능하지만(실제로 컴퓨터 증명 보조기를 구현한다면 반드시 해야 합니다), 추가적인 통찰을 주지는 않습니다. 연습을 거치면 어떤 귀납적 정의에 대해서든 귀납 원리와 재귀 원리를 자동으로 유도하고, 두 번 생각할 필요 없이 사용하는 법을 익히게 됩니다.

5.7 귀납적 타입의 일반화

귀납적 타입이라는 개념은 타입 이론에서 오랫동안 연구되어 왔으며, 귀납적 타입 족, 상호 귀납적 타입, 귀납-귀납적 타입, 귀납-재귀적 타입 등 매우 많은 일반화를 허용합니다. 이 절에서는 이들 중 일부를 개관하며, 그중 몇 가지는 이 책의 뒷부분에서 사용됩니다. (제6장에서는 호모토피 타입 이론에 고유한, 귀납적 타입의 매우 다른 일반화를 더 깊이 연구하겠습니다.)

이러한 일반화의 대부분은 둘 이상의 타입을 동시에 귀납적으로 정의하는 것을 허용하는 것과 관련됩니다. 이미 본 매우 간단한 예 하나는 쌍대곱 $A + B$입니다. 두 타입의 쌍대곱을 고려할 때마다 $\mathbb{N} + \mathbb{N}$, $\mathbb{N} + \mathbf{2}$, $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ 등에 대해 각각 별도의 귀납적 정의를 적어야 한다면 참으로 번거로울 것입니다. 그 대신, A와 B가 타입을 나타내는 변수인 하나의 정의를 만듭니다. 타입 이론에서는 이들을 **매개변수**라고 부릅니다. 따라서 엄밀히 말하면 이 정의로부터 얻어지는 것은 단일 타입이 아니라, 두 타입을 입력으로 받아 그 쌍대곱을 만들어 내는 타입족 $+ : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \to \mathcal{U}$입니다. 마찬가지로, 리스트의 타입 $\mathsf{List}(A)$는 타입 A가 매개변수인 족 $\mathsf{List}(-) : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$입니다.

수학에서 이런 종류의 사실은 너무나 자명해서 언급할 가치도 없지만, 다음 예와 대조하기 위해 언급합니다. 각 타입 $\mathsf{List}(A)$와 마찬가지로 각 타입 $A + B$도 독립적으로 귀납적으로 정의된다는 점에 주목하십시오. 이와 대조적으로, 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$ 전체를 한꺼번에 귀납으로 정의하는 것도 생각해 볼 수 있습니다. 차이점은 이제 생성자가 색인 $a : A$를 바꿀 수 있다는 것이며, 그 결과 개별 타입 $B(a)$가 귀납적으로 정의된다고는 말할 수 없고 족 전체가 귀납적으로 정의된다고만 말할 수 있습니다.

표준적인 예는 전통적으로 **벡터**라고 불리는 길이가 지정된 리스트의 타입입니다. 매개변수 타입 A를 고정하고, $n : \mathbb{N}$에 대해 다음 생성자들로 생성되는 타입 족 $\mathsf{Vec}_n(A)$를 정의합니다.

- 길이가 0인 벡터 $\mathsf{nil} : \mathsf{Vec}_0(A)$,
- 함수 $\mathsf{cons} : \prod_{(n:\mathbb{N})} A \to \mathsf{Vec}_n(A) \to \mathsf{Vec}_{\mathsf{succ}(n)}(A)$.

리스트와 달리, (고정된 타입 A의 원소를 갖는) 벡터들은 그 길이로 인덱싱된 타입족을 이룹니다. A는 매개변수인 반면, $n : \mathbb{N}$는 귀납적 족의 **인덱스** 라고 합니다. $\mathsf{Vec}_3(A)$와 같은 개별 타입은 귀납적으로 정의되지 않습니다. $\mathsf{Vec}_3(A)$의 원소를 만드는 생성자는 $\mathsf{cons} : A \to \mathsf{Vec}_2(A) \to \mathsf{Vec}_3(A)$처럼 족 안의 다른 타입으로부터 입력을 받기 때문입니다.

특히 귀납 원리도 타입 족 전체를 참조해야 합니다. 따라서 가정과 결론은 인덱스에 대해 적절히 양화되어야 합니다. 벡터의 경우 귀납 원리는 타입 족 $C : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{Vec}_n(A) \to \mathcal{U}$와 함께 다음이 주어지면

- 원소 $c_{\mathsf{nil}} : C(0, \mathsf{nil})$, 그리고
- 함수 $c_{\mathsf{cons}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} \prod_{(a:A)} \prod_{(\ell:\mathsf{Vec}_n(A))} C(n, \ell) \to C(\mathsf{succ}(n), \mathsf{cons}(a, \ell))$

다음을 만족하는 함수 $f : \prod_{(n:\mathbb{N})} \prod_{(\ell:\mathsf{Vec}_n(A))} C(n, \ell)$가 존재한다고 말합니다.

$$f(0, \mathsf{nil}) \equiv c_{\mathsf{nil}}$$
$$f(\mathsf{succ}(n), \mathsf{cons}(a, \ell)) \equiv c_{\mathsf{cons}}(n, a, \ell, f(\ell)).$$

귀납적 족은 술어를 귀납적으로 정의하는 데 쓰일 수 있습니다. 예를 들어 술어 $\mathsf{iseven} : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$를 다음 생성자들을 갖고 $\mathbb{N}$로 인덱싱된 귀납적 족으로 정의할 수 있습니다.

- 원소 $\mathsf{even}_0 : \mathsf{iseven}(0)$,
- 함수 $\mathsf{even}_{ss} : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{iseven}(n) \to \mathsf{iseven}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(n)))$.

다시 말해 0은 짝수이고, n이 짝수이면 $\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(n))$도 짝수라고 규정합니다. 이 생성자들로는 예컨대 $\mathsf{iseven}(1)$의 원소를 구성할 방법이 "분명히" 없습니다. 또한 iseven은 이 생성자들로 자유롭게 생성된다고 간주되므로 그러한 원소는 존재하지 않아야 합니다. (그러나 $\neg\mathsf{iseven}(1)$을 실제로 증명하는 일이 완전히 자명하지는 않습니다). iseven의 귀납 원리에 따르면, 모든 짝수 자연수에 대해 어떤 사실을 증명하려면 그 사실을 0에 대해 증명하고 2를 더해도 보존됨을 확인하는 것으로 충분합니다.

귀납적으로 정의된 술어는 수학의 컴퓨터 형식화와 소프트웨어 검증에서 많이 사용됩니다. 그러나 이 책에서는 §§10.3 및 11.5의 몇 가지 예외를 제외하면 이를 많이 사용하지 않을 것입니다.

또 다른 중요한 특수한 경우는 귀납적 족의 인덱스 타입이 유한한 경우입니다. 이 경우 귀납적 정의를 상호 귀납으로 정의된 유한 개의 타입 모음으로 동등하게 표현할 수 있습니다. 예를 들어 짝수 자연수의 타입 even과 홀수 자연수의 타입 odd를 상호 귀납으로 정의할 수 있습니다. 이때 even은 다음 생성자들로 생성되고

- $0 : \mathsf{even}$ 그리고
- $\mathsf{esucc} : \mathsf{odd} \to \mathsf{even}$,

odd는 다음 하나의 생성자로 생성됩니다.

- $\mathsf{osucc} : \mathsf{even} \to \mathsf{odd}$.

even과 odd는 (타입 족이 아닌) 단순한 타입이지만 그 생성자들은 서로를 참조할 수 있다는 점에 유의하십시오. 이 정의를 귀납적 타입 족 $\mathsf{paritynat} : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$로 표현하고 $\mathsf{paritynat}(0_{\mathbf{2}})$와 $\mathsf{paritynat}(1_{\mathbf{2}})$가 각각 even과 odd를 나타내게 한다면, 이 족은 대신 다음 생성자들을 갖게 됩니다.

- $0 : \mathsf{paritynat}(0_{\mathbf{2}})$,
- $\mathsf{esucc} : \mathsf{paritynat}(1_{\mathbf{2}}) \to \mathsf{paritynat}(0_{\mathbf{2}})$,
- $\mathsf{osucc} : \mathsf{paritynat}(0_{\mathbf{2}}) \to \mathsf{paritynat}(1_{\mathbf{2}})$.

상호 귀납적 정의로 명시적으로 표현하면 even과 odd의 귀납 원리는 $C : \mathsf{even} \to \mathcal{U}$와 $D : \mathsf{odd} \to \mathcal{U}$가 다음과 함께 주어지면

- $c_0 : C(0)$,
- $c_s : \prod_{(n:\mathsf{odd})} D(n) \to C(\mathsf{esucc}(n))$,
- $d_s : \prod_{(n:\mathsf{even})} C(n) \to D(\mathsf{osucc}(n))$,

다음을 만족하는 $f : \prod_{(n:\mathsf{even})} C(n)$와 $g : \prod_{(n:\mathsf{odd})} D(n)$가 존재한다고 말합니다.

$$\begin{aligned} f(0) &\equiv c_0 \\ f(\mathsf{esucc}(n)) &\equiv c_s(g(n)) \\ g(\mathsf{osucc}(n)) &\equiv d_s(f(n)). \end{aligned}$$

특히 귀납적 족에 대해서는 "한꺼번에"만 귀납할 수 있는 것처럼, even과 odd에 대해서도 동시에 귀납해야 합니다. 이 책에서는 상호 귀납적 정의도 많이 사용하지 않을 것입니다.

여기서 더 나아간 급진적인 일반화는 타입 족 $B : A \to \mathcal{U}$를 정의할 때 타입 $B(a)$들뿐 아니라 타입 A 자체도 하나의 큰 귀납의 일부로 정의하도록 허용하는 것입니다. 다시 말해 귀납적 족에서처럼 다른 $B(a')$들로부터 입력을 받을 수 있는 $B(a)$들의 생성자를 지정합니다. 이와 동시에 $B(a)$들로부터 입력을 받을 수 있는 A 자체의 생성자도 지정합니다. 이는 인덱스가 인덱싱되는 타입들과 동시에

귀납적으로 정의되는 귀납적 족으로 볼 수 있습니다. 또는 한 타입이 다른 타입에 의존할 수 있는 상호 귀납적 정의로 볼 수도 있습니다. 더 복잡한 의존 구조도 가능합니다. 일반적으로 이러한 정의를 **귀납-귀납적 정의**라고 부릅니다. 이 책에서는 대체로 이를 사용하지 않지만, 그 고차 변형(제6장 참조)은 제11장의 몇 가지 실험적인 예에 등장할 것입니다.

마지막으로 언급하려는 일반화는 **귀납-재귀적 정의**입니다. 이는 타입을 귀납적으로 정의하면서 동시에 그 위의 재귀 함수를 정의하는 것입니다. 즉 알려진 타입 P를 고정하고, 귀납적 타입 A의 생성자들을 제시합니다. 이와 동시에 그 생성자들로부터 얻어지는 A의 재귀 원리를 사용하여 함수 $f : A \to P$를 정의합니다 — 다만 A의 생성자들이 f의 값도 참조할 수 있다는 점이 다릅니다. 이러한 정의를 호모토피적 관점에서 정당화하는 방법은 아직 알려져 있지 않으며, 이 책에서는 이러한 정의를 전혀 사용하지 않을 것입니다.

5.8 동일성 타입과 동일성 체계

이제 호모토피 타입 이론에서 매우 중심적인 역할을 하는 동일성 타입도 귀납적으로 정의된 것으로 볼 수 있다는 점을 짚고자 합니다. 구체적으로 동일성 타입은 §5.7에서 말한 의미에서 인덱스를 갖는 "귀납적 족"입니다. 사실 동일성 타입을 귀납적 족으로 기술하는 방법은 두 가지입니다. 그 결과 제1장에서 설명한 두 귀납 원리인 경로 귀납법과 기점 경로 귀납법이 얻어집니다.

두 정의 모두에서 타입 A는 매개변수입니다. 첫 번째 정의에서는 A에 속하는 인덱스 두 개를 갖는 족 $=_A \colon A \to A \to \mathcal{U}$를 다음 생성자로 귀납적으로 정의합니다.

- 임의의 $a : A$에 대해, 원소 $\mathsf{refl}_a : a =_A a$.

다른 귀납적 족들과 마찬가지로 이 정의로부터 귀납 원리를 추출할 수 있습니다. 이 원리에 따르면 임의의 $C : \prod_{(a,b:A)}(a =_A b) \to \mathcal{U}$, 와 $d : \prod_{(a:A)} C(a, a, \mathsf{refl}_a)$가 주어지면, $f(a, a, \mathsf{refl}_a) \equiv d(a)$를 만족하는 $f : \prod_{(a,b:A)} \prod_{(p:a=_A b)} C(a, b, p)$가 존재합니다. 이것이 바로 동일성 타입의 경로 귀납법 원리입니다.

두 번째 정의에서는 $A : \mathcal{U}$와 함께 원소 하나 $a_0 : A$도 매개변수로 간주합니다. 그리고 A에 속하는 인덱스 하나를 갖는 족 $(a_0 =_A -) : A \to \mathcal{U}$를 다음 생성자로 귀납적으로 정의합니다.

- 원소 $\mathsf{refl}_{a_0} : a_0 =_A a_0$.

$a_0 : A$가 매개변수로 고정되어 있으므로, 생성자 refl_{a_0}는 귀납적 정의 안에서 함수로 나타나지 않고 원소로만 나타난다는 점에 유의하십시오. 이 정의의 귀납 원리는 $C : \prod_{(b:A)}(a_0 =_A b) \to \mathcal{U}$와 원소 $d : C(a_0, \mathsf{refl}_{a_0})$가 주어지면 $f(a_0, \mathsf{refl}_{a_0}) \equiv d$를 만족하는 $f : \prod_{(b:A)} \prod_{(p:a_0=_A b)} C(b, p)$가 존재한다고 말합니다. 이는 정확히 동일성 타입에 대한 기점 경로 귀납법 원리입니다.

동일성 타입을 귀납적 타입으로 보는 관점은 역사적으로 어느 정도 혼란을 불러일으켰습니다. §5.1에서 언급한 것처럼, 귀납적 타입의 모든 원소는 그 생성자를 반복 적용하여 얻어져야 한다는 직관이 있기 때문입니다. $\mathbf{2}$ 이나 $\mathbb{N}$ 같은 일반적인 귀납적 타입에서는 실제로 그렇습니다. 식 (1.8.1)에서 $\mathbf{2}$ 의 모든 원소가 실제로 $0_\mathbf{2}$ 또는 $1_\mathbf{2}$ 임을 보았고, 마찬가지로 $\mathbb{N}$ 의 모든 원소가 0이거나 후속자임을 증명할 수 있습니다.

그러나 동일성 타입에서는 이것이 참이 아닙니다. 생성자는 refl 하나뿐이지만 모든 경로가 상수 경로와 같은 것은 아닙니다. 더 정확히 말하면, 동일성 타입에 대한 귀납 원리(둘 중 어느 것이든)만으로는 $a =_A a$의 모든 원소가 refl_a와 같다는 것을 증명할 수 없습니다. 실제로 반례를 제시하려면 유니밸런스 공리 같은 추가적인 원리가 필요합니다 — 예 3.1.9에서 유니밸런스를 사용하여 $\mathsf{refl}_\mathbf{2}$과 같지 않은 특정한 경로 $\mathbf{2} =_\mathcal{U} \mathbf{2}$을 제시했던 것을 떠올리십시오.

요점은 호모토피 시작 대수에 관한 연구가 뒷받침하듯이 귀납적 정의를 그 생성자들에 의해 자유롭게 생성된 것으로 보아야 한다는 것입니다. 물론 자유롭게 생성된 구조는 생성원 이외의 원소를 포함할 수 있습니다. 예를 들어 두 기호 x와 y 위의 자유군은 x와 y뿐만 아니라 xy, $yx^{-1}y$, $x^3y^2x^{-2}yx$ 같은 단어도 포함합니다. 일반적으로 자유 구조의 원소는 생성원뿐만 아니라 주변 구조의 연산까지 적용하여 얻어지며, 자유군을 다룬다면 군 연산이 그러한 연산입니다.

귀납적 타입의 경우 우리는 자유롭게 생성된 타입에 대해 이야기하고 있습니다. 그렇다면 타입이라는 구조의 "연산"은 무엇입니까? 타입 이론에서 전통적으로 그랬듯이 타입을 집합과 같은 것으로 본다면 그러한 연산은 없으며, 따라서 귀납적 타입에는 그 생성자로부터 나온 원소 외에 다른 원소가 없으리라고 예상합니다. 호모토피 타입 이론에서는 타입을 공간 또는 ∞-그루포이드와 같은 것으로 봅니다. 이 경우 경로에 대해서는 여러 연산(이어붙이기, 역 등)이 있지만 (이는 제6장에서 중요해집니다), 대상(원소)에 대해서는 여전히 아무 연산도 없습니다. 따라서 우리에게도 여전히, 예를 들어 $\mathbf{2}$ 의 모든 원소는 $0_{\mathbf{2}}$ 또는 $1_{\mathbf{2}}$이고 $\mathbb{N}$의 모든 원소는 0이거나 후속자라는 것이 참입니다.

그러나 제2장에서 보았듯이 타입을 ∞-그루포이드로 보면 함수도 함자로 보게 되며, 여기에는 타입족 $B : A \to \mathcal{U}$도 포함됩니다. 따라서 귀납적 타입 족으로 본 동일성 타입 $(a_0 =_A -)$는 실제로는 자유롭게 생성된 함자 $A \to \mathcal{U}$입니다. 구체적으로, 이는 하나의 원소 $\mathsf{refl}_{a_0} : F(a_0)$로 자유롭게 생성된 함자 $F : A \to \mathcal{U}$입니다. 그리고 함자에는 대상에 대한 연산, 즉 A의 사상(경로)의 작용이 실제로 있습니다.

범주론에서 요네다 보조정리에 따르면, 임의의 범주 A와 대상 a_0에 대해 $F(a_0)$의 원소 하나로 자유롭게 생성된 함자는 표현 가능 함자 $\hom_A(a_0, -)$입니다. 따라서 동일성 타입 $(a_0 =_A -)$도 이 표현 가능 함자일 것이라고 예상해야 하며, 실제로 우리는 동일성 타입을 정확히 그렇게 봅니다. 즉, $(a_0 =_A b)$는 A에서 a_0로부터 b로 가는 사상(경로)들의 공간입니다.

동일성 타입을 귀납적 족으로 보는 이유 중 하나는 §§5.2 및 5.5의 유일성 원리를 적용하기 위해서입니다. 구체적으로, 같은 귀납 원리를 만족하는 $A \times A$ 위의 다른 타입족을 제시함으로써 타입 A의 동일성 타입족을 동치 수준에서 특징지을 수 있습니다. 이로부터 다음 정의들과 정리를 생각할 수 있습니다.

정의 5.8.1. A를 타입이라 하고 $a_0 : A$를 원소라 합시다.

- (A, a_0) 위의 **점을 가진 술어**는 원소 $r_0 : R(a_0)$를 갖춘 족 $R : A \to \mathcal{U}$입니다.
- 점을 가진 술어 (R, r_0)와 (S, s_0)에 대해, 사상족 $g : \prod_{(b:A)} R(b) \to S(b)$가 $g(a_0, r_0) = s_0$를 만족하면 이를 **점을 보존한다**고 합니다. 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{ppmap}(R, S) :\equiv \sum_{g:\prod_{(b:A)} R(b) \to S(b)} (g(a_0, r_0) = s_0).$$

- a_0**에서의 동일성 체계**란 임의의 타입 족 $D : \prod_{(b:A)} R(b) \to \mathcal{U}$와 $d : D(a_0, r_0)$에 대하여 $f(a_0, r_0) = d$를 만족하는 함수 $f : \prod_{(b:A)} \prod_{(r:R(b))} D(b, r)$가 존재하는 점을 가진 술어 (R, r_0)입니다.

정리 5.8.2. (A, a_0) 위의 점을 가진 술어 (R, r_0)에 대해 다음은 논리적으로 동치입니다.

(i) (R, r_0)는 a_0에서의 동일성 체계입니다.
(ii) 임의의 점을 가진 술어 (S, s_0)에 대해 타입 $\mathsf{ppmap}(R, S)$는 축약 가능합니다.
(iii) 임의의 $b : A$에 대해 함수 $\mathsf{transport}^R(-, r_0) : (a_0 =_A b) \to R(b)$는 동치입니다.
(iv) 타입 $\sum_{(b:A)} R(b)$는 축약 가능합니다.

동치 (i)⇔(ii)⇔(iii)은 A의 한 원소에 따라 변하는 귀납적 족으로 본 동일성 타입 $a_0 =_A -$에 대한 보조정리 5.5.4의 한 형태라는 점에 유의하십시오. 물론 (ii)–(iv)는 단순 명제이므로 논리적 동치로부터 실제 동치가 따라 나옵니다. (조건 (i)도 단순 명제이지만 이는 증명하지 않겠습니다.) 또한 (i)–(iii)과 달리 진술 (iv)는 a_0나 r_0를 언급하지 않는다는 점에도 유의하십시오.

증명. 먼저 (i)을 가정하고 (S, s_0)를 점을 가진 술어라 합시다. $D(b,r) :\equiv S(b)$와 $d :\equiv s_0 : S(a_0) \equiv D(a_0, r_0)$로 정의합니다. R이 동일성 체계이므로 $f(a_0, r_0) = s_0$를 만족하는 $f : \prod_{(b:A)} R(b) \to S(b)$가 존재합니다. 따라서 $\mathsf{ppmap}(R,S)$에는 원소가 있습니다. 이제 $(f, f_r), (g, g_r) : \mathsf{ppmap}(R,S)$라 하고, $D(b,r) :\equiv (f(b,r) = g(b,r))$로 정의하며, $d :\equiv f_r \centerdot {g_r}^{-1} : f(a_0,r_0) = s_0 = g(a_0,r_0)$라 합시다. 그러면 다시 R이 동일성 체계이므로 $h(a_0,r_0) = f_r \centerdot {g_r}^{-1}$를 만족하는 $h : \prod_{(b:A)} \prod_{(r:R(b))} D(b,r)$가 존재합니다. 함수 외연성과 Σ-타입 및 경로 타입에서의 경로에 대한 특성화에 의해, 이 데이터로부터 등식 $(f, f_r) = (g, g_r)$를 얻습니다. 따라서 $\mathsf{ppmap}(R,S)$는 원소가 있는 단순 명제이므로 축약 가능합니다. 그러므로 (ii)가 성립합니다.

이제 (ii)를 가정하고, $S(b) :\equiv (a_0 = b)$와 $s_0 :\equiv \mathsf{refl}_{a_0} : S(a_0)$로 정의합니다. 그러면 (S, s_0)는 점을 가진 술어이고, $\lambda b.\, \lambda p.\, \mathsf{transport}^R(p,r) : \prod_{(b:A)} S(b) \to R(b)$는 S에서 R로 가는 점을 보존하는 사상족입니다. 가정에 의해 $\mathsf{ppmap}(R,S)$는 축약 가능하므로 원소가 있고, 따라서 R에서 S로 가는 점을 보존하는 사상족도 존재합니다. 그리고 양방향의 합성은 각각 R에서 R로, S에서 S로 가는 점을 보존하는 사상족이며, $\mathsf{ppmap}(R,R)$과 $\mathsf{ppmap}(S,S)$가 축약 가능하므로 항등 사상과 같습니다. 따라서 (iii)이 성립합니다.

이제 (iii)을 가정하면, Σ-타입이 동치를 보존한다는 사실(정리 4.7.7의 "if" 방향)을 이용하여 보조정리 3.11.8로부터 조건 (iv)가 따라 나옵니다.

마지막으로 (iv)를 가정하고, $D : \prod_{(b:A)} R(b) \to \mathcal{U}$와 $d : D(a_0, r_0)$가 주어졌다고 합시다. D를 족 $D' : (\sum_{(b:A)} R(b)) \to \mathcal{U}$로 동등하게 표현할 수 있습니다. 이제 $\sum_{(b:A)} R(b)$가 축약 가능하므로 다음이 성립합니다.

$$p : \prod_{u:\sum_{(b:A)} R(b)} (a_0, r_0) = u.$$

더욱이 축약 가능한 타입의 경로 타입도 다시 축약 가능하므로 $p((a_0,r_0)) = \mathsf{refl}_{(a_0,r_0)}$가 성립합니다. $f(u) :\equiv \mathsf{transport}^{D'}(p(u), d)$로 정의하면 $f : \prod_{(u:\sum_{(b:A)} R(b))} D'(u)$, 또는 동등하게 $f : \prod_{(b:A)} \prod_{(r:R(b))} D(b,r)$를 얻습니다. 마지막으로 다음이 성립합니다.

$$f(a_0,r_0) \equiv \mathsf{transport}^{D'}(p((a_0,r_0)), d) = \mathsf{transport}^{D'}(\mathsf{refl}_{(a_0,r_0)}, d) = d.$$

따라서 (i)이 성립합니다. □

A의 두 원소에 걸쳐 변하는 족으로 간주한 동일성 타입 $=_A$에 대해서도 비슷한 결과를 이끌어 낼 수 있습니다.

정의 5.8.3. 타입 A 위의 **동일성 체계**는 함수 $r_0 : \prod_{(a:A)} R(a,a)$를 갖춘 족 $R : A \to A \to \mathcal{U}$으로서, 임의의 타입 족 $D : \prod_{(a,b:A)} R(a,b) \to \mathcal{U}$과 $d : \prod_{(a:A)} D(a,a,r_0(a))$에 대해 모든 $a : A$에서 $f(a,a,r_0(a)) = d(a)$를 만족하는 함수 $f : \prod_{(a,b:A)} \prod_{(r:R(a,b))} D(a,b,r)$가 존재하는 것입니다.

정리 5.8.4. $r_0 : \prod_{(a:A)} R(a,a)$를 갖춘 $R : A \to A \to \mathcal{U}$에 대해 다음은 논리적으로 동치입니다.

(i) (R, r_0)은 A 위의 동일성 체계입니다.
(ii) 모든 $a_0 : A$에 대하여, 점을 가진 술어 $(R(a_0), r_0(a_0))$는 a_0에서의 동일성 체계입니다.

(iii) 임의의 $S : A \to A \to \mathcal{U}$과 $s_0 : \prod_{(a:A)} S(a,a)$에 대해 다음 타입

$$\sum_{(g:\prod_{(a,b:A)} R(a,b)\to S(a,b))} \prod_{(a:A)} g(a,a,r_0(a)) = s_0(a)$$

은 축약 가능합니다.

(iv) 임의의 $a, b : A$에 대해 사상 $\mathsf{transport}^{R(a)}(-, r_0(a)) : (a =_A b) \to R(a,b)$는 동치입니다.

(v) 임의의 $a : A$에 대해 타입 $\sum_{(b:A)} R(a,b)$는 축약 가능합니다.

증명. 동치 (i)⇔(ii)는 동일성 타입에 대한 경로 귀납법 원리와 기점 경로 귀납법 원리 사이의 동치 증명을 그대로 따릅니다. §1.12를 참조하십시오. 그러면 (iv) 및 (v)와의 동치는 정리 5.8.2로부터 따라 나오며, (iii)은 간단합니다. □

이 특성화가 흥미로운 이유 중 하나는 유니밸런스와 함수 외연성을 서술하는 또 다른 방법을 제공한다는 점입니다. 유니버스 $\mathcal{U}$ 에 대한 유니밸런스 공리가 말하는 바는 정확히 타입 족

$$(- \simeq -) : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \to \mathcal{U}$$

이 $\mathsf{id} : \prod_{(A:\mathcal{U})}(A \simeq A)$와 함께 정리 5.8.4(iv)를 만족한다는 것입니다. 따라서 이는 (i)의 대응하는 형태와 동치이며, 이를 다음과 같이 서술할 수 있습니다.

따름정리 5.8.5 (동치 귀납법). 임의의 타입 족 $D : \prod_{(A,B:\mathcal{U})}(A \simeq B) \to \mathcal{U}$과 함수 $d : \prod_{(A:\mathcal{U})} D(A, A, \mathsf{id}_A)$가 주어지면, 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $f(A, A, \mathsf{id}_A) = d(A)$를 만족하는 $f : \prod_{(A,B:\mathcal{U})} \prod_{(e:A\simeq B)} D(A,B,e)$가 존재합니다.

다시 말해, 모든 동치에 관한 어떤 사실을 증명하려면 항등 사상에 대해 그 사실을 증명하는 것으로 충분합니다. 우리는 이미 보조정리 4.1.1에서 이 원리를 (일반적인 형태로 서술하지는 않은 채) 사용했습니다.

마찬가지로 함수 외연성이 말하는 바는 임의의 $B : A \to \mathcal{U}$에 대해 타입 족

$$(- \sim -) : \left(\prod_{a:A} B(a)\right) \to \left(\prod_{a:A} B(a)\right) \to \mathcal{U}$$

이 $\lambda f.\, \lambda a.\, \mathsf{refl}_{f(a)}$와 함께 정리 5.8.4(iv)를 만족한다는 것입니다. 따라서 이 역시 (i)의 대응하는 형태와 동치입니다.

따름정리 5.8.6 (호모토피 귀납법). 임의의 $D : \prod_{(f,g:\prod_{(a:A)} B(a))}(f \sim g) \to \mathcal{U}$와 $d : \prod_{(f:\prod_{(a:A)} B(a))} D(f, f, \lambda x.\, \mathsf{refl}_{f(x)})$가 주어지면, 다음

$$k : \prod_{(f,g:\prod_{(a:A)} B(a))} \prod_{(h:f\sim g)} D(f,g,h)$$

이 존재하여 모든 f에 대해 $k(f, f, \lambda x.\, \mathsf{refl}_{f(x)}) = d(f)$가 성립합니다.

주

귀납적 정의는 수학에서 오랜 내력을 지니며, 적어도 프레게와 페아노의 자연수 공리까지 거슬러 올라간다고 볼 수 있습니다. 더 일반적인 "귀납적 술어"도 드물지 않지만, 집합론적 기초에서 이들은 보통 기본 개념으로 간주되기보다는 적절한 부분집합 모임의 교집합으로서, 또는 순서수를 따른 초한 반복을 사용하여 명시적으로 구성됩니다.

타입 이론에서 귀납적 정의의 특정 사례들은 Martin-Löf의 초기 논문들까지 거슬러 올라갑니다. [ML71]는 귀납적으로 정의된 술어와 관계의 일반적인 개념을 제시하며, 귀납적 타입의 개념은 타입 이론에 관한 Martin-Löf의 최초 논문들 [ML75]에 (일반적인 개념으로서가 아니라 개별 사례로서만) 존재했고, 이후 [ML82]에서 W-타입과 함께 일반적인 개념으로 등장했습니다.

귀납적 타입의 일반적인 개념은 1985년에 Constable과 Mendler [CM85]가 도입했습니다. 내포적 타입 이론에서 귀납적 타입에 대한 일반적인 스키마는 [PPM90, CP90, Dyb91]에서 제안되었습니다.

귀납-재귀적 정의의 개념은 [Dyb00]에 나타납니다. 타입 이론의 중요한 개념 중 하나로 트리 타입의 개념(타입 이론에서 Post 체계의 개념을 일반적으로 표현한 것)이 있으며, 이는 [PS89]에 나타납니다.

$\mathbb{N}$-대수의 범주의 시작 대상으로서의 자연수의 보편 성질은 Lawvere [Law06]에 의한 것입니다. 이는 이후 [MP00]에 의해 W-타입을 다항 자기 함자에 대한 시작 대수로 기술하는 것으로 일반화되었습니다. 이러한 보편 성질과 그에 대응하는 귀납 원리 사이의 정합적인 호모토피 이론적 동치(§§5.4 및 5.5)는 [AGS12]에 의한 것입니다.

타입 이론의 호모토피 이론적 의미론에서 귀납적 타입을 실제로 구성하는 방법은 [KLV12, vdBM15, LS17]를 참고하십시오.

연습문제

연습문제 5.1. §5.1에서 리스트 타입 $\mathsf{List}(A)$를 귀납적 타입으로 정의한 것으로부터 그 귀납 원리를 유도하십시오.

연습문제 5.2. 같은 점화식 (e_z, e_s)를 판단적으로 만족하지만 판단적으로 같지는 않은, 자연수 위의 두 함수를 구성하십시오.

연습문제 5.3. 같은 함수 $f : \mathbb{N} \to E$가 둘 다 판단적으로 만족하는, 같은 타입 E 위의 서로 다른 두 점화식 (e_z, e_s)를 구성하십시오.

연습문제 5.4. 임의의 타입 족 $E : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$에 대하여, 귀납 연산자

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(E) : \big(E(0_{\mathbf{2}}) \times E(1_{\mathbf{2}})\big) \to \prod_{b:\mathbf{2}} E(b)$$

동치임을 보이십시오.

연습문제 5.5. $\mathbb{N}$에 대해서는 연습문제 5.4에 상응하는 명제가 성립하지 않음을 보이십시오.

연습문제 5.6. W-타입에 대해 의존 제거 대신 단순 제거를 가정하면 유일성 성질(정리 5.3.1에 상응하는 성질)이 성립하지 않음을 보이십시오. 즉, W-타입의 재귀 원리를 만족하지만 함수가 그 점화식에 의해 유일하게 결정되지 않는 타입을 제시하십시오.

연습문제 5.7. §5.6의 처음에 나온 타입 C의 "귀납적 정의"에서 타입 $\mathbb{N}$ 을 $\mathbf{0}$ 로 바꾼다고 가정합시다. (5.6.1)와 유사하게, 이 타입에 대해 다음 가정을 갖는 재귀 원리를 생각해 볼 수 있습니다.

$$h : (C \to \mathbf{0}) \to (P \to \mathbf{0}) \to P.$$

계산 규칙이 없더라도 이 재귀 원리가 모순적임을, 즉 이를 이용해 $\mathbf{0}$ 의 원소를 구성할 수 있음을 보이십시오.

연습문제 5.8. 이제 하나의 생성자 $\mathsf{scott} : (D \to D) \to D$를 갖는 "귀납적 타입" D를 고려하십시오. §5.6에서 제안된 C의 두 번째 재귀자로부터 다음과 같은 D의 재귀자를 얻습니다.

$$\mathsf{rec}_D : \prod_{P:\mathcal{U}} ((D \to D) \to (D \to P) \to P) \to D \to P$$

이때 계산 규칙은 $\mathsf{rec}_D(P, h, \mathsf{scott}(\alpha)) \equiv h(\alpha, (\lambda d.\, \mathsf{rec}_D(P, h, \alpha(d))))$ 입니다. 이 역시 모순으로 이어짐을 보이십시오.

연습문제 5.9. A를 임의의 타입이라 하고, 일반적으로 생성자 $\mathsf{lawvere} : (L_A \to A) \to L_A$를 갖는 타입 L_A의 "귀납적 정의"를 고려하십시오. §5.6에서 제안된 C의 두 번째 재귀자로부터 다음과 같은 L_A의 재귀자를 얻습니다.

$$\mathsf{rec}_{L_A} : \prod_{P:\mathcal{U}} ((L_A \to A) \to P) \to L_A \to P$$

이때 계산 규칙은 $\mathsf{rec}_{L_A}(P, h, \mathsf{lawvere}(\alpha)) \equiv h(\alpha)$ 입니다. 이를 이용하여 A가 **고정점 성질**을 가짐을, 즉 모든 함수 $f : A \to A$에 대하여 $f(a) = a$인 $a : A$가 존재함을 보이십시오. 특히 A가 $\mathbf{0}$, $\mathbf{2}$, $\mathbb{N}$처럼 고정점 성질을 갖지 않는 타입이라면 L_A는 모순적입니다.

연습문제 5.10. 연습문제 5.9에 이어서 $L_{\mathbf{1}}$을 고려하십시오. $\mathbf{1}$은 실제로 고정점 성질을 가지므로 $L_{\mathbf{1}}$이 모순적이라는 것은 자명하지 않습니다. 재귀자와 유사하게 $L_{\mathbf{1}}$의 귀납 원리와 그 계산 규칙을 정식화하고, 이를 이용하여 $L_{\mathbf{1}}$이 축약 가능함을 증명하십시오.

연습문제 5.11. §5.1에서 우리는 어떤 타입 A의 원소들로 이루어진 유한 리스트의 타입 $\mathsf{List}(A)$를 정의했습니다. 이와 유사하게, 유일한 생성자가 다음과 같은 타입 $\mathsf{Lost}(A)$의 귀납적 정의를 고려하십시오.

$$\mathsf{cons} : A \to \mathsf{Lost}(A) \to \mathsf{Lost}(A).$$

$\mathsf{Lost}(A)$가 $\mathbf{0}$와 동치임을 보이십시오.

연습문제 5.12. A가 단순 명제이고 $B : A \to \mathcal{U}$라고 가정합시다.

(i) $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$가 단순 명제임을 보이십시오.
(ii) $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$가 $\sum_{(a:A)} \neg B(a)$와 동치임을 보이십시오.
(iii) $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$를 사용하지 않고, $\sum_{(a:A)} \neg B(a)$가 §5.5의 의미에서 호모토피 W-타입 $\mathsf{W}^h_{(a:A)} B(a)$임을 보이십시오.

연습문제 5.13. $A : \mathcal{U}$이고 $B : A \to \mathcal{U}$라고 합시다.

(i) $\left(\sum_{(a:A)} \neg B(a)\right) \to \left(\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)\right)$ 임을 보이십시오.
(ii) $\left(\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)\right) \to \left(\neg \prod_{(a:A)} B(a)\right)$ 임을 보이십시오.

연습문제 5.14. $A : \mathcal{U}$라 하고, $B : A \to \mathcal{U}$가 결정 가능하다고, 즉 $\prod_{(a:A)}(B(a) + \neg B(a))$라고 가정합시다(정의 3.4.3 참조). $\left(\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)\right) \to \left(\sum_{(a:A)} \neg B(a)\right)$임을 보이십시오.

연습문제 5.15. 다음이 논리적으로 동치임을 보이십시오.

(i) 임의의 $A : \mathsf{Set}$와 $B : A \to \mathsf{Prop}$에 대하여 $\left(\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)\right) \to \left\|\sum_{(a:A)} \neg B(a)\right\|$가 성립합니다.

(ii) 임의의 $A : \mathsf{Set}$와 $B : A \to \mathsf{Prop}$에 대하여 $\left(\neg \prod_{(a:A)} B(a)\right) \to \left\|\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)\right\|$가 성립합니다.

(iii) 배중률(§3.4에서와 같은 것)입니다.

마찬가지로 따름정리 3.2.7을 사용하여, 모든 $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$에 대하여 (i) 또는 (ii)의 두 함의 중 어느 하나가 성립한다고 가정하는 것은 모순임을 보이십시오.

연습문제 5.16. $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$에 대하여 다음과 같이 정의합니다.

$$W'_{A,B} :\equiv \prod_{R:\mathcal{U}} \left(\prod_{a:A} (B(a) \to R) \to R\right) \to R$$

$W'_{A,B}$를 $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$**의 비서술적 인코딩**이라고 부릅니다. $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$와 달리, 이것은 A와 B보다 더 높은 유니버스에 속한다는 점에 유의하십시오.

(i) $W'_{A,B}$가 $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$와 (§1.11에서 정의한 의미로) 논리적으로 동치임을 보이십시오.

(ii) $W'_{A,B}$가 $\neg\neg\sum_{(a:A)} \neg B(a)$를 함의함을 보이십시오.

(iii) $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$를 사용하지 않고, (자기 자신은 속하지 않는) 유니버스 $\mathcal{U}$의 타입으로 가는 함수를 정의하는 데 있어 $W'_{A,B}$가 $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$와 같은 재귀 원리를 만족함을 보이십시오.

(iv) LEM 을 사용하여, $W'_{A,B}$가 $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$와 동치가 아니게 되는 $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$의 예를 드십시오.

연습문제 5.17. 임의의 $A : \mathcal{U}$와 $B : A \to \mathcal{U}$에 대하여 다음이 성립함을 보이십시오.

$$\neg\left(\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)\right) \simeq \neg\left(\sum_{a:A} \neg B(a)\right).$$

다시 말해, $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$가 비어 있을 필요충분조건은 인자가 없는(nullary) 생성자를 갖지 않는 것입니다. (연습문제 5.11과 비교하십시오.)

제6장

고차 귀납적 타입

6.1 서론

제5장에서 논의한 일반적인 귀납적 타입과 마찬가지로, 고차 귀납적 타입은 몇몇 생성자로 생성되는 새로운 타입을 정의하기 위한 일반적인 도식입니다. 그러나 보통의 귀납적 타입과 달리, 고차 귀납적 타입을 정의할 때는 그 타입의 점뿐만 아니라 그 타입 안의 경로와 고차 경로까지 생성하는 "생성자"를 둘 수 있습니다. 예를 들어, 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입 $\mathbb{S}^1$을 생각할 수 있습니다.

- 점 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$, 그리고
- 경로 $\mathsf{loop} : \mathsf{base} =_{\mathbb{S}^1} \mathsf{base}$.

이는 예를 들어 $\mathbf{2}$을 다음으로 생성되는 타입으로 정의하는 것과 완전히 유사한 것으로 보아야 합니다.

- 점 $0_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$, 그리고
- 점 $1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$,

또는 $\mathbb{N}$을 다음으로 생성되는 타입으로 정의하는 것과도 마찬가지입니다.

- 점 $0 : \mathbb{N}$, 그리고
- 함수 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

타입을 고차 그루포이드로 생각하면, 더 일반적인 "생성" 개념은 매우 자연스럽습니다. 고차 그루포이드는 점뿐만 아니라 경로와 고차 경로도 갖는 "다종 대상"이므로, 모든 차원에서 "생성원"을 허용해야 하기 때문입니다.

(base와 같은) 보통 종류의 생성자를 **점 생성자** 또는 보통 생성자라고 부르고, (loop와 같은) 나머지 생성자를 **경로 생성자** 또는 고차 생성자라고 부르겠습니다. 각 경로 생성자는 경로의 시작점과 끝점을 명시해야 하며, 이를 각각 그 생성자의 **출발점** 과 **도착점**이라고 부릅니다. loop의 경우 출발점과 도착점은 모두 base입니다.

loop 같은 경로 생성자는 동일성 타입의 새로운 원소를 생성하며, 이 원소는 이전부터 존재하던 그러한 원소 중 어느 것과도 같지 않다는 점에 유의하십시오(적어도 a priori로는 같지 않습니다). 특히 loop은 a priori로는 $\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$와 같지 않습니다(다만 둘이 확실히 같지 않음을 증명하려면 약간의 고찰이 필요합니다. 보조정리 6.4.1을 참조하십시오). 바로 이 점이 $\mathbb{S}^1$을 일반적인 귀납적 타입 $\mathbf{1}$과 구별합니다.

이러한 일반화와 관련하여 짚어 두어야 할 중요한 사항이 몇 가지 있습니다.

첫째, "생성"이라는 말은 어떤 군이 어떤 집합에 의해 자유롭게 생성될 수 있다고 할 때와 같은 의미로 진지하게 받아들여야 합니다. 특히 고차 그루포이드에는 경로와 고차 경로에 대한 연산이 딸려 있으므로, 그러한 대상이 특정 생성자들에 의해 "생성"되면 이 연산들은 생성자 자체에서 직접 나오지 않는 경로들을 더 만들어 냅니다. 예를 들어 고차 귀납적 타입 $\mathbb{S}^1$에서 base에서 base로 가는 자명하지 않은 경로는 생성자 loop만이 아닙니다. loop^{-1} 등은 물론 "$\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}$", "$\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}$" 등도 있으며, 이들은 모두 서로 다릅니다. 이는 언급할 가치도 없을 만큼 당연해 보일 수 있지만, 생성자가 직접 "넣어 준" 것 외에는 귀납적 타입 안에 아무것도 없으리라 기대할 수 있는 "보통의" 귀납적 타입의 동작과는 다른 점입니다.

둘째, 이러한 생성은 실제로 자유 생성입니다. 엄밀히 말해 고차 귀납적 타입으로는 "$\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}$"가 $\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$와 같도록 강제하는 것과 같은 "공리"를 부과할 수 없습니다. 그러나 ∞-그루포이드의 세계에서는 "자유 생성"과 "표시" 사이에 차이가 거의 없습니다. 두 경로를 서로 관계 짓는 새로운 2차원적인 생성자(예를 들어 $\mathsf{base} = \mathsf{base}$ 안의 경로 $\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$)를 추가하면 두 경로를 호모토피 수준에서 같게 만들 수 있기 때문입니다. 물론 그렇게 하면 이 새로운 생성자가 자기 자신의 "공리"를 만족해야 하는지 등을 신경 써야 하지만, 원리적으로는 공리를 생성자로 바꿈으로써 어떤 "표시"든 "자유" 표시로 변환할 수 있습니다. 앞으로 보겠지만, "절단 생성자"를 추가하면 고차 귀납적 타입을 사용하여 군의 표시와 같은 고전적인 개념도 표현할 수 있습니다.

셋째, 고차 귀납적 타입이 그 타입 안의 경로를 생성하는 "생성자"를 포함하더라도, 이는 여전히 단일한 타입에 대한 귀납적 정의입니다. 특히 앞으로 보겠지만, (늘 그렇듯 귀납 원리로 표현되는) 보편성질이 주어지는 것은 고차 귀납적 타입 자체이며, 그 동일성 타입이 아닙니다. 고차 귀납적 타입의 동일성 타입은 모든 동일성 타입이 갖는 통상적인 귀납 원리(즉, 경로 귀납법)를 그대로 유지하며, 새로운 귀납 원리를 얻지 않습니다.

따라서 제2장에서 모든 전통적인 타입 형성 연산에 대해 동일성 타입의 동작을 명시적으로 기술할 수 있었던 것과 달리, 고차 귀납적 타입의 동일성 타입을 구체적으로 규명하는 일은 자명하지 않을 수 있습니다. 예를 들어, $\mathbb{S}^1$에서 base에서 base로 가는 경로 중 단순히 loop와 그 역의 사본들을 합성한 것이 아닌 경로가 있습니까? 직관적으로는 답이 "아니요"여야 할 것 같고 실제로도 그렇지만, 이를 증명하는 일은 자명하지 않습니다. 실제로 이러한 질문은 구면의 호모토피 군을 계산하는 것과 같은 문제로 우리를 빠르게 이끄는데, 이는 간단한 공식이 알려져 있지 않은 대수적 위상수학의 오랜 문제입니다. 호모토피 타입 이론은 이러한 질문에 새롭고 강력한 관점을 제시하지만, 동시에 타입 이론이 이러한 질문의 답만큼 복잡해질 것을 요구합니다.

넷째, 생성자의 "차원"(즉, 생성자가 점을 출력하는지, 경로를 출력하는지, 경로 사이의 경로를 출력하는지 등)은 결과 타입이 어느 차원에서 자명하지 않은 호모토피를 갖는지와 직접적인 관련이 없습니다. 간단한 예로, 귀납적 타입 B에 타입이 $A \to B$인 생성자가 있다면, 그 생성자가 전혀 "고차" 생성자가 아닌데도 A 안의 모든 경로와 고차 경로는 B 안의 경로와 고차 경로를 낳습니다. 고차 생성자에서도 같은 일이 일어납니다. 타입이 $A \to (x =_B y)$인 생성자가 있다는 것은 A의 점들이 B 안에서 x에서 y로 가는 경로를 낳는다는 것뿐만 아니라, A 안의 경로들이 이 경로들 사이의 경로를 낳는다는 것 등을 의미합니다. 앞으로 보겠지만, 고차 귀납적 타입이 지닌 힘의 상당 부분은 이러한 가능성에서 비롯됩니다.

한편, 입력에 고차 타입이 없는 생성자가 "예상치 못한" 고차 경로를 생성하는 것도 가능합니다. 예를 들어, 다음으로 생성되는 2차원 구면 $\mathbb{S}^2$에는

- 점 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^2$, 그리고
- $\mathsf{base} = \mathsf{base}$ 안의 2차원 경로 $\mathsf{surf} : \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$,

$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}}$에서 자기 자신으로 가는 자명하지 않은 3차원 경로가 있습니다. 위상수학자라면 이 경로가 호프 올뭉치의 한 구현임을 알아볼 것입니다. 범주론적 관점에서 이는 앞서 언급한, $\mathbb{S}^1$이 loop뿐만 아니라 $\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}$ 등도 포함한다는 사실과 같은 종류의 현상입니다. 단지 고차 그루포이드에는 차원을 올리는 연산이 있을 뿐입니다. 실제로 우리는 이미 §2.1에서 이러한 연산을 많이 보았습니다. 결합법칙과 단위 법칙은 단순한 성질이 아니라, 1-경로를 입력으로 받아 2-경로를 출력하는 연산입니다.

6.2 귀납 원리와 의존 경로

원과 같은 고차 귀납적 타입이 특정 생성자들로 생성된다고 기술할 때, 우리는 제1장의 기본 타입 생성자들에 대한 규칙과 유사한 규칙을 제시하여 이것이 무엇을 의미하는지 설명해야 합니다. 생성자들 자체는 도입 규칙을 제공하지만, 제거 규칙, 즉 귀납 원리와 재귀 원리를 설명하려면 조금 더 생각해야 합니다. 이 책에서는 무엇이 "고차 귀납적 정의"를 이루는지, 그리고 그러한 정의로부터 제거 규칙을 어떻게 추출하는지를 일반적으로 정식화하려고 시도하지 않습니다 — 실제로 이것은 미묘한 문제이며 현재 연구 중인 주제입니다. 그 대신 몇 가지 일반적인 비형식적 논의와 수많은 예에 의존하겠습니다.

재귀 원리는 대개 쉽게 기술할 수 있습니다. 생성자들이 해당 고차 귀납적 타입에 부여하는 것과 동일한 구조를 갖춘 임의의 타입이 주어지면, 생성자들을 그 구조로 보내는 사상인 함수가 존재합니다. 예를 들어 $\mathbb{S}^1$의 경우, 재귀 원리에 따르면 점 $b : B$와 경로 $\ell : b = b$를 갖춘 임의의 타입 B가 주어지면 $f(\mathsf{base}) = b$이고 $\mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}) = \ell$인 함수 $f : \mathbb{S}^1 \to B$가 존재합니다.

뒤의 두 등식이 계산 규칙입니다. 그러나 이 계산 규칙들이 판단적 등식인지, 아니면 명제적 등식(경로)인지에 관한 문제가 있습니다. 일반적인 귀납적 타입의 경우 우리는 이것들을 판단적 등식으로 두는 데 아무런 거리낌이 없었지만, 제5장에서 보았듯이 이것들을 명제적 등식으로 두더라도 동치를 무시하면 여전히 같은 타입을 얻습니다. 일반적인 경우에는 계산 규칙이 서론에서 설명한 직관적인 의미에서 실제로 정의상의 등식이라고 주장할 수도 있습니다.

고차 귀납적 타입의 경우에는 이것이 덜 분명합니다. 게다가 연산 ap_f는 실제로 타입 이론의 근본적인 부분이 아니라 동일성 타입의 귀납 원리를 사용하여 우리가 정의한 것이므로(그리고 다른 동치인 방식으로 정의할 수도 있었으므로), 이를 판단적 등식에서 명시적으로 언급하는 것은 적절하지 않아 보입니다. 판단적 등식은 연역 체계의 일부이며, 그 체계 안에서 우리가 내릴 수 있는 특정한 정의상의 선택에 의존해서는 안 됩니다. 고려해야 할 의미론적 문제와 구현상의 문제도 있습니다. 주석을 참고하십시오.

고차 귀납적 타입의 점 생성자에 대한 계산 규칙을 판단적으로 두는 것은 문제가 없어 보입니다. 위의 예에서 이는 $f(\mathsf{base}) \equiv b$가 판단적으로 성립한다는 뜻입니다. 이러한 선택은 고차 귀납적 타입을 계산적 관점에서 바라보기 쉽게 해 줍니다. 게다가 이 선택은 우리의 수고를 크게 덜어 줍니다. 그렇지 않으면 두 번째 계산 규칙 $\mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}) = \ell$은 명제적 등식으로서 타입조차 올바르지 않을 것이며, 어느 한쪽 변을 $f(\mathsf{base})$와 b 사이의 지정된 동일시와 합성해야 할 것이기 때문입니다. (물론 더 높은 차원의 경로를 다루게 되면 결국 이러한 문제가 발생하지만, 여기서는 크게 신경 쓰지 않겠습니다. §6.7도 참고하십시오.) 따라서 점 생성자에 대한 계산 규칙은 판단적인 것으로, 경로와 고차 경로에 대한 계산 규칙은 명제적인 것으로 간주합니다.[1]

[1] 특히 §1.1의 용어로 말하면, 이는 우리의 고차 귀납적 타입이 규칙(그러한 타입과 그 원소를 도입하는 방법, 귀납 원리, 그리고 점 생성자에 대한 계산 규칙을 지정하는 것)과 공리(경로 생성자에 대한 계산 규칙으로, 특정 동일성 타입에 달리 지정되지 않은 항이 존재함을 주장하는 것)의 혼합이라는 뜻입니다. 언젠가는 고차 귀납적 타입이 유니벨런스와 마찬가지로 공리 없이 규칙만으로 제시되는 더 나은 타입 이론이 나오기를 기대할 수 있습니다.

주 6.2.1. 일반적인 귀납적 타입의 경우, 재귀적으로 정의된 함수의 계산 규칙을 단순한 판단적 등식이 아니라 정의상의 등식으로 간주하며, 따라서 이에 대해 $:\equiv$ 표기법을 사용할 수 있음을 상기하십시오. 예를 들어 절단된 선행자 함수 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$는 $p(0) :\equiv 0$과 $p(\mathsf{succ}(n)) :\equiv n$으로 정의됩니다. 고차 귀납적 타입의 경우, 이러한 표기법은 점 생성자에 대해서는 타당하지만(예: $f(\mathsf{base}) :\equiv b$), 경로 생성자에 대해서는 오해를 불러일으킬 수 있습니다. $f(\mathsf{loop}) = \ell$과 같은 등식은 판단적이지 않기 때문입니다. 따라서 우리는 두 표기법을 혼합하여, 이러한 종류의 "정의에 의한 명제적 등식"에 대해서는 대신 $f(\mathsf{loop}) := \ell$이라고 씁니다.

그렇다면 귀납 원리(의존 제거자)는 어떻습니까? 일반적인 귀납적 타입 W에 대해 $\prod_{(x:W)} P(x)$를 귀납법으로 증명하려면, W의 각 생성자에 대해 W 안의 그 생성자 위에 있는 "섬유"에 작용하는 P 위의 연산을 지정해야 함을 상기하십시오. 예를 들어 W가 자연수 $\mathbb{N}$ 이면, $\prod_{(x:\mathbb{N})} P(x)$를 귀납법으로 증명하기 위해 다음을 지정해야 합니다.

- 생성자 $0 : \mathbb{N}$ 위의 섬유에 속하는 원소 $b : P(0)$, 그리고
- 각 $n : \mathbb{N}$에 대해 함수 $P(n) \to P(\mathsf{succ}(n))$.

두 번째 것은 생성자 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 위에 놓인 함수 "$P \to P$"로 볼 수 있으며, 이는 $b : P(0)$이 생성자 $0 : \mathbb{N}$ 위에 놓이는 방식을 일반화한 것입니다.

따라서 이와 유사하게, $\prod_{(x:\mathbb{S}^1)} P(x)$를 증명하려면 다음을 지정해야 합니다.

- 생성자 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$ 위의 섬유에 속하는 원소 $b : P(\mathsf{base})$, 그리고
- "생성자 $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$ 위에 놓인" b에서 b로의 경로.

$\mathbb{S}^1$에는 loop 이외의 경로들(예를 들어 $\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$와 $\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}$)도 있지만, 우리는 생성자 자체 위에 놓인 경로만 지정하면 된다는 점에 유의하십시오. 이는 $\mathbb{S}^1$이 그 생성자들에 의해 "자유롭게 생성된다"는 직관을 표현합니다.

그런데 문제는 한 경로가 다른 경로 "위에 놓인다"는 것이 무엇을 의미하는가입니다. 이것은 결코 단순히 경로 $b = b$를 뜻하지 않습니다. 그것은 섬유 $P(\mathsf{base})$ 안의 경로(위상적으로는 base에서의 상수 경로 위에 놓인 경로)일 것이기 때문입니다. 그러나 사실 우리는 이미 제2장에서 이 질문에 답했습니다. 보조정리 2.3.4 앞의 논의에서, $p : x = y$ 위에 놓인 $u : P(x)$에서 $v : P(y)$로의 경로는 섬유 $P(y)$ 안의 경로 $p_*(u) = v$로 표현될 수 있다고 결론지었습니다. 이 장에서는 이러한 **의존 경로**를 많이 사용할 것이므로, 이를 위한 특별한 표기법을 도입합니다.

$$(u =^P_p v) :\equiv (\mathsf{transport}^P(p, u) = v). \tag{6.2.2}$$

주 6.2.3. 의존 경로를 정의하는 다른 방법들도 있습니다. 예를 들어 $p_*(u) = v$ 대신 $u = (p^{-1})_*(v)$를 고려할 수도 있습니다. 또한 이를 더 일반적인 "이종 등식"의 특수한 경우로 얻거나, 귀납적 타입 족으로 직접 정의할 수도 있습니다. 이 모든 정의는 동치인 타입을 낳으므로, 그런 의미에서 어느 것을 택하든 별 상관이 없습니다. 그러나 $p_*(u) = v$를 정의로 택하면 의존 경로에 관한 다른 사실들을 가장 쉽게 이끌어 낼 수 있습니다. 예를 들어 apd_f가 의존 경로를 만들어 낸다는 사실이나, §2.5의 수송 보조정리를 사용하여 특정 타입 족에서 의존 경로를 계산할 수 있다는 사실 등이 그렇습니다.

의존 경로의 개념을 갖추었으니, 이제 $\mathbb{S}^1$에 대한 귀납 원리를 더 정확하게 서술할 수 있습니다. $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$와 다음이 주어졌다고 합시다.

- 원소 $b : P(\mathsf{base})$, 그리고
- 경로 $\ell : b =^P_{\mathsf{loop}} b$,

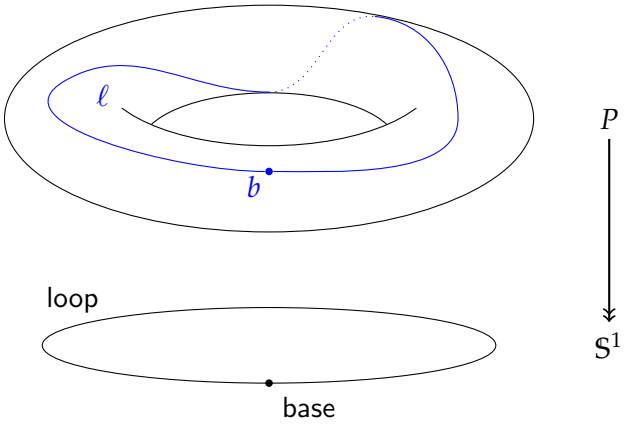


그림 6.1: $\mathbb{S}^1$의 위상적 귀납 원리

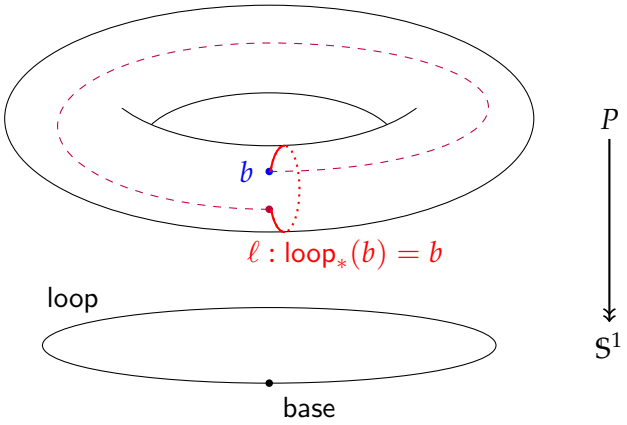


그림 6.2: $\mathbb{S}^1$의 타입 이론적 귀납 원리

그러면 $f(\mathsf{base}) \equiv b$이고 $\mathsf{apd}_f(\mathsf{loop}) = \ell$인 함수 $f : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} P(x)$가 존재합니다. 비의존적인 경우와 마찬가지로, 이를 $f(\mathsf{base}) :\equiv b$와 $\mathsf{apd}_f(\mathsf{loop}) := \ell$로 f를 정의한다고 말합니다.

주 6.2.4. 이 귀납 원리의 적용을 비형식적으로 기술할 때, 우리는 이를 "모든 $x : \mathbb{S}^1$에 대해 $P(x)$"라는 목표를 두 경우로 나누는 것으로 간주하며, 때로는 각각 "x가 base일 때"와 "x가 loop를 따라 변할 때"와 같은 문구로 두 경우를 도입하겠습니다. "경로를 따라 변한다"는 표현에 특정한 수학적 의미가 부여되어 있지는 않습니다. 이는 증명에서 해당 부분의 시작을 나타내는 편리한 방법일 뿐입니다. 예는 보조정리 6.4.2를 참고하십시오.

위상적으로 $\mathbb{S}^1$의 귀납 원리는 그림 6.1와 같이 시각화할 수 있습니다. 원 위의 올뭉치(그림에서는 토러스)가 주어졌을 때, 이 올뭉치의 단면을 정의하는 것은 base 위의 섬유에 있는 점 b와 함께 loop 위에 놓인 b에서 b로 가는 경로를 주는 것과 같습니다. 의존 경로의 정의를 사용하여 이를 타입 이론적으로 해석하는 방식은 그림 6.2에 나와 있습니다. loop 위에 놓인 b에서 b로 가는 경로는 base 위의 섬유에서 $\mathsf{loop}_*(b)$로부터 b로 가는 경로로 표현됩니다.

물론 P를 상수 타입 족으로 택하면 귀납 원리로부터 재귀 원리를 증명할 수 있으리라 기대할 것입니다. 실제로도 그러하지만, (apd_f를 언급하는) 의존적 계산 규칙으로부터 (ap_f를 언급하는) loop에 대한 비의존적 계산 규칙을 유도하는 것은 의외로 약간 까다롭습니다.

보조정리 6.2.5. A가 타입이고 $a : A$와 $p : a =_A a$가 주어지면, 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{S}^1 \to A$가 존재합니다.

$$f(\mathsf{base}) :\equiv a$$
$$\mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}) := p.$$

증명. $\mathbb{S}^1$의 귀납 원리를 상수 타입 족 $(\lambda x.\, A) : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$에 적용하고자 합니다. 이를 위해 필요한 가정은 $(\lambda x.\, A)(\mathsf{base}) \equiv A$의 점 하나(이는 이미 가지고 있으며, 바로 $a : A$입니다)와 $a =^{x\mapsto A}_{\mathsf{loop}} a$의 의존 경로 하나, 또는 동치적으로 $\mathsf{transport}^{x\mapsto A}(\mathsf{loop}, a) = a$의 원소 하나입니다. 이 후자의 타입은 p가 속한 타입 $a =_A a$와 같지는 않지만 그것과 동치입니다. 보조정리 2.3.5에 의해 $\mathsf{transportconst}^A_{\mathsf{loop}}(a) : \mathsf{transport}^{x\mapsto A}(\mathsf{loop}, a) = a$가 있기 때문입니다. 따라서 $a : A$와 $p : a = a$가 주어지면 다음 합성을 생각할 수 있습니다.

$$\mathsf{transportconst}^A_{\mathsf{loop}}(a) \cdot p : (a =^{x\mapsto A}_{\mathsf{loop}} a).$$

귀납 원리를 적용하면 다음을 만족하는 $f : \mathbb{S}^1 \to A$를 얻습니다.

$$f(\mathsf{base}) \equiv a \qquad \text{그리고} \tag{6.2.6}$$
$$\mathsf{apd}_f(\mathsf{loop}) = \mathsf{transportconst}^A_{\mathsf{loop}}(a) \cdot p. \tag{6.2.7}$$

이제 등식 $\mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}) = p$를 유도하는 일이 남아 있습니다. 그런데 보조정리 2.3.8에 의해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{apd}_f(\mathsf{loop}) = \mathsf{transportconst}^A_{\mathsf{loop}}(f(\mathsf{base})) \cdot \mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}).$$

이를 (6.2.7)과 결합하고 나타나는 $\mathsf{transportconst}$들을 소거하면(이들은 (6.2.6)에 의해 서로 같습니다), $\mathsf{ap}_f(\mathsf{loop}) = p$를 얻습니다. □

이에 대응하는 유일성 원리도 있습니다.

보조정리 6.2.8. A가 타입이고 $f, g : \mathbb{S}^1 \to A$가 다음 두 등식 p, q와 함께 주어진 두 사상이라고 합시다:

$$p : f(\mathsf{base}) =_A g(\mathsf{base}),$$
$$q : f(\mathsf{loop}) =^{\lambda x.\, x =_A x}_{p} g(\mathsf{loop}).$$

그러면 모든 $x : \mathbb{S}^1$에 대해 $f(x) = g(x)$가 성립합니다.

증명. 타입 족 $P(x) :\equiv (f(x) = g(x))$에 $\mathbb{S}^1$의 귀납 원리를 적용합니다. x가 base일 때에는 p가 바로 필요한 것입니다. 그리고 x가 loop를 따라 변할 때에는 $p =^{\lambda x.\, f(x)=g(x)}_{\mathsf{loop}} p$,가 필요한데, 이는 정리 2.11.3 및 2.11.5에 의해 q로 환원될 수 있습니다. □

이 두 보조정리로부터 기대했던 원의 보편 성질이 따라 나옵니다:

보조정리 6.2.9. 임의의 타입 A에 대해 다음과 같은 자연스러운 동치가 있습니다.

$$(\mathbb{S}^1 \to A) \;\simeq\; \sum_{x:A} (x = x).$$

증명. $f(g) :\equiv (g(\mathsf{base}), g(\mathsf{loop}))$로 정의되는 표준적인 함수 $f : (\mathbb{S}^1 \to A) \to \sum_{(x:A)}(x = x)$가 있습니다. 반대 방향으로는, 쌍 (b, ℓ)을 원의 재귀 원리가 주는 함수 $\mathbb{S}^1 \to A$로 보내도록 정의되는 $g : \sum_{(x:A)}(x = x) \to (\mathbb{S}^1 \to A)$가 있습니다.

이제 재귀 원리의 계산 규칙에 의해 $f \circ g \sim \mathsf{id}$가 성립합니다. 한편 $g \circ f \sim \mathsf{id}$는 유일성 원리에 의해 성립하는데, 역시 원의 재귀 원리의 계산 규칙에 의해 $(g \circ f)(\mathsf{loop}) =^{\lambda x.\, x =_A x}_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}} \mathsf{loop}$이기 때문입니다. 따라서 f는 준역원을 가지며, 그러므로 동치입니다. □

§5.5에서와 마찬가지로, 보조정리 6.2.9의 결론이 명제적 계산 규칙을 갖는 귀납 원리를 가지는 것과 동치임을 보일 수 있습니다. 다른 고차 귀납적 타입들도 보조정리 6.2.5 및 6.2.9와 유사한 보조정리들을 만족하며, 그 증명은 대체로 독자에게 맡기겠습니다. 이제 여러 예를 살펴보겠습니다.

6.3 구간

I로 표기하는 **구간**은 아마도 원보다 훨씬 더 단순한 고차 귀납적 타입일 것입니다. 구간은 다음에 의해 생성됩니다:

- 점 $0_I : I$,
- 점 $1_I : I$, 그리고
- 경로 $\mathsf{seg} : 0_I =_I 1_I$.

구간의 재귀 원리에 따르면, 타입 B와 함께 다음이 주어질 때

- 점 $b_0 : B$,
- 점 $b_1 : B$, 그리고
- 경로 $s : b_0 = b_1$가 주어지면,

$f(0_I) \equiv b_0$, $f(1_I) \equiv b_1$, $f(\mathsf{seg}) = s$를 만족하는 함수 $f : I \to B$가 존재합니다. 귀납 원리에 따르면, $P : I \to \mathcal{U}$와 함께

- 점 $b_0 : P(0_I)$,
- 점 $b_1 : P(1_I)$, 그리고
- 경로 $s : b_0 =^P_{\mathsf{seg}} b_1$가 주어지면,

$f(0_I) \equiv b_0$, $f(1_I) \equiv b_1$, $\mathsf{apd}_f(\mathsf{seg}) = s$를 만족하는 함수 $f : \prod_{(x:I)} P(x)$가 존재합니다.

순전히 호모토피 관점에서만 보면 구간은 그다지 흥미롭지 않습니다:

보조정리 6.3.1. 타입 I는 축약 가능합니다.

증명. 모든 $x : I$에 대해 $x =_I 1_I$가 성립함을 증명합니다. 다시 말해, 타입이 $\prod_{(x:I)}(x =_I 1_I)$인 함수 f를 구하고자 합니다. f를 다음과 같이 정의하기 시작합니다:

$$f(0_I) :\equiv \mathsf{seg} \;\; : 0_I =_I 1_I,$$
$$f(1_I) :\equiv \mathsf{refl}_{1_I} : 1_I =_I 1_I.$$

이제 $\mathsf{apd}_f(\mathsf{seg})$를 정의하는 일이 남았으며, 그 타입은 $\mathsf{seg} =^{\lambda x.\, x =_I 1_I}_{\mathsf{seg}} \mathsf{refl}_{1_I}$이어야 합니다. 정의에 따라 이 타입은 $\mathsf{seg}_*(\mathsf{seg}) =_{1_I =_I 1_I} \mathsf{refl}_{1_I}$이며, 이는 다시 $\mathsf{seg}^{-1} \cdot \mathsf{seg} = \mathsf{refl}_{1_I}$와 동치입니다. 그런데 이 타입에는 표준적인 원소가 있는데, 바로 경로의 역이 실제로 역이라는 증명입니다. □

그러나 타입 이론의 관점에서 구간은 고전적 호모토피 이론의 위상적 구간과 마찬가지로 여전히 몇 가지 흥미로운 특징을 지닙니다. 예를 들어, 구간을 이용하면 함수 외연성을 쉽게 증명할 수 있습니다. (물론 §4.9에서와 마찬가지로, 다음 증명을 진행하는 동안에는 함수 외연성 공리에 대한 전반적인 가정을 잠시 보류합니다.)

보조정리 6.3.2. $f, g : A \to B$가 모든 $x : A$에 대해 $f(x) = g(x)$를 만족하는 두 함수라면, 타입 $A \to B$에서 $f = g$가 성립합니다.

증명. 주어진 증명을 $p : \prod_{(x:A)}(f(x) = g(x))$라고 합시다. 모든 $x : A$에 대해 함수 $\widetilde{p}_x : I \to B$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_x(0_I) &:\equiv f(x), \\ \widetilde{p}_x(1_I) &:\equiv g(x), \\ \widetilde{p}_x(\mathsf{seg}) &:= p(x). \end{aligned}$$

이제 $q : I \to (A \to B)$를 다음과 같이 정의합니다.

$$q(i) :\equiv (\lambda x.\, \widetilde{p}_x(i))$$

그러면 $q(0_I)$는 함수 $\lambda x.\, \widetilde{p}_x(0_I)$이며, $\widetilde{p}_x(0_I)$가 $f(x)$로 정의되므로 이 함수는 f와 같습니다. 마찬가지로 $q(1_I) = g$가 성립하므로, 다음을 얻습니다.

$$q(\mathsf{seg}) : f =_{(A \to B)} g$$ □

연습문제 6.10에서는 독자에게 보조정리 6.3.2로부터 완전한 함수 외연성 공리의 증명을 완성하도록 요청합니다.

6.4 원과 구면

앞에서 이미 원 $\mathbb{S}^1$을 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 논의했습니다.

- 점 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$, 그리고
- 경로 $\mathsf{loop} : \mathsf{base} =_{\mathbb{S}^1} \mathsf{base}$.

원의 귀납 원리에 따르면, $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$와 함께 $b : P(\mathsf{base})$와 $\ell : b =^P_{\mathsf{loop}} b$가 주어지면 $f(\mathsf{base}) \equiv b$와 $\mathsf{apd}_f(\mathsf{loop}) = \ell$을 만족하는 $f : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} P(x)$가 존재합니다. 원의 비의존 재귀 원리에 따르면, $b : B$와 $\ell : b = b$를 갖는 B가 주어지면 $f(\mathsf{base}) \equiv b$와 $f(\mathsf{loop}) = \ell$을 만족하는 $f : \mathbb{S}^1 \to B$가 존재합니다.

원이 자명하지 않음을 살펴봅니다.

보조정리 6.4.1. $\mathsf{loop} \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$.

증명. $\mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$라고 가정합시다. 그러면 $x : A$와 $p : x = x$를 갖는 임의의 타입 A에 대해 $f(\mathsf{base}) :\equiv x$와 $f(\mathsf{loop}) := p$로 정의되는 함수 $f : \mathbb{S}^1 \to A$가 존재하므로, 다음을 얻습니다.

$$p = f(\mathsf{loop}) = f(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}) = \mathsf{refl}_x.$$

그러나 이는 모든 타입이 집합임을 함의하며, 앞서 보았듯이 이는 사실이 아닙니다(예 3.1.9 참조). □

원에는 다음과 같은 흥미로운 성질도 있으며, 이 성질은 반례를 얻는 데 유용합니다.

보조정리 6.4.2. $\prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(x = x)$에는 $x \mapsto \mathsf{refl}_x$와 같지 않은 원소가 존재합니다.

증명. $f : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(x = x)$를 $\mathbb{S}^1$-귀납법으로 정의합니다. x가 base일 때는 $f(\mathsf{base}) :\equiv \mathsf{loop}$로 둡니다. 이제 x가 loop를 따라 변할 때(주 6.2.4 참조), $\mathsf{transport}^{x\mapsto x=x}(\mathsf{loop}, \mathsf{loop}) = \mathsf{loop}$임을 보여야 합니다. 그런데 §2.11에서 $\mathsf{transport}^{x\mapsto x=x}(p, q) = p^{-1} \cdot q \cdot p$임을 관찰했으므로, 보여야 할 것은 $\mathsf{loop}^{-1} \cdot \mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} = \mathsf{loop}$입니다. 이는 역원 하나를 소거하면 명백합니다.

$f \neq (x \mapsto \mathsf{refl}_x)$임을 보이려면 $f(\mathsf{base}) \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$임을 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 $f(\mathsf{base}) = \mathsf{loop}$이므로, 이는 바로 앞의 보조정리입니다. □

예를 들어, 이를 이용하면 원을 포함하는 어떤 유니버스도 1-타입일 수 없음을 보임으로써 예 3.1.9의 결과를 확장할 수 있습니다.

따름정리 6.4.3. 타입 $\mathbb{S}^1$이 어떤 유니버스 $\mathcal{U}$에 속한다면, $\mathcal{U}$는 1-타입이 아닙니다.

증명. 유니밸런스에 의해 $\mathcal{U}$ 안의 타입 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1$은 $\mathbb{S}^1$의 자기동치들의 타입 $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1$과 동치이므로, $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1$이 집합이 아님을 보이는 것으로 충분합니다. 이를 위해서는 그 동일성 타입 $\mathsf{id}_{\mathbb{S}^1} =_{(\mathbb{S}^1\simeq\mathbb{S}^1)} \mathsf{id}_{\mathbb{S}^1}$이 단순 명제가 아님을 보이는 것으로 충분합니다. 동치라는 성질은 단순 명제이므로, 이 타입은 $\mathsf{id}_{\mathbb{S}^1} =_{(\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1)} \mathsf{id}_{\mathbb{S}^1}$과 동치입니다. 그런데 함수 외연성에 의해 이는 $\prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(x = x)$와 동치이며, 보조정리 6.4.2에서 보았듯이 이 타입에는 서로 같지 않은 두 원소가 있습니다. □

또한 2-구면 $\mathbb{S}^2$는 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입이어야 한다고 언급했습니다.

- 점 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^2$, 그리고
- $\mathsf{base} = \mathsf{base}$ 안의 2차원 경로 $\mathsf{surf} : \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$.

$\mathbb{S}^2$의 재귀 원리는 어렵지 않습니다. 이 원리에 따르면 $b : B$와 $s : \mathsf{refl}_b = \mathsf{refl}_b$를 갖춘 B가 주어질 때, $f(\mathsf{base}) \equiv b$이고 $\mathsf{ap}^2_f(\mathsf{surf}) = s$인 $f : \mathbb{S}^2 \to B$가 존재합니다. 여기서 "$\mathsf{ap}^2_f(\mathsf{surf})$"는 f의 함자적 작용을 2차원 경로로 확장한 것을 뜻하며, 이는 다음과 같이 엄밀하게 서술할 수 있습니다.

보조정리 6.4.4. $f : A \to B$와 $x, y : A$, $p, q : x = y$, 그리고 $r : p = q$가 주어지면, 경로 $\mathsf{ap}^2_f(r) : f(p) = f(q)$가 존재합니다.

증명. 경로 귀납법에 의해 $p \equiv q$이고 r이 반사성이라고 가정할 수 있습니다. 그러면 $\mathsf{ap}^2_f(\mathsf{refl}_p) :\equiv \mathsf{refl}_{f(p)}$로 정의할 수 있습니다. □

일반적인 귀납 원리를 서술하려면 의존 함수에 대한 이 보조정리의 한 형태가 필요하며, 이를 위해서는 다시 의존 2차원 경로라는 개념이 필요합니다. 앞서와 마찬가지로 이러한 것을 정의하는 방법은 여러 가지가 있으며, 그중 하나는 수송의 2차원 형태를 이용하는 것입니다.

보조정리 6.4.5. $P : A \to \mathcal{U}$와 $x, y : A$, $p, q : x = y$, $r : p = q$가 주어지면, 임의의 $u : P(x)$에 대해 $\mathsf{transport}^2(r, u) : p_*(u) = q_*(u)$가 존재합니다.

증명. 경로 귀납법에 따릅니다. □

이제 $x, y : A$와 $p, q : x = y$, $r : p = q$, 그리고 점 $u : P(x)$와 $v : P(y)$, 의존 경로 $h : u =^P_p v$와 $k : u =^P_q v$가 주어졌다고 가정합시다. 의존 경로의 정의에 따르면, 이는 $h : p_*(u) = v$이고 $k : q_*(u) = v$임을 뜻합니다. 따라서 r 위의 의존 2-경로의 타입을 다음과 같이 정의하는 것이 합당합니다.

$$(h =^P_r k) :\equiv (h = \mathsf{transport}^2(r, u) \cdot k).$$

이제 보조정리 6.4.4의 의존 형태를 서술할 수 있습니다.

보조정리 6.4.6. $P : A \to \mathcal{U}$와 $x, y : A$, $p, q : x = y$, $r : p = q$, 그리고 함수 $f : \prod_{(x:A)} P(x)$가 주어지면, $\mathsf{apd}^2_f(r) : \mathsf{apd}_f(p) =^P_r \mathsf{apd}_f(q)$가 존재합니다.

증명. 경로 귀납법. □

이제 $\mathbb{S}^2$의 귀납 원리를 서술할 수 있습니다. $b : P(\mathsf{base})$와 $s : \mathsf{refl}_b =^Q_{\mathsf{surf}} \mathsf{refl}_b$를 갖춘 $P : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{U}$가 주어졌다고 가정합시다. 여기서 $Q :\equiv \lambda p.\, b =^P_p b$입니다. 그러면 $f(\mathsf{base}) \equiv b$이고 $\mathsf{apd}^2_f(\mathsf{surf}) = s$인 함수 $f : \prod_{(x:\mathbb{S}^2)} P(x)$가 존재합니다.

물론 이러한 명시적 접근법은 차원이 높아질수록 점점 더 복잡해집니다. 따라서 모든 n에 대해 n-구면을 정의하려면 좀 더 체계적인 아이디어가 필요합니다. 한 가지 접근법은 일반적인 n차원 경로 대신 n차원 루프를 직접 다루는 것입니다.

§2.1에서 다룬 점을 가진 타입 $\mathcal{U}_*$의 정의와 n겹 루프 공간 $\Omega^n : \mathcal{U}_* \to \mathcal{U}_*$의 정의를 상기하십시오 (정의 2.1.7 및 2.1.8). 이제 n-구면 $\mathbb{S}^n$을 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 정의할 수 있습니다.

- 점 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^n$, 그리고
- n-루프 $\mathsf{loop}_n : \Omega^n(\mathbb{S}^n, \mathsf{base})$.

이 표현에 대한 귀납 원리를 적으려면 "의존 n-루프"의 개념과 함께 의존 함수가 n-루프에 작용하는 방식을 정의해야 합니다. 이는 독자에게 맡깁니다(연습문제 6.4 참조). 다음 절에서는 구면을 정의하는 다른 방법으로, 때로는 더 다루기 쉬운 방법을 논의하겠습니다.

6.5 현수

타입 A의 **현수**는 A의 점들을 경로로 만드는(따라서 A 안의 경로들은 2-경로로 만들고, 이런 식으로 계속되는) 보편적인 방법입니다. 이는 다음 생성자들로 정의되는 타입 ΣA입니다:[2]

- 점 $\mathsf{N} : \Sigma A$,
- 점 $\mathsf{S} : \Sigma A$, 그리고
- 함수 $\mathsf{merid} : A \to (\mathsf{N} =_{\Sigma A} \mathsf{S})$.

이 이름들은 북극과 남극이 있고, 한쪽에서 다른 쪽으로 가는 A만큼의 자오선이 있는 일종의 "지구본"을 연상시키려는 것입니다. 실제로 앞으로 보겠지만, $A = \mathbb{S}^1$이면 그 현수는 일반적인 구면의 표면 $\mathbb{S}^2$와 동치입니다.

ΣA의 재귀 원리에 따르면, 타입 B와 함께 다음이 주어졌을 때,

[2] 안타깝게도 의존 쌍 타입과 표기가 충돌합니다. 의존 쌍 타입 역시 물론 Σ로 쓰기 때문입니다. 그러나 대개는 문맥으로 구별할 수 있습니다.

- 점 $n, s : B$ 그리고
- 함수 $m : A \to (n = s)$,

$f(\mathsf{N}) \equiv n$이고 $f(\mathsf{S}) \equiv s$이며 모든 $a : A$에 대해 $f(\mathsf{merid}(a)) = m(a)$인 함수 $f : \Sigma A \to B$가 존재합니다. 마찬가지로 귀납 원리에 따르면, $P : \Sigma A \to \mathcal{U}$와 함께 다음이 주어졌을 때,

- 점 $n : P(\mathsf{N})$,
- 점 $s : P(\mathsf{S})$, 그리고
- 각 $a : A$에 대해 경로 $m(a) : n =^{P}_{\mathsf{merid}(a)} s$,

$f(\mathsf{N}) \equiv n$이고 $f(\mathsf{S}) \equiv s$이며 각 $a : A$에 대해 $\mathsf{apd}_f(\mathsf{merid}(a)) = m(a)$인 함수 $f : \prod_{(x:\Sigma A)} P(x)$가 존재합니다.

현수에 관한 첫 번째 관찰은 현수가 원을 정의하는 또 다른 방법을 제공한다는 것입니다.

보조정리 6.5.1. $\Sigma\mathbf{2} \simeq \mathbb{S}^1$.

증명. 재귀를 통해 $f : \Sigma\mathbf{2} \to \mathbb{S}^1$를 $f(\mathsf{N}) :\equiv \mathsf{base}$이고 $f(\mathsf{S}) :\equiv \mathsf{base}$이며, $f(\mathsf{merid}(\mathbf{0_2})) := \mathsf{loop}$이지만 $f(\mathsf{merid}(\mathbf{1_2})) := \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$가 되도록 정의합니다. 재귀를 통해 $g : \mathbb{S}^1 \to \Sigma\mathbf{2}$를 $g(\mathsf{base}) :\equiv \mathsf{N}$이고 $g(\mathsf{loop}) := \mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{1_2})^{-1}$가 되도록 정의합니다. 이제 f와 g가 서로의 준역원임을 보이겠습니다.

먼저 모든 $x : \Sigma\mathbf{2}$에 대해 $g(f(x)) = x$임을 귀납법으로 보이겠습니다. $x \equiv \mathsf{N}$이면 $g(f(\mathsf{N})) \equiv g(\mathsf{base}) \equiv \mathsf{N}$이므로 $\mathsf{refl}_{\mathsf{N}} : g(f(\mathsf{N})) = \mathsf{N}$를 얻습니다. $x \equiv \mathsf{S}$이면 $g(f(\mathsf{S})) \equiv g(\mathsf{base}) \equiv \mathsf{N}$이고, 등식 $\mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) : g(f(\mathsf{S})) = \mathsf{S}$를 선택합니다. 남은 것은 임의의 $y : \mathbf{2}$에 대해 x가 $\mathsf{merid}(y)$를 따라 변할 때 이 등식들이 보존됨을 보이는 것입니다. 다시 말해, $\mathsf{refl}_{\mathsf{N}}$를 $\mathsf{merid}(y)$를 따라 수송하면 $\mathsf{merid}(\mathbf{1_2})$가 됨을 보여야 합니다. 경로 공간과 당겨온 올뭉치에서의 수송에 의해, 이는 다음을 보여야 한다는 뜻입니다.

$$g(f(\mathsf{merid}(y)))^{-1} \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{N}} \cdot \mathsf{merid}(y) = \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}).$$

물론 $\mathsf{refl}_{\mathsf{N}}$는 소거할 수 있습니다. 이제 $\mathbf{2}$-귀납법에 의해 $y \equiv \mathbf{0_2}$ 또는 $y \equiv \mathbf{1_2}$라고 가정할 수 있습니다. $y \equiv \mathbf{0_2}$이면 다음을 얻고,

$$\begin{aligned} g(f(\mathsf{merid}(\mathbf{0_2})))^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) &= g(\mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) \\ &= (\mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{1_2})^{-1})^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) \\ &= \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{0_2})^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{0_2}) \\ &= \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) \end{aligned}$$

$y \equiv \mathbf{1_2}$이면 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned} g(f(\mathsf{merid}(\mathbf{1_2})))^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) &= g(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}})^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) \\ &= \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}{}^{-1} \cdot \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}) \\ &= \mathsf{merid}(\mathbf{1_2}). \end{aligned}$$

따라서 모든 $x : \Sigma\mathbf{2}$에 대해 $g(f(x)) = x$입니다.

이제 모든 $x : \mathbb{S}^1$에 대해 $f(g(x)) = x$임을 귀납법으로 보이겠습니다. $x \equiv \mathsf{base}$이면 $f(g(\mathsf{base})) \equiv f(\mathsf{N}) \equiv \mathsf{base}$이므로 $\mathsf{refl}_{\mathsf{base}} : f(g(\mathsf{base})) = \mathsf{base}$를 얻습니다. 남은 것은 x가 loop를 따라 변할 때

이 등식이 보존됨을 보이는 것입니다. 다시 말해, 이 등식을 loop를 따라 수송하면 자기 자신이 됨을 보여야 합니다. 이번에도 경로 공간과 당겨온 올뭉치에서의 수송에 의해, 이는 다음을 보여야 한다는 뜻입니다.

$$f(g(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} \cdot \mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}.$$

그런데 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} f(g(\mathsf{loop})) &= f\left(\mathsf{merid}(0_{\mathbf{2}}) \cdot \mathsf{merid}(1_{\mathbf{2}})^{-1}\right) \\ &= f(\mathsf{merid}(0_{\mathbf{2}})) \cdot f(\mathsf{merid}(1_{\mathbf{2}}))^{-1} \\ &= \mathsf{loop} \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} \end{aligned}$$

따라서 이는 쉽게 따라 나옵니다. □

위상수학적으로, 두 점 공간 $\mathbf{2}$ 은 0차원 구면 $\mathbb{S}^0$으로도 알려져 있습니다. (예를 들어, 위상적 1차원 구면이 $\mathbb{R}^2$에서 원점으로부터 거리가 1인 점들의 공간인 것과 마찬가지로, 이것은 $\mathbb{R}^1$에서 원점으로부터 거리가 1인 점들의 공간입니다.) 따라서 보조정리 6.5.1은 $\Sigma\mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{S}^1$이라는 시사적인 형태로 표현할 수 있습니다. 실제로 이 패턴은 계속됩니다. 모든 구면을 다음과 같이 귀납적으로 정의할 수 있습니다.

$$\mathbb{S}^0 :\equiv \mathbf{2} \qquad \text{그리고} \qquad \mathbb{S}^{n+1} :\equiv \Sigma\mathbb{S}^n. \tag{6.5.2}$$

심지어 $\mathbb{S}^{-1} :\equiv \mathbf{0}$로 정의하여 한 차원 더 낮은 곳에서 시작할 수도 있으며, $\Sigma\mathbf{0} \simeq \mathbf{2}$임을 확인할 수 있습니다.

이것이 앞 절의 $\mathbb{S}^n$ 정의와 일치함을 엄밀하게 증명하려면 후자를 더 명시적으로 만들어야 합니다. 하지만 재귀적 정의가 다른 정의에서 기대되는 것과 같은 보편 성질을 가진다는 것은 보일 수 있습니다. (A, a_0)와 (B, b_0)가 점을 가진 타입이라면(기점은 흔히 암묵적으로 둡니다), $\mathsf{Map}_*(A, B)$가 기점을 보존하는 사상들의 타입을 나타낸다고 합시다.

$$\mathsf{Map}_*(A, B) :\equiv \sum_{f:A\to B} (f(a_0) = b_0).$$

임의의 타입 A로부터 기점이 $\mathsf{inr}(\star)$인 점을 가진 타입 $A_+ :\equiv A + \mathbf{1}$을 얻을 수 있다는 점에 유의하십시오. 이를 서로소인 기점을 덧붙인다고 합니다.

보조정리 6.5.3. 타입 A와 점을 가진 타입 (B, b_0)에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{Map}_*(A_+, B) \simeq (A \to B)$$

우변은 A에서 B로 가는 기점을 보존하지 않는 함수들의 통상적인 타입이라는 점에 유의하십시오.

증명. 왼쪽에서 오른쪽으로는, $p : f(\mathsf{inr}(\star)) = b_0$와 함께 $f : A_+ \to B$가 주어지면 $f \circ \mathsf{inl} : A \to B$를 얻습니다. 그리고 오른쪽에서 왼쪽으로는, $g : A \to B$가 주어지면 $g'(\mathsf{inl}(a)) :\equiv g(a)$와 $g'(\mathsf{inr}(u)) :\equiv b_0$로 $g' : A_+ \to B$를 정의합니다. 이 두 연산이 서로 준역원임을 보이는 것은 독자에게 맡깁니다. □

특히 $\mathbf{2} \simeq \mathbf{1}_+$임에 유의하십시오. 따라서 임의의 점을 가진 타입 B에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{Map}_*(\mathbf{2}, B) \simeq (\mathbf{1} \to B) \simeq B.$$

이제 루프 공간 연산 Ω가 $\Omega(A, a_0) :\equiv (a_0 =_A a_0, \mathsf{refl}_{a_0})$라는 정의로 점을 가진 타입에 작용한다는 것을 떠올리십시오. 현수 Σ도 $\Sigma(A, a_0) :\equiv (\Sigma A, \mathsf{N})$로 정의하여 점을 가진 타입에 작용하게 할 수 있습니다.

보조정리 6.5.4. 점을 가진 타입 (A, a_0)와 (B, b_0)에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{Map}_*(\Sigma A, B) \simeq \mathsf{Map}_*(A, \Omega B).$$

증명. 먼저 다음과 같은 동치의 사슬을 관찰합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Map}_*(\Sigma A, B) &:\equiv \sum_{f:\Sigma A \to B} (f(\mathsf{N}) = b_0) \\
&\simeq \sum_{f:\sum_{(b_n:B)} \sum_{(b_s:B)} (A \to (b_n = b_s))} (\mathsf{pr}_1(f) = b_0) \\
&\simeq \sum_{(b_n:B)} \sum_{(b_s:B)} \big(A \to (b_n = b_s)\big) \times (b_n = b_0) \\
&\simeq \sum_{(p:\sum_{(b_n:B)} (b_n = b_0))} \sum_{(b_s:B)} (A \to (\mathsf{pr}_1(p) = b_s)) \\
&\simeq \sum_{b_s:B} (A \to (b_0 = b_s))
\end{aligned}$$

첫 번째 동치는 현수의 보편 성질에 의한 것이며, 이 성질에 따르면 다음이 성립합니다.

$$\Big(\Sigma A \to B\Big) \simeq \Big(\sum_{(b_n:B)} \sum_{(b_s:B)} (A \to (b_n = b_s))\Big)$$

여기서 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 함수는 재귀자로 주어집니다(연습문제 6.11 참조). 두 번째와 세 번째 동치는 성분들의 순서를 바꾸는 것과 함께 연습문제 2.10에 의한 것입니다. 마지막으로, 보조정리 3.11.8에 의해 $\sum_{(b_n:B)} (b_n = b_0)$는 중심이 $(b_0, \mathsf{refl}_{b_0})$이며 축약 가능하므로, 마지막 동치는 보조정리 3.11.9로부터 따라 나옵니다.

이제 다음과 같은 동치의 사슬로 증명이 완성됩니다.

$$\begin{aligned}
\sum_{b_s:B} (A \to (b_0 = b_s)) &\simeq \sum_{(b_s:B)} \sum_{(g:A \to (b_0 = b_s))} \sum_{(q:b_0 = b_s)} (g(a_0) = q) \\
&\simeq \sum_{(r:\sum_{(b_s:B)} (b_0 = b_s))} \sum_{(g:A \to (b_0 = \mathsf{pr}_1(r)))} (g(a_0) = \mathsf{pr}_2(r)) \\
&\simeq \sum_{g:A \to (b_0 = b_0)} (g(a_0) = \mathsf{refl}_{b_0}) \\
&\equiv \mathsf{Map}_*(A, \Omega B).
\end{aligned}$$

앞에서와 마찬가지로, 첫 번째와 마지막 동치는 보조정리 3.11.8 및 3.11.9에 의한 것이고, 두 번째 동치는 연습문제 2.10과 성분들의 순서 바꾸기에 의한 것입니다. □

특히 (6.5.2)에서와 같이 정의된 구면들에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^n, B) \simeq \mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega B) \simeq \cdots \simeq \mathsf{Map}_*(\mathbf{2}, \Omega^n B) \simeq \Omega^n B.$$

따라서 이 구면들 $\mathbb{S}^n$은 §6.4에서처럼 n겹 루프 공간을 이용해 직접 정의된 구면들에 대해 기대할 법한 보편 성질을 가집니다.

6.6 세포 복합체

고전 위상수학에서 세포 복합체란 원판들을 그 경계를 따라 차례로 붙여서 얻는 공간입니다. n차원 원판의 경계가 차원이 n보다 엄격히 작은 원판들($(n-1)$-뼈대) 안에 놓이도록 제한되어 있으면 이를 CW 복합체라고 합니다.

모든 유한 CW 복합체는 n차원 원판을 n차원 경로로 바꾸고, 붙임 사상의 상을 시작점과 끝점으로 나누어 각각을 더 낮은 차원 경로들의 합성으로 표현함으로써 고차 귀납적 타입으로 나타낼 수 있습니다. §6.4에서 제시한 $\mathbb{S}^1$과 $\mathbb{S}^2$의 명시적 정의가 바로 이러한 형태였습니다.

또 다른 예는 토러스 T^2이며, 이는 다음으로 생성됩니다.

- 점 $b : T^2$,
- 경로 $p : b = b$,
- 또 다른 경로 $q : b = b$, 그리고
- 2-경로 $t : p \cdot q = q \cdot p$.

이것이 토러스임을 확인하는 가장 쉬운 방법은 아마도 네 꼭짓점 a, b, c, d, 네 변 p, q, r, s, 그리고 명백히 $p \cdot q$에서 $r \cdot s$로 가는 2-경로 t인 내부를 가진 직사각형에서 시작하는 것입니다.

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{p}{=\!=} & b \\ {\scriptstyle r}\Big\| & \Downarrow t & \Big\|{\scriptstyle q} \\ c & \underset{s}{=\!=} & d \end{array}$$

이제 변 r을 q와, 변 s를 p와 동일시하면 네 꼭짓점도 모두 동일시됩니다. 위상적으로 이 동일시가 토러스를 만들어 낸다는 것을 확인할 수 있습니다.

토러스의 귀납 원리는 지금까지 적어 본 것 중에서 가장 까다롭습니다. $P : T^2 \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때, 단면 $\prod_{(x:T^2)} P(x)$를 위해서는 다음이 필요합니다.

- 점 $b' : P(b)$,
- 경로 $p' : b' =^P_p b'$,
- 경로 $q' : b' =^P_q b'$, 그리고
- "합성" $p' \cdot q'$와 $q' \cdot p'$ 사이에 있으며 t 위에 놓이는 2-경로 t'.

이 마지막 데이터에 의미를 부여하려면 의존 경로에 대한 합성 연산이 필요하지만, 이는 정의하기 어렵지 않습니다. 그러면 귀납 원리는 $f(b) \equiv b'$, $\mathsf{apd}_f(p) = p'$, $\mathsf{apd}_f(q) = q'$, 그리고 "$\mathsf{apd}^2_f(t) = t'$"와 같은 것을 만족하는 함수 $f : \prod_{(x:T^2)} P(x)$를 제공합니다. 그러나 이는 현재 형태로는 타입이 올바르지 않습니다. 첫째로 등식 $\mathsf{apd}_f(p) = p'$와 $\mathsf{apd}_f(q) = q'$가 판단적 등식이 아니기 때문이고, 둘째로 apd_f가 경로 이어붙이기를 호모토피 수준까지만 보존하기 때문입니다. 세부 사항은 독자에게 맡깁니다(연습문제 6.1를 참조하십시오).

물론 토러스의 또 다른 정의는 $T^2 :\equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 입니다(연습문제 6.3에서 독자에게 두 정의가 동치임을 확인하도록 요청합니다). 그러나 세포 복합체 정의는 클라인 병, 사영 평면 등 그러한 기술을 갖지 않는 다른 공간으로 쉽게 일반화됩니다. 하지만 귀납 원리를 적는 일은 점점 더 어려워지며, 의존 n-경로의 개념과 n-경로에 작용하는 apd의 개념을 정의해야 합니다. 다행히 구면을 손에 넣고 나면 이를 우회하는 방법이 있습니다.

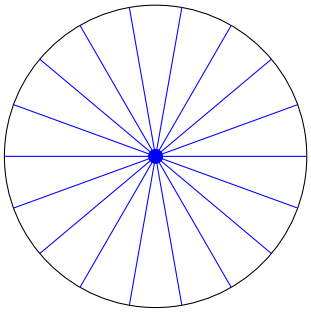


그림 6.3: 허브와 스포크로 이루어진 2-원판

6.7 허브와 스포크

위상수학에서는 보통 n차원 원판을 그 $(n-1)$차원 경계 구면을 따라 붙여 CW 복합체를 구성한다고 말합니다. 그러나 이를 표현하는 또 다른 방법은 $(n-1)$차원 구면 위의 원뿔을 붙여 넣는 것입니다. 즉, 그림 6.3에 나타낸 것처럼 원판을 원뿔점(또는 "허브")과, 그 점을 경계 위의 모든 점에 연속적으로 잇는 자오선들 (또는 "스포크")로 이루어진 것으로 간주합니다.

이 아이디어를 사용하면 $n > 1$에 대해 n차원 경로 생성자를 포함하는 고차 귀납적 타입을 1차원적인 경로 생성자만 포함하는 타입으로 표현할 수 있습니다. 핵심은 n차원 경로를 $(n-1)$차원적인 대상으로 매개화된 1차원 경로들의 연속적인 족으로서 얻을 수 있다는 점입니다. 사용할 수 있는 가장 단순한 $(n-1)$차원 대상은 $(n-1)$-구면이지만, 경우에 따라서는 다른 대상이 더 적합할 수도 있습니다. (§6.5에서 1차원 경로 생성자만 포함하는 현수를 사용하여 구면들을 귀납적으로 정의할 수 있었음을 상기하십시오. 실제로 현수 역시 현수되는 타입으로 매개화된 1차원 경로들의 족을 포함하므로, 이 아이디어의 한 사례로 볼 수 있습니다.)

예를 들어 앞 절의 토러스 T^2는 대신 다음으로 생성되도록 정의할 수도 있습니다.

- 점 $b : T^2$,
- 경로 $p : b = b$,
- 또 다른 경로 $q : b = b$,
- 점 $h : T^2$, 그리고
- 각 $x : \mathbb{S}^1$에 대해 경로 $s(x) : f(x) = h$. 여기서 $f : \mathbb{S}^1 \to T^2$는 $f(\mathsf{base}) :\equiv b$와 $f(\mathsf{loop}) := p \cdot q \cdot p^{-1} \cdot q^{-1}$로 정의됩니다.

이 버전의 토러스에 대한 귀납 원리에 따르면, $P : T^2 \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때 단면 $\prod_{(x:T^2)} P(x)$를 위해서는 다음이 필요합니다.

- 점 $b' : P(b)$,
- 경로 $p' : b' =^P_p b'$,
- 경로 $q' : b' =^P_q b'$,
- 점 $h' : P(h)$, 그리고
- 각 $x : \mathbb{S}^1$에 대해 경로 $g(x) =^P_{s(x)} h'$. 여기서 $g : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} P(f(x))$는 $g(\mathsf{base}) :\equiv b'$와 $\mathsf{apd}_g(\mathsf{loop}) := t(p' \cdot q' \cdot (p')^{-1} \cdot (q')^{-1})$로 정의됩니다. 후자에서 $\cdot$는 의존 경로의 이어붙이기를 나타내며, $t : (b' =^P_{f(\mathsf{loop})} b') \simeq (b' =^{P\circ f}_{\mathsf{loop}} b')$의 정의는 독자에게 맡깁니다.

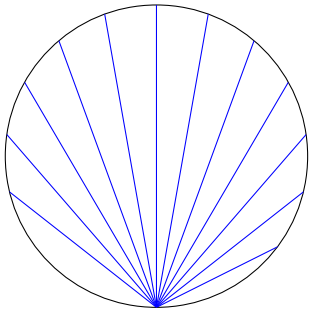


그림 6.4: 허브 없는 스포크

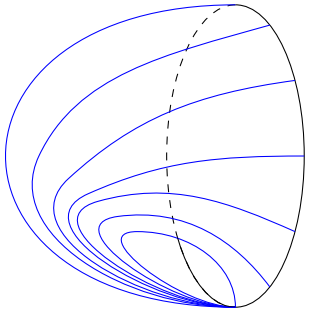


그림 6.5: 허브 없는 스포크, II

의존 2-경로나 apd^2가 필요하지 않다는 점에 유의하십시오. 계산 규칙을 적어 보는 일은 독자에게 맡깁니다.

주 6.7.1. 허브 점 h를 도입할 필요가 있는지 의문을 품을 수도 있습니다. 그림 6.4에 나타낸 것처럼, 대신 원판의 경계를 그 경계 위의 한 점과 연속적으로 연결하는 경로들을 단순히 추가하면 왜 안 되겠습니까? 그러나 이 방법은 추가적인 수정 없이는 작동하지 않습니다. 어떤 $f : \mathbb{S}^1 \to X$가 주어졌을 때 각 $f(x)$를 $f(\mathsf{base})$에 연결하는 경로 생성자를 주면, 결국 얻게 되는 것은 꼭짓점이 비틀려 밑면의 어떤 점에 붙은 원뿔을 나타낸 그림 6.5의 그림에 더 가깝기 때문입니다. 문제는 $f(\mathsf{base})$에서 자기 자신으로 가는 지정된 경로가 반사성이 아닐 수 있다는 것입니다. 이를 보장하는 2차원 경로 생성자를 추가하여 문제를 해결할 수도 있지만, 별도의 허브를 사용하면 차원이 1보다 큰 경로 생성자가 전혀 필요하지 않습니다.

주 6.7.2. 또한 고차 경로를 1-경로로 바꾸는 이러한 "번역"은 이 경로들에 대한 명제적 계산 규칙은 보존하지만 판단적 계산 규칙은 보존하지 않는다는 점에 유의하십시오.

6.8 푸시아웃

범주론적 관점에서 볼 때, 모든 기초 체계의 중요한 측면 중 하나는 극한과 쌍대극한을 구성할 수 있는 능력입니다. 집합론적 기초에서는 이들이 집합의 극한과 쌍대극한이지만, 우리의 경우에는 타입의 극한과 쌍대극한입니다. §2.15에서 데카르트 곱 타입이 타입의 범주론적 곱이 갖는 올바른 보편 성질을 지닌다는 것을 보았고, 연습문제 2.9에서 쌍대곱 타입도 마찬가지로 기대되는 보편 성질을 지닌다는 것을 보았습니다.

§2.15에서 언급했듯이, 더 일반적인 극한은 동일성 타입과 Σ-타입을 사용하여 구성할 수 있습니다. 예를 들어 $f : A \to C$와 $g : B \to C$의 당김은 $\sum_{(a:A)} \sum_{(b:B)} (f(a) = g(b))$ 입니다(연습문제 2.11을 참조하십시오). 그러나 더 일반적인 쌍대극한은 서로 다른 타입에서 온 원소들을 동일시해야 하며, 고차 귀납적 타입은 이에 잘 맞습니다. 우리의 모든 구성은 호모토피 불변이므로 우리의 모든 쌍대극한은 필연적으로 호모토피 쌍대극한이지만, 간결함을 위해 어디에나 붙는 이 수식어는 생략합니다.

이 절에서는 아마도 가장 단순하면서도 가장 유용한 쌍대극한 중 하나인 푸시아웃을 다룹니다. 실제로 모든 유한 쌍대극한("유한"에 대한 적절한 호모토피적 정의 하에서)은 푸시아웃과 유한 쌍대곱으로부터 구성할 수 있을 것으로 기대됩니다. 고차 귀납적 타입을 사용하여 더 일반적인 쌍대극한을 직접 구성하는 것도 가능하지만, 이는 다소 기술적입니다. 또한 호모토피 정합적 다이어그램에 대한 완전히 일반적이고 좋은 개념을 아직 갖추지 못했으므로 완전히 만족스럽지도 않습니다.

다음과 같은 타입과 함수의 스팬이 주어졌다고 합시다.

$$\mathscr{D} = \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

이 스팬의 **푸시아웃**은 다음으로 표시되는 고차 귀납적 타입 $A \sqcup^C B$입니다.

- 함수 $\mathsf{inl} : A \to A \sqcup^C B$,
- 함수 $\mathsf{inr} : B \to A \sqcup^C B$, 그리고
- 각 $c : C$에 대한 경로 $\mathsf{glue}(c) : (\mathsf{inl}(f(c)) = \mathsf{inr}(g(c)))$.

다시 말해, $A \sqcup^C B$는 A와 B의 서로소 합집합에 모든 $c : C$에 대해 $f(c)$와 $g(c)$가 같다는 증거를 함께 갖춘 것입니다. 재귀 원리에 따르면, D가 또 다른 타입일 때 다음을 정의함으로써 사상 $s : A \sqcup^C B \to D$를 정의할 수 있습니다.

- 각 $a : A$에 대한 $s(\mathsf{inl}(a)) : D$의 값,
- 각 $b : B$에 대한 $s(\mathsf{inr}(b)) : D$의 값, 그리고
- 각 $c : C$에 대한 $\mathsf{ap}_s(\mathsf{glue}(c)) : s(\mathsf{inl}(f(c))) = s(\mathsf{inr}(g(c)))$의 값.

귀납 원리를 정식화하는 일은 독자에게 맡깁니다. 이 원리는 또한 다음과 같은 유일성 원리를 함의합니다. $s, s' : A \sqcup^C B \to D$가 다음을 만족하는 두 사상이라면

$$\begin{aligned} s(\mathsf{inl}(a)) &= s'(\mathsf{inl}(a)) \\ s(\mathsf{inr}(b)) &= s'(\mathsf{inr}(b)) \\ \mathsf{ap}_s(\mathsf{glue}(c)) &= \mathsf{ap}_{s'}(\mathsf{glue}(c)) \qquad \text{(앞의 두 등식을 법으로 하여)} \end{aligned}$$

모든 a, b, c에 대해 성립하면 $s = s'$입니다.

푸시아웃의 보편 성질을 정식화하기 위해 다음을 도입합니다.

정의 6.8.1. 스팬 $\mathscr{D} = (A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$와 타입 D가 주어졌을 때, **꼭짓점이 D인 $\mathscr{D}$ 아래의 쌍대뿔**은 함수 $i : A \to D$와 $j : B \to D$, 그리고 호모토피 $h : \prod_{(c:C)} (i(f(c)) = j(g(c)))$로 이루어집니다:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{h}{\swarrow\!\!/\!\!/} & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow[i]{} & D \end{array}$$

이러한 모든 쌍대뿔의 타입을 $\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$로 표기합니다. 즉,

$$\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D) :\equiv \sum_{(i:A\to D)} \sum_{(j:B\to D)} \prod_{(c:C)} (i(f(c)) = j(g(c))).$$

물론 inl, inr, glue로 이루어진, 꼭짓점이 $A \sqcup^C B$인 $\mathscr{D}$ 아래의 표준적인 쌍대뿔이 있습니다.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{\mathsf{glue}}{\swarrow\!\!\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{inr}} \\ A & \xrightarrow[\mathsf{inl}]{} & A \sqcup^C B \end{array}$$

다음 보조정리는 이것이 그러한 쌍대뿔 중 보편적인 것임을 말해 줍니다.

보조정리 6.8.2. 임의의 타입 E에 대해 다음 동치가 존재합니다.

$$(A \sqcup^C B \to E) \;\simeq\; \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E).$$

증명. 임의의 타입 $E : \mathcal{U}$를 생각해 봅시다. 다음과 같이 정의되는 표준적인 함수 $c_{\sqcup}$가 있습니다.

$$\begin{cases} (A \sqcup^C B \to E) & \longrightarrow & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \\ t & \longmapsto & (t \circ \mathsf{inl}, t \circ \mathsf{inr}, \mathsf{ap}_t \circ \mathsf{glue}) \end{cases}$$

이 함수를 비형식적으로 $t \mapsto t \circ c_{\sqcup}$로 씁니다. 이것이 동치임을 보이겠습니다.

먼저, $c = (i, j, h) : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E)$가 주어졌을 때 $A \sqcup^C B$에서 E로 가는 사상 $\mathsf{s}(c)$를 구성해야 합니다.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{h}{\swarrow\!\!\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow[i]{} & E \end{array}$$

사상 $\mathsf{s}(c)$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(c)(\mathsf{inl}(a)) &:\equiv i(a), \\ \mathsf{s}(c)(\mathsf{inr}(b)) &:\equiv j(b), \\ \mathsf{ap}_{\mathsf{s}(c)}(\mathsf{glue}(x)) &:= h(x). \end{aligned}$$

이로써 다음 사상을 정의했습니다.

$$\begin{cases} \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) & \longrightarrow & (A \sqcup^C B \to E) \\ c & \longmapsto & \mathsf{s}(c) \end{cases}$$

이제 이 사상이 $t \mapsto t \circ c_{\sqcup}$의 역임을 증명해야 합니다. 한편으로, $c = (i, j, h) : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E)$이면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(c) \circ c_{\sqcup} &= (\mathsf{s}(c) \circ \mathsf{inl}, \mathsf{s}(c) \circ \mathsf{inr}, \mathsf{ap}_{\mathsf{s}(c)} \circ \mathsf{glue}) \\ &= (\lambda a.\, \mathsf{s}(c)(\mathsf{inl}(a)),\ \lambda b.\, \mathsf{s}(c)(\mathsf{inr}(b)),\ \lambda x.\, \mathsf{ap}_{\mathsf{s}(c)}(\mathsf{glue}(x))) \\ &= (\lambda a.\, i(a),\ \lambda b.\, j(b),\ \lambda x.\, h(x)) \\ &\equiv (i, j, h) \\ &= c. \end{aligned}$$

다른 한편으로, $t : A \sqcup^C B \to E$이면 $\mathsf{s}(t \circ c_{\sqcup}) = t$임을 증명하고자 합니다. $a : A$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{s}(t \circ c_{\sqcup})(\mathsf{inl}(a)) = t(\mathsf{inl}(a))$$

이는 $t \circ c_{\sqcup}$의 첫 번째 성분이 $t \circ \mathsf{inl}$이기 때문입니다. 마찬가지로 $b : B$에 대해 다음이 성립하고,

$$\mathsf{s}(t \circ c_{\sqcup})(\mathsf{inr}(b)) = t(\mathsf{inr}(b))$$

$x : C$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{ap}_{\mathsf{s}(t \circ c_{\sqcup})}(\mathsf{glue}(x)) = \mathsf{ap}_t(\mathsf{glue}(x))$$

따라서 $\mathsf{s}(t \circ c_{\sqcup}) = t$입니다.

이로써 원하던 대로 $c \mapsto \mathsf{s}(c)$가 $t \mapsto t \circ c_{\sqcup}$의 준역원임이 증명됩니다. □

여러 표준적인 호모토피 이론적 구성을 (호모토피) 푸시아웃으로 표현할 수 있습니다.

- 스팬 $\mathbf{1} \leftarrow A \to \mathbf{1}$의 푸시아웃은 **현수** ΣA입니다(§6.5 참조).
- $A \xleftarrow{\mathsf{pr}_1} A \times B \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} B$의 푸시아웃을 A와 B의 **조인**이라고 하며, $A * B$로 씁니다.
- $\mathbf{1} \leftarrow A \xrightarrow{f} B$의 푸시아웃을 f의 **원뿔** 또는 **쌍대 섬유**라고 합니다.
- A와 B에 기점 $a_0 : A$와 $b_0 : B$가 주어져 있으면, $A \xleftarrow{a_0} \mathbf{1} \xrightarrow{b_0} B$의 푸시아웃은 **쐐기합** $A \vee B$입니다.
- A와 B가 앞에서와 같이 점을 가진 타입이라면, $f : A \vee B \to A \times B$를 $f(\mathsf{inl}(a)) :\equiv (a, b_0)$와 $f(\mathsf{inr}(b)) :\equiv (a_0, b)$, 그리고 $f(\mathsf{glue}) := \mathsf{refl}_{(a_0,b_0)}$로 정의합니다. 그러면 f의 원뿔을 **스매시 곱** $A \wedge B$라고 합니다.

푸시아웃은 장 7 및 8에서 더 자세히 논의하겠습니다.

주 6.8.3. §3.7에서 언급했듯이, 점 붙은 공간의 스매시 곱과 쐐기합을 나타내는 기호 $\wedge$와 $\vee$는 논리학에서도 각각 "그리고"와 "또는"을 나타내는 데 쓰입니다. 호모토피 타입 이론에서 타입은 공간처럼 행동할 수도 있고 명제처럼 행동할 수도 있으므로 엄밀히 따지면 충돌의 여지가 있습니다 — 그러나 두 방식으로 동시에 행동하는 경우는 드물기 때문에 대개 문맥으로 구별할 수 있습니다. 게다가 스매시 곱과 쐐기합은 점 붙은 공간에만 적용되는데, 점 붙은 단순 명제는 $\top \equiv \mathbf{1}$ 하나뿐입니다 — 그리고 $\wedge$와 $\vee$를 어느 뜻으로 읽든 $\mathbf{1} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}$이고 $\mathbf{1} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$입니다.

주 6.8.4. 쌍대극한은 일반적으로 절단성을 보존하지 않는다는 점에 유의하십시오. 예를 들어 $\mathbb{S}^0$과 $\mathbf{1}$은 둘 다 집합이지만, $\mathbf{1} \leftarrow \mathbb{S}^0 \to \mathbf{1}$의 푸시아웃은 $\mathbb{S}^1$이며 이는 집합이 아닙니다. 따라서 n-타입의 범주(특히 집합의 범주)에서의 쌍대극한에 관심이 있다면, 어떤 방식으로든 쌍대극한을 "절단"해야 합니다. 이 점은 §6.9 및 장 7 및 10에서 다시 다루겠습니다.

6.9 절단

§3.7에서는 명제 절단을 새로운 타입 형성 연산으로 도입했습니다. 이제 이것이 고차 귀납적 타입의 특수한 경우로 얻어질 수 있음을 살펴봅니다. 이로써 절단을 이해하는 문제는 고차 귀납적 타입을 이해하는 문제로 환원되며, 고차 귀납적 타입은 적어도 체계적으로 다룰 수 있습니다. 또한 이는 (후

속자 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$처럼) 생성자가 정의되고 있는 타입으로부터 입력을 받는다는 점에서 진정으로 재귀적인 고차 귀납적 타입의 첫 번째 예를 제공한다는 점에서도 흥미롭습니다.

A를 타입이라고 합시다. A의 명제 절단 $\|A\|$를 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 정의합니다.

- 함수 $|-| : A \to \|A\|$, 그리고
- 각 $x, y : \|A\|$에 대하여 경로 $x = y$.

두 번째 생성자는 정의상 $\|A\|$가 단순 명제라는 주장임에 유의하십시오. 따라서 $\|A\|$의 정의는 $\|A\|$가 함수 $A \to \|A\|$와 그것이 단순 명제라는 사실에 의해 자유롭게 생성된다는 뜻으로 해석할 수 있습니다.

이 고차 귀납적 정의의 재귀 원리는 쉽게 적을 수 있습니다. 이 원리에 따르면, 임의의 타입 B와 함께 다음이 주어졌을 때

- 함수 $g : A \to B$, 그리고
- 임의의 $x, y : B$에 대하여 경로 $x =_B y$,

다음을 만족하는 함수 $f : \|A\| \to B$가 존재합니다.

- 모든 $a : A$에 대하여 $f(|a|) \equiv g(a)$이고,
- 임의의 $x, y : \|A\|$에 대하여 함수 ap_f는 $\|A\|$ 안의 지정된 경로 $x = y$를 B 안의 지정된 경로 $f(x) = f(y)$로 (명제적으로) 보냅니다.

이것들은 §3.7에서 명제 절단의 재귀 원리에 대해 제시한 가설, 즉 B가 단순 명제인 함수 $A \to B$와 정확히 같으며, 결론의 첫 번째 부분 역시 그곳에서 제시한 것과 정확히 같습니다. 두 번째 부분(ap_f의 작용)은 이전에 언급하지 않았지만, 이 경우에는 자명하게 성립합니다. B가 단순 명제이므로 그 안의 임의의 두 경로는 자동으로 같기 때문입니다.

$\|A\|$에 대한 귀납 원리도 있습니다. 이 원리에 따르면, 임의의 $B : \|A\| \to \mathcal{U}$와 함께 다음이 주어졌을 때

- 함수 $g : \prod_{(a:A)} B(|a|)$, 그리고
- 임의의 $x, y : \|A\|$와 $u : B(x)$ 및 $v : B(y)$에 대하여 의존 경로 $q : u =^B_{p(x,y)} v$(여기서 $p(x, y)$는 $\|A\|$의 두 번째 생성자에서 나오는 경로),

$a : A$에 대하여 $f(|a|) \equiv g(a)$를 만족하는 $f : \prod_{(x:\|A\|)} B(x)$가 존재하며, 또 다른 계산 규칙도 성립합니다. 그러나 임의의 두 단순 명제 사이에는 (호모토피를 무시하면) 함수가 많아야 하나뿐이므로, 이 귀납 원리는 실제로 그다지 유용하지 않습니다(연습문제 3.17도 참고하십시오).

그러나 이 아이디어를 확장하면 임의의 n에 대해 결과가 n-타입이 되는 비슷한 절단을 구성할 수 있습니다. 예를 들어 0-절단(0-truncation) $\|A\|_0$를 다음으로 생성되는 타입으로 정의할 수 있습니다.

- 함수 $|-|_0 : A \to \|A\|_0$, 그리고
- 각 $x, y : \|A\|_0$와 각 $p, q : x = y$에 대하여 경로 $p = q$.

그러면 $\|A\|_0$는 함수 $A \to \|A\|_0$와 $\|A\|_0$가 집합이라는 주장에 의해 자유롭게 생성됩니다. 이에 대한 자연스러운 귀납 원리에 따르면, $B : \|A\|_0 \to \mathcal{U}$와 함께 다음이 주어졌을 때

- 함수 $g : \prod_{(a:A)} B(|a|_0)$, 그리고

- $z : B(x)$와 $w : B(y)$를 갖는 임의의 $x, y : \|A\|_0$, 그리고 $r : z =^B_p w$와 $s : z =^B_q w$를 갖는 각 $p, q : x = y$에 대하여, 2-경로 $v : r =^{z=^B w}_{u(x,y,p,q)} s$(여기서 $u(x, y, p, q) : p = q$는 $\|A\|_0$의 두 번째 생성자로부터 얻어집니다),

모든 $a : A$에 대하여 $f(|a|_0) \equiv g(a)$이고, 또한 $\mathsf{apd}^2_f(u(x, y, p, q))$가 위에서 지정한 2-경로인 $f : \prod_{(x:\|A\|_0)} B(x)$가 존재합니다. (명제의 경우와 마찬가지로, 후자의 조건은 별다른 의미가 없는 것으로 드러납니다.) 그러나 이로부터 더 유용한 귀납 원리를 증명할 수 있습니다.

보조정리 6.9.1. $B : \|A\|_0 \to \mathcal{U}$와 함께 $g : \prod_{(a:A)} B(|a|_0)$가 주어졌다고 하고, 각 $B(x)$가 집합이라고 가정합시다. 그러면 모든 $a : A$에 대하여 $f(|a|_0) \equiv g(a)$인 $f : \prod_{(x:\|A\|_0)} B(x)$가 존재합니다.

증명. 위와 같은 임의의 x, y, z, w, p, q, r, s에 대하여 2-경로 $v : r =^B_{u(x,y,p,q)} s$를 구성하면 충분합니다. 그런데 의존 2-경로의 정의에 따르면, 이것은 섬유 $B(y)$ 안의 보통의 2-경로입니다. $B(y)$는 집합이므로, 임의의 두 평행한 경로 사이에는 2-경로가 존재합니다. □

이로부터 기대한 보편 성질이 따라 나옵니다.

보조정리 6.9.2. 임의의 집합 B와 임의의 타입 A에 대하여, $|-|_0 : A \to \|A\|_0$와의 합성은 다음 동치를 결정합니다.

$$(\|A\|_0 \to B) \simeq (A \to B).$$

증명. B가 상수 족인 경우의 보조정리 6.9.1의 특수한 경우는 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 사상을 주며, 이는 왼쪽에서 오른쪽으로 가는 "$|-|_0$와 합성하는" 함수의 오른쪽 역함수입니다. 이것이 왼쪽 역함수이기도 함을 보이기 위해, $h : \|A\|_0 \to B$라 하고, 합성 $a \mapsto h(|a|_0)$에 보조정리 6.9.1를 적용하여 $h' : \|A\|_0 \to B$를 정의합시다. 따라서 $h'(|a|_0) = h(|a|_0)$입니다.

그런데 B는 집합이므로, 임의의 $x : \|A\|_0$에 대하여 타입 $h(x) = h'(x)$는 단순 명제이며, 따라서 집합이기도 합니다. 그러므로 보조정리 6.9.1에 의해, 임의의 $a : A$에 대하여 $h'(|a|_0) = h(|a|_0)$라는 관찰로부터 임의의 $x : \|A\|_0$에 대하여 $h(x) = h'(x)$가 따라 나오며, 따라서 $h = h'$입니다. □

예를 들어, 이를 이용하면 집합들의 쌍대극한을 구성할 수 있습니다. $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$가 집합들의 스팬이면, 푸시아웃 $A \sqcup^C B$는 더 이상 집합이 아닐 수도 있음을 이미 보았습니다. (예를 들어, A와 B가 $\mathbf{1}$이고 C가 $\mathbf{2}$이면, 푸시아웃은 $\mathbb{S}^1$입니다.) 그러나 절단을 통해, 집합이면서 다른 집합들에 대하여 기대한 보편 성질을 갖는 푸시아웃을 구성할 수 있습니다.

보조정리 6.9.3. $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$를 집합들의 스팬이라고 합시다. 그러면 임의의 집합 E에 대하여 다음과 같은 표준적인 동치가 존재합니다.

$$\left(\left\|A \sqcup^C B\right\|_0 \to E\right) \simeq \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E).$$

증명. 보조정리 6.8.2 및 6.9.2의 동치들을 합성하십시오. □

(호모토피) 푸시아웃 $A \sqcup^C B$와 구별하기 위해, $\left\|A \sqcup^C B\right\|_0$를 f와 g의 **집합 푸시아웃** 이라고 부릅니다. 또는 §6.8의 푸시아웃 정의를 수정하여 0-절단 생성자를 직접 포함하게 함으로써, 나중에 절단할 필요를 없앨 수도 있습니다. 비슷한 논의가 집합들의 모든 종류의 쌍대극한에 적용되며, 이에 대해서는 제10장에서 더 살펴보겠습니다.

그러나 위의 0-절단 정의는 잘 작동하지만 — 우리가 원하는 것을 주며 무모순입니다 — 몇 가지 문제가 있습니다. 첫째, 고차 귀납적 타입의 일반 이론에 그다지 잘 들어맞지 않습니다. 일반적으로, $\|A\|_0$에 대해 우리가 제시한 두 번째 생성자처럼 입력에 정의 중인 타입의 원소뿐 아니라 그 안의 경로까지 포함되는 생성자를 직접 다루기는 까다롭습니다.

그러나 이 문제는 꽤 쉽게 우회할 수 있습니다. §5.1에서, 귀납적 타입 W의 생성자가 $\mathbb{N} \to W$ 타입의 인수 하나를 받게 함으로써 W 타입의 "무한히 많은 인수"를 받도록 허용할 수 있다고 언급했던 것을 상기하십시오. 여기에는 일반적인 원리가 있습니다. 이상하게 생긴 입력을 갖는 생성자를 모형화하려면, 보조 귀납적 타입(예를 들어 $\mathbb{N}$)을 사용하여 그 입력들을 매개화함으로써, 입력을 귀납적 정의역을 갖는 단순한 함수로 환원하십시오.

0-절단의 경우, 두 점 $a, b : S$와 두 경로 $p, q : a = b$로 생성되는 보조 고차 귀납적 타입 S를 생각할 수 있습니다. 그러면 $\|A\|_0$의 수상쩍어 보이는 생성자를 다음과 같은 문제없는 생성자로 대체할 수 있습니다.

- 모든 $f : S \to \|A\|_0$에 대하여, 경로 $\mathsf{ap}_f(p) = \mathsf{ap}_f(q)$.

S에서 나가는 사상을 주는 것은 두 점과 그 사이의 두 평행한 경로를 주는 것과 같으므로, 이로부터 같은 귀납 원리가 얻어집니다.

그러나 현재의 0-절단 정의가 갖는 더 심각한 문제는 그다지 잘 일반화되지 않는다는 점입니다. 모든 $n : \mathbb{N}$에 대하여 n-타입으로의 "n-절단"의 정의 개념을 일률적으로 기술하고자 한다면, 두 번째 생성자에 필요한 인수의 개수가 n에 따라 증가하므로 이 접근법은 실현 불가능합니다. 따라서 §7.3에서는 위에서 도입한 타입 S가 원 $\mathbb{S}^1$과 동치라는 관찰에 기초한 다른 아이디어를 사용하여 이것들을 구성하겠습니다. 이 방법은 0-절단을 특수한 경우로 포함하며, 보조정리 6.9.1 및 6.9.2의 일반화된 형태를 만족합니다.

6.10 몫

집합의 쌍대극한 중 특히 중요한 것은 관계에 의한 몫입니다. 즉, A를 집합이라 하고 $R : A \times A \to \mathsf{Prop}$를 단순 명제의 족(**단순 관계**)이라고 합시다. 그 몫은 다음 두 사영의 집합-쌍대동등자여야 합니다.

$$\textstyle\sum_{(a,b:A)} R(a,b) \rightrightarrows A.$$

이것을 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입 A/R로 직접 기술할 수도 있습니다.

- 함수 $q : A \to A/R$;
- $R(a,b)$인 각 $a, b : A$에 대하여, 등식 $q(a) = q(b)$; 그리고
- 0-절단 생성자: 모든 $x, y : A/R$와 $r, s : x = y$에 대해 $r = s$가 성립합니다.

이 고차 귀납적 타입 A/R이 정의상 집합을 만들어 낸다는 점을 강조하기 위해, 이를 A를 R로 나눈 **집합 몫**이라고 부르기도 하겠습니다. (호모토피 이론에는 더 일반적인 "몫" 개념들이 있지만, 이들은 대부분 이 책의 범위를 벗어납니다. 다만 §9.9에서는 타입을 1-그루포이드로 나눈 "몫"을 다룰 것이며, 이는 집합 몫보다 한 단계 높은 수준에 해당합니다.)

주 6.10.1. 사실 집합 몫을 정의하거나 그 성질 대부분을 얻는 데 A가 집합일 필요는 없습니다. 그러나 일반적으로 가장 관심을 두는 것은 이 경우입니다.

보조정리 6.10.2. 함수 $q : A \to A/R$은 전사입니다.

증명. 임의의 $x : A/R$에 대해 $q(a) = x$인 $a : A$가 단순히 존재함을 보여야 합니다. A/R의 귀납 원리를 사용합니다. 첫 번째 경우는 자명합니다. x가 $q(a)$이면, 물론 $q(a) = q(a)$인 a가 단순히 존재합니다. 또한 목표가 단순 명제이므로 모든 경로 생성자를 자동으로 존중하며, 따라서 증명이 끝납니다. □

이제 집합 몫이 (집합) 쌍대동등자에 기대되는 보편 성질을 가진다는 것을 증명할 수 있습니다.

보조정리 6.10.3. 임의의 집합 B에 대해, q를 앞에 합성하면 다음 동치를 얻습니다

$$(A/R \to B) \;\simeq\; \Big(\sum_{(f:A\to B)} \prod_{(a,b:A)} R(a,b) \to (f(a) = f(b))\Big).$$

증명. 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 $- \circ q$의 준역원은 바로 A/R의 재귀 원리입니다. 즉, $\prod_{(a,b:A)} R(a,b) \to (f(a) = f(b))$,를 만족하는 $f : A \to B$가 주어지면, $\bar{f} : A/R \to B$를 $\bar{f}(q(a)) :\equiv f(a)$로 정의합니다. 이 정의 등식은 정확히 $(f \mapsto \bar{f})$가 $(- \circ q)$의 오른쪽 역이라는 것을 말해 줍니다.

이것이 왼쪽 역이기도 하려면, 임의의 $g : A/R \to B$와 $x : A/R$에 대해 $g(x) = \overline{g \circ q}(x)$임을 보여야 합니다. 그런데 보조정리 6.10.2에 의해 $q(a) = x$인 a가 단순히 존재합니다. 원하는 등식이 단순 명제이므로 그러한 a가 순수하게 존재한다고 가정해도 되며, 이 경우 $g(x) = g(q(a)) = \overline{g \circ q}(q(a)) = \overline{g \circ q}(x)$입니다. □

물론 고전적으로 흔히 고려하는 경우는 R이 **동치 관계**인 경우, 즉 다음이 성립하는 경우입니다

- **반사성**: $\prod_{(a:A)} R(a,a)$,
- **대칭성**: $\prod_{(a,b:A)} R(a,b) \to R(b,a)$, 그리고
- **추이성**: $\prod_{(a,b,c:C)} R(a,b) \times R(b,c) \to R(a,c)$.

이 경우 §10.1에서 보겠지만 집합 몫 A/R은 추가로 좋은 성질들을 가집니다. 예를 들어 $R(a,b) \simeq (q(a) =_{A/R} q(b))$가 성립합니다. 동치 관계 $R(a,b)$는 흔히 중위 표기법으로 $a \sim b$와 같이 씁니다.

동치 관계에 의한 몫은 다른 방법으로도 구성할 수 있습니다. 집합론적 접근법은 동치류들의 집합을 A의 멱집합의 부분집합으로 고려하는 것입니다. 타입 이론에서도 이 "비서술적" 구성을 흉내 낼 수 있습니다.

정의 6.10.4. 술어 $P : A \to \mathsf{Prop}$가 관계 $R : A \times A \to \mathsf{Prop}$의 **동치류** 라는 것은, 모든 $b : A$에 대해 $R(a,b) \simeq P(b)$가 성립하는 $a : A$가 단순히 존재한다는 것입니다.

R과 P는 단순 명제이므로, 동치 $R(a,b) \simeq P(b)$는 함의 $R(a,b) \to P(b)$와 $P(b) \to R(a,b)$가 성립하는 것과 같습니다. 그리고 물론 임의의 $a : A$에 대해 표준적인 동치류 $P_a(b) :\equiv R(a,b)$가 있습니다.

정의 6.10.5. 다음과 같이 정의합니다

$$A /\!\!/ R :\equiv \left\{ P : A \to \mathsf{Prop} \;\middle|\; P\text{의 동치류입니다}R \right\}.$$

함수 $q' : A \to A /\!\!/ R$은 $q'(a) :\equiv P_a$로 정의됩니다.

정리 6.10.6. A 위의 임의의 동치 관계 R에 대해, 타입 $A /\!\!/ R$은 집합 몫 A/R과 동치입니다.

증명. 먼저, $R(a,b)$이면 R이 동치 관계이므로 임의의 $c : A$에 대해 $R(a,c) \Leftrightarrow R(b,c)$가 성립함에 주목하십시오. 따라서 유니밸런스에 의해 $R(a,c) = R(b,c)$이고, 그러므로 함수 외연성에 의해 $P_a = P_b$, 즉 $q'(a) = q'(b)$입니다. 따라서 보조정리 6.10.3에 의해 $f \circ q = q'$인 유도된 사상 $f : A/R \to A /\!\!/ R$이 존재합니다.

f가 단사이자 전사이며, 따라서 동치임을 보이겠습니다. 전사성은 q'가 전사라는 사실에서 곧바로 따라 나오며, 이 사실은 본질적으로 $A /\!\!/ R$의 정의에 의해 성립합니다. 단사성의 경우, $f(x) = f(y)$이면 단순 명제 $x = y$를 보이기 위해 q의 전사성에 의해 어떤 $a, b : A$에 대해 $x = q(a)$이고 $y = q(b)$라고 가정해도 됩니다. 그러면 임의의 $c : A$에 대해 $R(a,c) = f(q(a))(c) = f(q(b))(c) = R(b,c)$이고, 특히 $R(a,b) = R(b,b)$입니다. 그런데 R이 동치 관계이므로 $R(b,b)$는 원소를 가지며, 따라서 $R(a,b)$도 원소를 가집니다. 그러므로 $q(a) = q(b)$이고, 따라서 $x = y$입니다. □

§10.1.3에서 이 정리의 다른 증명을 제시할 것입니다. A/R와 달리 구성 $A /\!\!/ R$는 유니버스 레벨을 높인다는 점에 유의하십시오. $A : \mathcal{U}_i$이고 $R : A \to A \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i}$이면, $A /\!\!/ R$의 정의에서 모든 동치류를 포함하기 위해 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i}$도 사용해야 하므로 $A /\!\!/ R : \mathcal{U}_{i+1}$이 됩니다. 물론 §3.5의 명제적 크기 재조정 공리를 가정하면 이를 피할 수 있습니다.

주 6.10.7. 앞의 두 구성은 일반적인 몫을 제공하지만, 특정한 경우에는 더 쉬운 구성이 있을 수 있습니다. 예를 들어 정수 $\mathbb{Z}$ 를 다음과 같은 집합 몫으로 정의할 수 있습니다

$$\mathbb{Z} :\equiv (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$$

여기서 $\sim$은 다음과 같이 정의되는 동치 관계입니다.

$$(a,b) \sim (c,d) :\equiv (a + d = b + c).$$

다시 말해, 쌍 (a,b)는 정수 $a - b$를 나타냅니다. 그러나 이 경우에는 동치류의 표준 대표원이 존재합니다. 바로 $(n,0)$ 또는 $(0,n)$ 꼴의 원소들입니다.

다음 보조정리는 이러한 상황이 일어날 때 몫의 두 가지 일반적인 구성 중 어느 것도 필요하지 않다는 것을 말해 줍니다. (함수 $r : A \to A$가 $r \circ r = r$을 만족하면 **멱등** 이라고 합니다.)

보조정리 6.10.8. $\sim$이 집합 A 위의 관계이고, 모든 $x, y : A$에 대하여 $(r(x) = r(y)) \simeq (x \sim y)$를 만족하는 멱등 함수 $r : A \to A$가 존재한다고 가정합시다. (이로부터 $\sim$이 동치 관계임이 따라 나옵니다.) 그러면 다음 타입은

$$(A/\sim) :\equiv \left(\sum_{x:A} r(x) = x\right)$$

A를 $\sim$로 나눈 집합 몫의 보편 성질을 만족하며, 따라서 그것과 동치입니다. 다시 말해, 모든 집합 B에 대하여 q와의 선합성이 다음 동치를 유도하는 사상 $q : A \to (A/\sim)$가 존재합니다.

$$\left((A/\sim) \to B\right) \simeq \left(\sum_{(g:A\to B)} \prod_{(x,y:A)} (x \sim y) \to (g(x) = g(y))\right). \tag{6.10.9}$$

증명. $i : \prod_{(x:A)} r(r(x)) = r(x)$가 r의 멱등성을 증명하는 증거라고 합시다. 사상 $q : A \to (A/\sim)$는 $q(x) :\equiv (r(x), i(x))$로 정의됩니다. A가 집합이므로 $q(x) = q(y)$는 $r(x) = r(y)$와 동치이고, 따라서 (가정에 의해) $x \sim y$와 동치라는 점에 유의하십시오. 식 (6.10.9)의 왼쪽에서 오른쪽으로 가는 사상 e를 다음과 같이 정의합니다.

$$e(f) :\equiv (f \circ q, _),$$

여기서 밑줄 _는 다음 증명을 나타냅니다. $x, y : A$이고 $x \sim y$이면, 위에서 관찰한 바와 같이 $q(x) = q(y)$이고, 따라서 $f(q(x)) = f(q(y))$입니다. e가 동치임을 보이기 위해, 다음과 같이 정의되는 반대 방향의 사상 e'을 생각합시다.

$$e'(g, s)(x, p) :\equiv g(x).$$

임의의 $f : (A/\sim) \to B$가 주어지면,

$$e'(e(f))(x, p) \equiv f(q(x)) \equiv f(r(x), i(x)) = f(x, p)$$

여기서 마지막 등식은 $p : r(x) = x$이고, A가 집합이므로 $(x, p) = (r(x), i(x))$이기 때문에 성립합니다. 마찬가지로 다음을 계산합니다.

$$e(e'(g, s)) \equiv e(g \circ \mathsf{pr}_1) \equiv (g \circ \mathsf{pr}_1 \circ q, _).$$

B가 집합이므로 _ 부분은 신경 쓸 필요가 없으며, 첫 번째 성분에 대해서는 다음이 성립합니다.

$$g(\mathsf{pr}_1(q(x))) \equiv g(r(x)) = g(x),$$

여기서 마지막 등식은 $r(x) \sim x$이고 가정 s에 의해 g가 $\sim$을 보존하기 때문에 성립합니다. □

따름정리 6.10.10. $p : A \to B$가 집합 사이의 수축이라고 가정합시다. 그러면 B는 다음과 같이 정의되는 동치 관계 $\sim$에 의한 A의 몫입니다.

$$(a_1 \sim a_2) :\equiv (p(a_1) = p(a_2)).$$

증명. $s : B \to A$가 p의 단면이라고 가정합시다. 그러면 $s \circ p : A \to A$는 이 $\sim$에 대하여 보조정리 6.10.8의 조건을 만족하는 멱등 함수이며, s는 B에서 그 고정점들의 집합으로 가는 동형사상을 유도합니다. □

주 6.10.11. 다음과 같이 정의되는 멱등 함수 $r : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$를 사용하면 보조정리 6.10.8를 $\mathbb{Z}$에 적용할 수 있습니다.

$$r(a, b) = \begin{cases} (a - b, 0) & a \geq b\text{인 경우,} \\ (0, b - a) & \text{그렇지 않은 경우.} \end{cases}$$

($\mathbb{N}$ 위의 관계 $\geq$가 결정 가능하므로, 이는 구성적으로도 타당한 정의입니다.) 따라서 $k, m : \mathbb{N}$에 대하여 음이 아닌 정수는 $(k, 0)$으로, 양이 아닌 정수는 $(0, m)$으로 표준적으로 표현됩니다. 이러한 경우 분할로부터 정수에 대한 다음의 "귀납 원리"가 따라 나오며, 이는 제8장에서 유용하게 쓰일 것입니다. (늘 그렇듯이, 자연수 n을 그에 대응하는 음이 아닌 정수, 즉 $\mathbb{Z}$에서 $(n, 0) : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$의 상과 동일시합니다.)

보조정리 6.10.12. $P : \mathbb{Z} \to \mathcal{U}$가 타입 족이고 다음이 주어졌다고 가정합시다.

- $d_0 : P(0)$,
- $d_+ : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}(n))$, 그리고
- $d_- : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(-n) \to P(-\mathsf{succ}(n))$.

그러면 다음을 만족하는 $f : \prod_{(z:\mathbb{Z})} P(z)$가 존재합니다.

- $f(0) = d_0$,
- 모든 $n : \mathbb{N}$에 대하여 $f(\mathsf{succ}(n)) = d_+(n, f(n))$, 그리고
- 모든 $n : \mathbb{N}$에 대하여 $f(-\mathsf{succ}(n)) = d_-(n, f(-n))$ 입니다.

증명. 이 증명에서는 $\mathbb{Z}$가 $\sum_{(x:\mathbb{N}\times\mathbb{N})}(r(x) = x)$를 나타낸다고 합시다. 여기서 r은 위의 멱등 함수입니다. (그런 다음 그 결과를 $\mathbb{Z}$의 임의의 동치인 정의로 수송할 수 있습니다.) $q : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$를 보조정리 6.10.8에서와 같이 $q(x) = (r(x), i(x))$로 정의되는 몫 사상이라고 합시다. 이제 $Q :\equiv P \circ q : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathcal{U}$로 정의합니다. 주어진 데이터를 적절한 등식을 따라 수송하면 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned} d'_0 &: Q(0,0) \\ d'_+ &: \prod_{n:\mathbb{N}} Q(n,0) \to Q(\mathsf{succ}(n),0) \\ d'_- &: \prod_{n:\mathbb{N}} Q(0,n) \to Q(0,\mathsf{succ}(n)). \end{aligned}$$

또한 $q(n,m) = q(\mathsf{succ}(n),\mathsf{succ}(m))$이므로 다음과 같이 유도된 동치가 있다는 점에 유의하십시오.

$$e_{n,m} : Q(n,m) \simeq Q(\mathsf{succ}(n),\mathsf{succ}(m)).$$

그러면 x에 대한 이중 귀납법으로 $g : \prod_{(x:\mathbb{N}\times\mathbb{N})} Q(x)$를 다음과 같이 구성할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} g(0,0) &:\equiv d'_0, \\ g(\mathsf{succ}(n),0) &:\equiv d'_+(n, g(n,0)), \\ g(0,\mathsf{succ}(m)) &:\equiv d'_-(m, g(0,m)), \\ g(\mathsf{succ}(n),\mathsf{succ}(m)) &:\equiv e_{n,m}(g(n,m)). \end{aligned}$$

이제 $q \circ \mathsf{pr}_1 = \mathsf{id}$라는 성질을 갖는 $\mathsf{pr}_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$이 있습니다. 따라서 특히 $Q \circ \mathsf{pr}_1 = P$이고, 그러므로 동치들의 족 $s : \prod_{(z:\mathbb{Z})} Q(\mathsf{pr}_1(z)) \simeq P(z)$가 존재합니다. 따라서 $f(z) = s(z, g(\mathsf{pr}_1(z)))$로 정의하여 $f : \prod_{(z:\mathbb{Z})} P(z)$를 얻고, 원하는 등식들을 확인할 수 있습니다. □

때때로 보조정리 6.10.12에서 얻은 함수 $f : \prod_{(z:\mathbb{Z})} P(z)$를 세 가지 경우 d_0, d_+, d_-를 포함하는 패턴 매칭 구문으로 다음과 같이 나타낼 것입니다:

$$\begin{aligned} f(0) &:= d_0 \\ f(\mathsf{succ}(n)) &:= d_+(n, f(n)) \\ f(-\mathsf{succ}(n)) &:= d_-(n, f(-n)) \end{aligned}$$

고차 귀납적 타입의 경로 생성자에서 그랬던 것처럼, 보조정리 6.10.12이 함의하는 "계산" 규칙이 명제적 등식일 뿐임을 나타내기 위해 $:\equiv$ 대신 $:=$를 사용합니다. 예를 들어 이런 방식으로 임의의 정수 n에 대해 루프의 n겹 이어붙이기를 정의할 수 있습니다.

따름정리 6.10.13. A를 $a : A$와 $p : a = a$가 주어진 타입이라고 합시다. $n \mapsto p^n$으로 표기하는 함수 $\prod_{(n:\mathbb{Z})}(a = a)$가 존재하며, 이 함수는 다음과 같이 정의됩니다

$$\begin{aligned} p^0 &:= \mathsf{refl}_a \\ p^{n+1} &:= p^n \cdot p && n \geq 0\text{에 대하여} \\ p^{n-1} &:= p^n \cdot p^{-1} && n \leq 0\text{에 대하여.} \end{aligned}$$

정수에 대해서는 §§6.11 및 11.1에서 더 논의할 것입니다.

6.11 대수

고차 귀납적 타입은 구면이나 세포 복합체와 같은 고차원 대상을 구성하는 데 쓰일 뿐 아니라, 집합만 다룰 때에도 매우 유용합니다. 보조정리 6.9.3에서 이미 한 가지 예를 보았습니다. 고차 귀납적 타입을 사용하면 집합으로 이루어진 임의의 도식의 쌍대극한을 구성할 수 있는데, 이는 제1장의 기본 타입 이론에서는 불가능합니다. 고차 귀납적 타입은 대수적 구조를 갖춘 집합을 연구할 때에도 매우 유용합니다.

이 절에서 계속 사용할 예로 군을 살펴봅니다. 군은 대부분의 수학자에게 익숙하고 본질적인 현상을 잘 드러내며, 이후 장들에서도 필요합니다. 그러나 여기서 설명하는 내용의 대부분은 어떤 종류의 대수적 구조에도 똑같이 적용됩니다.

정의 6.11.1. **모노이드** 는 집합 G에 다음을 함께 갖춘 것입니다

- 중위 표기법으로 $(x,y) \mapsto x \cdot y$라고 쓰는 곱셈 함수 $G \times G \to G$, 그리고
- 단위 원소 $e : G$. 이들은 다음을 만족합니다.
- 임의의 $x : G$에 대해 $x \cdot e = x$와 $e \cdot x = x$가 성립합니다. 그리고
- 임의의 $x, y, z : G$에 대해 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$가 성립합니다.

군 은 모노이드 G에 다음을 함께 갖춘 것입니다

- $x \mapsto x^{-1}$로 쓰는 역원 함수 $i : G \to G$이며, 이 함수는 다음을 만족합니다
- 임의의 $x : G$에 대해 $x \cdot x^{-1} = e$와 $x^{-1} \cdot x = e$가 성립합니다.

주 6.11.2. 군은 집합이어야 한다는 점에 유의하십시오. 집합이 아닌 "∞-군"이라는 더 일반적인 개념을 생각할 수도 있지만, 그렇게 하면 지금 다루기에 적절한 범위를 넘어서게 됩니다. 현재의 정의를 따르면, 그 결과로 얻는 "군론"은 집합론적 수학에서와 비슷하게 동작할 것으로 기대할 수 있습니다 (단, LEM 을 가정하지 않는 한 이는 "구성적" 군론이 됩니다).

예 6.11.3. 자연수 $\mathbb{N}$ 은 덧셈에 대해 단위원이 0인 모노이드이며, 곱셈에 대해서도 단위원이 1인 모노이드입니다. 정수 $\mathbb{Z}$ 위의 산술 연산을 자명한 방식으로 정의하면, 늘 그렇듯이 정수는 덧셈에 대해 군이고 곱셈에 대해 모노이드입니다(그리고 물론 환입니다). 예를 들어, $u, v \in \mathbb{Z}$가 각각 (a,b)와 (c,d)로 표현된다면, $u+v$는 $(a+c, b+d)$로, $-u$는 (b,a)로, uv는 $(ac+bd, ad+bc)$로 표현됩니다.

예 6.11.4. §2.1에서 사실상 살펴보았듯이, (A,a)가 점을 가진 타입이면 그 루프 공간 $\Omega(A,a) :\equiv (a =_A a)$는 일반적으로 집합이 아니라는 점을 제외하면 군의 모든 구조를 갖추고 있습니다. 이는 주 6.11.2에서 언급한 의미의 "∞-군"이어야 하지만, 절단을 통해 군으로 만들 수도 있습니다. 구체적으로, $a : A$를 기점으로 하는 A의 **기본군** 을 다음과 같이 정의합니다

$$\pi_1(A,a) :\equiv \|\Omega(A,a)\|_0.$$

이것은 군 구조를 물려받습니다. 예를 들어 곱셈 $\pi_1(A,a) \times \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a)$는 경로의 이어붙이기로부터 절단에 대한 이중 귀납으로 정의됩니다.

더 일반적으로, (A,a)의 n^{th} **호모토피 군** 은 $\pi_n(A,a) :\equiv \|\Omega^n(A,a)\|_0$입니다. 그러면 $n \geq 1$일 때 $\pi_n(A,a) = \pi_1(\Omega^{n-1}(A,a))$이므로, 이것 역시 군입니다. ($n = 0$일 때는 $\pi_0(A) \equiv \|A\|_0$이며, 이것은 군이 아닙니다.) 더욱이 Eckmann–Hilton 논증 (정리 2.1.6)에 의해 $n \geq 2$이면 $\pi_n(A,a)$는 아벨 군입니다. 즉, 모든 x, y에 대해 $x \cdot y = y \cdot x$가 성립합니다. 제8장에서는 주로 이러한 군들을 연구할 것입니다.

군론에서 중요한 개념 중 하나는 집합으로 생성되는 자유군, 더 일반적으로는 생성원과 관계로 표시되는 군이라는 개념입니다. 타입 이론에서는 일부 자유 대수적 대상을 일반적인 귀납적 타입을 사용해 정의할 수 있다는 사실이 잘 알려져 있습니다. 예를 들어, 집합 A 위의 자유 모노이드는 A의 원소들로 이루어진 유한 리스트 의 타입 $\mathsf{List}(A)$와 동일시할 수 있으며, 이 타입은 다음에 의해 귀납적으로 생성됩니다

- 생성자 $\mathsf{nil} : \mathsf{List}(A)$, 그리고
- 각 $\ell : \mathsf{List}(A)$와 $a : A$에 대한 원소 $\mathsf{cons}(a, \ell) : \mathsf{List}(A)$.

$a \mapsto \mathsf{cons}(a, \mathsf{nil})$로 정의되는 자명한 포함 $\eta : A \to \mathsf{List}(A)$가 있습니다. $\mathsf{List}(A)$ 위의 모노이드 연산은 이어붙이기이며, 다음과 같이 재귀적으로 정의됩니다.

$$\mathsf{nil} \cdot \ell :\equiv \ell$$
$$\mathsf{cons}(a, \ell_1) \cdot \ell_2 :\equiv \mathsf{cons}(a, \ell_1 \cdot \ell_2).$$

$\mathsf{List}(A)$의 귀납 원리를 사용하면 $\mathsf{List}(A)$가 집합이고, 리스트의 이어붙이기가 결합적이며 nil을 단위로 가진다는 것을 쉽게 증명할 수 있습니다. 따라서 $\mathsf{List}(A)$는 모노이드입니다.

보조정리 6.11.5. 임의의 집합 A에 대해 타입 $\mathsf{List}(A)$는 A 위의 자유 모노이드입니다. 다시 말해, 임의의 모노이드 G에 대해 η와의 합성은 다음과 같은 동치입니다.

$$\hom_{\mathrm{Monoid}}(\mathsf{List}(A), G) \simeq (A \to G),$$

여기서 $\hom_{\mathrm{Monoid}}(-,-)$는 모노이드 준동형사상(곱셈과 단위원을 보존하는 함수)들의 집합을 나타냅니다.

증명. $f : A \to G$가 주어지면 $\bar{f} : \mathsf{List}(A) \to G$를 다음과 같이 재귀로 정의합니다.

$$\bar{f}(\mathsf{nil}) :\equiv e$$
$$\bar{f}(\mathsf{cons}(a, \ell)) :\equiv f(a) \cdot \bar{f}(\ell).$$

$\bar{f}$가 모노이드 준동형사상이고 $f \mapsto \bar{f}$가 $(- \circ \eta)$의 준역원이라는 것은 귀납법으로 쉽게 증명할 수 있습니다. 연습문제 6.8를 참조하십시오. □

자유 모노이드를 이렇게 구성할 수 있는 것은 본질적으로 자유 모노이드의 원소들이 계산 가능한 표준형(즉, 유한 리스트)을 가지기 때문입니다. 그러나 군과 같은 다른 자유(및 표시된) 대수적 구조의 원소들은 일반적으로 계산 가능한 표준형을 가지지 않습니다. 예를 들어, 군 표시에서 단어들이 같은지는 알고리즘적으로 결정 불가능합니다. 그럼에도 모든 공리적 등식을 경로 생성자로 단언하기만 하면 자유 대수적 대상을 여전히 고차 귀납적 타입으로 기술할 수 있습니다.

예를 들어, A를 집합이라 하고 다음 생성자들을 갖는 고차 귀납적 타입 $F(A)$를 정의합시다.

- 함수 $\eta : A \to F(A)$.
- 함수 $m : F(A) \times F(A) \to F(A)$.
- 원소 $e : F(A)$.
- 함수 $i : F(A) \to F(A)$.
- 각 $x, y, z : F(A)$에 대해, 등식 $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$.

- 각 $x : F(A)$에 대해, 등식 $m(x, e) = x$ 및 $m(e, x) = x$.
- 각 $x : F(A)$에 대해, 등식 $m(x, i(x)) = e$ 및 $m(i(x), x) = e$.
- 0-절단 생성자: 임의의 $x, y : F(A)$와 $p, q : x = y$에 대해 $p = q$가 성립합니다.

첫 번째 생성자는 A가 $F(A)$로 사상됨을 말합니다. 다음 세 생성자는 $F(A)$에 군의 연산, 즉 곱셈, 항등원소, 역을 부여합니다. 그다음 세 생성자는 군의 공리, 즉 결합, 단위성, 역을 주장합니다. 마지막으로, 마지막 생성자는 $F(A)$가 집합임을 주장합니다.

따라서 $F(A)$는 군입니다. 또한 다음도 쉽게 증명할 수 있습니다.

정리 6.11.6. $F(A)$는 A 위의 자유군입니다. 다시 말해, 임의의 (집합인) 군 G에 대해 $\eta : A \to F(A)$와의 합성은 다음과 같은 동치를 결정합니다.

$$\hom_{\mathrm{Group}}(F(A), G) \simeq (A \to G)$$

여기서 $\hom_{\mathrm{Group}}(-, -)$는 두 군 사이의 군 준동형사상들의 집합을 나타냅니다.

증명. 고차 귀납적 타입 $F(A)$의 재귀 원리가 말하는 것은 정확히 G가 군이고 $f : A \to G$가 주어지면 $\bar{f} : F(A) \to G$를 얻는다는 것입니다. 그 계산 규칙은 $\bar{f} \circ \eta \equiv f$이며 $\bar{f}$가 군 준동형사상임을 말합니다. 따라서 $(- \circ \eta) : \hom_{\mathrm{Group}}(F(A), G) \to (A \to G)$는 오른쪽 역함수를 가집니다. $F(A)$의 귀납 원리를 사용하면 이것이 왼쪽 역함수이기도 함을 쉽게 보일 수 있습니다. □

잠시 한발 물러서서 우리가 방금 한 일을 되짚어 볼 가치가 있습니다. 우리는 임의의 집합 위의 자유군을 명시적으로 구성하지 않고도 그것이 존재함을 증명하였습니다. 본질적으로 우리가 해야 했던 일은 그것이 만족해야 하는 보편 성질을 적는 것뿐이었습니다. 집합론에서는 수반 함자 정리와 같은 블랙박스에 호소하여 비슷한 결과를 얻을 수 있지만, 타입 이론은 이러한 구성을 수학의 기초 안에 내장합니다.

물론 자유 대수적 구조를 구체적으로 기술하는 것이 유용할 때도 있습니다. 자유군의 경우에는 목을 사용하여 그러한 기술을 제공할 수 있습니다. $\mathsf{List}(A + A)$를 생각해 봅시다. 여기서 $A + A$의 $\mathsf{inl}(a)$는 a로, $\mathsf{inr}(a)$는 $\hat{a}$로 씁니다(a의 형식적 역원을 나타내기 위한 표기입니다). $\mathsf{List}(A + A)$의 원소들은 A 위의 자유군에 대한 단어입니다.

정리 6.11.7. A를 집합이라 하고, $F'(A)$를 다음 관계들에 의한 $\mathsf{List}(A + A)$의 집합-몫이라 합시다.

$$(\dots, a_1, a_2, \widehat{a_2}, a_3, \dots) = (\dots, a_1, a_3, \dots)$$
$$(\dots, a_1, \widehat{a_2}, a_2, a_3, \dots) = (\dots, a_1, a_3, \dots).$$

그러면 $F'(A)$ 역시 집합 A 위의 자유군입니다.

증명. 먼저 $F'(A)$가 군임을 보이겠습니다. 우리는 $\mathsf{List}(A + A)$가 모노이드임을 보았습니다. 이제 이 모노이드 구조가 몫으로 내려간다고 주장합니다. $F'(A) \times F'(A) \to F'(A)$를 이중 몫 재귀로 정의합니다. 이를 위해서는 주어진 관계들로 생성된 동치 관계가 리스트의 이어붙이기에 의해 보존됨을 확인하는 것으로 충분합니다. 마찬가지로, 결합 법칙과 단위 법칙은 몫 귀납으로 증명합니다.

$F'(A)$에서 역원을 정의하기 위해, 먼저 리스트에 대한 재귀로 $\mathsf{reverse} : \mathsf{List}(B) \to \mathsf{List}(B)$를 정의합니다:

$$\mathsf{reverse}(\mathsf{nil}) :\equiv \mathsf{nil},$$
$$\mathsf{reverse}(\mathsf{cons}(b, \ell)) :\equiv \mathsf{reverse}(\ell) \cdot \mathsf{cons}(b, \mathsf{nil}).$$

이제 $i : F'(A) \to F'(A)$를 몫 재귀로 정의합니다. 이 함수는 리스트 $\ell : \mathsf{List}(A + A)$에 대해 A의 두 복사본을 서로 바꾸고 리스트를 뒤집는 방식으로 작용합니다. 이는 관계들을 보존하므로 몫으로 내려갑니다. 그리고 $x : F'(A)$에 대해 $i(x) \cdot x = e$임을 귀납법으로 증명할 수 있습니다. 먼저 몫 귀납법을 통해 x가 $\ell : \mathsf{List}(A + A)$에서 온다고 가정할 수 있으며, 그다음 리스트 귀납법을 적용할 수 있습니다. 몫 사상을 $q : \mathsf{List}(A + A) \to F'(A)$로 쓰면, 각 경우는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
i(q(\mathsf{nil})) \cdot q(\mathsf{nil}) &= q(\mathsf{nil}) \cdot q(\mathsf{nil}) \\
&= q(\mathsf{nil}) \\
i(q(\mathsf{cons}(a, \ell))) \cdot q(\mathsf{cons}(a, \ell)) &= i(q(\ell)) \cdot q(\mathsf{cons}(\hat{a}, \mathsf{nil})) \cdot q(\mathsf{cons}(a, \ell)) \\
&= i(q(\ell)) \cdot q(\mathsf{cons}(\hat{a}, \mathsf{cons}(a, \ell))) \\
&= i(q(\ell)) \cdot q(\ell) \\
&= q(\mathsf{nil}). && \text{(귀납 가설에 의해)}
\end{aligned}$$

(리스트의 이어붙이기의 거동 등에 관한, 상당히 자명한 여러 보조정리는 생략하였습니다.)

이로써 $F'(A)$가 군이라는 증명이 완료됩니다. 이제 G가 함수 $f : A \to G$를 가진 임의의 군이라면, $A + A \to G$를 A의 첫 번째 사본에서는 f로, 두 번째 사본에서는 f와 G의 역 사상의 합성으로 정의할 수 있습니다. 그러면 G가 모노이드라는 사실로부터 모노이드 준동형사상 $\mathsf{List}(A + A) \to G$를 얻습니다. 또한 G가 군이므로 이 사상은 관계들을 존중하며, 따라서 사상 $F'(A) \to G$로 내려갑니다. 이것이 군 준동형사상이며, A에 제한하면 f가 되는 유일한 군 준동형사상임을 증명하는 것은 간단합니다. □

A가 결정 가능한 상등을 가진다면(예를 들어 배중률을 가정하는 경우), $F'(A)$를 정의하는 몫은 보조정리 6.10.8에서와 같이 멱등 사상으로부터 얻을 수 있습니다. 앞서 말했듯이 단어는 단지 $\mathsf{List}(A + A)$의 원소일 뿐인데, 단어가 $(a, \hat{a})$ 또는 $(\hat{a}, a)$ 꼴의 인접한 쌍을 포함하지 않으면 그 단어를 **기약**이라고 정의합니다. A가 결정 가능한 상등을 가질 때, 단어의 **기약화**를 정의하는 것은 간단합니다. 이는 적절한 몫을 생성하는 멱등 사상입니다. 자세한 내용은 독자에게 맡깁니다.

결정 가능한 상등을 가지는 $A :\equiv \mathbf{1}$의 경우, 기약 단어는 전부 $\star$로만 이루어지거나 전부 $\hat{\star}$로만 이루어져야 합니다. 따라서 $\mathbf{1}$ 위의 자유군은 정수 $\mathbb{Z}$ 와 동치이며, 이때 0은 nil에, 양의 정수 n은 n개의 $\star$로 이루어진 기약 단어에, 음의 정수 $(-n)$은 n개의 $\hat{\star}$로 이루어진 기약 단어에 대응합니다. 물론 $\mathbb{Z}$ 가 $F(\mathbf{1})$의 보편 성질을 가진다는 것을 직접 보일 수도 있습니다.

주 6.11.8. $F(A)$와 $F'(A)$의 구성 및 이들의 보편 성질의 증명 어디에서도 A가 집합이라는 가정을 사용하지 않았습니다. 따라서 실제로 임의의 타입 위의 자유군을 구성할 수 있습니다. 보편 성질들을 비교하면 $F(A) \simeq F(\|A\|_0)$라는 결론을 얻습니다.

고차 귀납적 타입을 사용하여 대수적 대상의 쌍대극한을 구성할 수도 있습니다. 예를 들어 $f : G \to H$와 $g : G \to K$가 군 준동형사상이라고 합시다. 군의 범주에서 이들의 푸시아웃은 **융합 자유곱** $H *_G K$라고 불리며, 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 구성할 수 있습니다.

- 함수 $h : H \to H *_G K$와 $k : K \to H *_G K$.
- $F(A)$의 정의에서와 같은 군의 연산과 공리.
- h와 k가 군 준동형사상임을 단언하는 공리.
- $x : G$에 대해 $h(f(x)) = k(g(x))$.
- 0-절단 생성자.

한편, 이는 $\mathsf{List}(H+K)$를 다음 관계들로 나눈 집합 몫으로서 명시적으로 구성할 수도 있습니다:

$$\begin{aligned}
(\dots, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, x_1 \cdot x_2, \dots) && x_1, x_2 : H\text{에 대하여} \\
(\dots, y_1, y_2, \dots) &= (\dots, y_1 \cdot y_2, \dots) && y_1, y_2 : K\text{에 대하여} \\
(\dots, 1_G, \dots) &= (\dots, \dots) \\
(\dots, 1_H, \dots) &= (\dots, \dots) \\
(\dots, f(x), \dots) &= (\dots, g(x), \dots) && x : G\text{에 대하여.}
\end{aligned}$$

증명은 독자에게 맡깁니다. G가 자명군인 특수한 경우에는 마지막 관계가 불필요하며, 군 범주에서의 쌍대곱인 **자유곱** $H * K$를 얻습니다. (안타깝게도 이 표기법은 §6.8에서와 같은 타입의 조인 표기법과 충돌하지만, 대개 문맥으로 구별됩니다.)

표시로 정의되는 군은 쌍대극한의 특수한 경우로 볼 수 있다는 점에 유의하십시오. 집합(또는 더 일반적으로 타입) A와 함수 쌍 $R \rightrightarrows F(A)$가 주어졌다고 합시다. R을 "관계"의 타입으로 간주하며, 두 함수는 각 관계에 그 관계가 같다고 놓는 두 단어를 대응시킵니다. 예를 들어 표시 $\langle a \mid a^2 = e \rangle$에서는 $A :\equiv \mathbf{1}$이고 $R :\equiv \mathbf{1}$이며, 두 사상 $R \rightrightarrows F(A)$는 각각 리스트 (a, a)와 빈 리스트 nil을 골라냅니다. 그러면 자유군의 보편 성질에 의해 군 준동형사상의 쌍 $F(R) \rightrightarrows F(A)$를 얻습니다. 군의 범주에서 이들의 쌍대동등자는 푸시아웃과 똑같은 방식으로 구성할 수 있으며, 이것이 바로 이 표시에 의해 표시되는 군입니다.

이러한 종류의 구성은 모두 대수적 이론에만 적용된다는 점에 유의하십시오. 대수적 이론이란 그 공리가 주어진 시그니처의 변수, 상수, 연산을 언급하는 (전칭 양화된) 등식인 이론입니다. 이 구성들은 본질적으로 대수적인 이론이라 불리는 것, 즉 연산이 앞선 연산들 사이의 등식으로 지정되는 정의역 위에서 부분적으로 정의되는 이론에도 적용되도록 수정할 수 있습니다. 그러나 예를 들어 체의 이론에는 적용되지 않습니다. 체의 이론에서는 "역" 연산이 앞선 연산들 사이의 분리 $\#$로 지정되는 정의역 $\{\, x \mid x \# 0 \,\}$ 위에서 부분적으로 정의되기 때문입니다. 정리 11.2.4을 참조하십시오. 실제로 체의 범주에 시작 대상이 없다는 것은 잘 알려져 있습니다.

반면에 이러한 구성은 "연산"이 무한히 많은 입력을 받을 수 있는 무한항 대수적 이론에도 똑같이 잘 적용됩니다. 이러한 경우에는 선택 공리를 가정하지 않는 한 자유 대수나 대수의 쌍대극한을 단순한 몫으로 표시하는 방법이 존재하지 않을 수도 있습니다. 이는 고차 귀납적 타입이 구성적 타입 이론을 상당히 강화한다는 것을 의미하며(반드시 증명론적 강도의 측면에서가 아니라 실용적인 힘의 측면에서), 실제로 어떤 면에서는 (선택 공리 없는) 체르멜로–프렝켈 집합론보다 더 강력합니다 [Bla83].

6.12 평탄화 보조정리

제8장에서 보겠지만, 고차 귀납적 타입을 유니벌런스와 결합하면 놀라운 일들이 일어납니다. 이것이 일어나는 주된 방식은 다음과 같습니다. W가 고차 귀납적 타입이고 $\mathcal{U}$가 타입 유니버스라면, W의 재귀 원리를 사용하여 타입 족 $P : W \to \mathcal{U}$를 정의할 수 있습니다. 재귀 원리에서 W의 경로 생성자를 다루는 절에 이르면 $\mathcal{U}$ 안의 경로를 제공해야 하며, 바로 여기서 유니벌런스가 등장합니다.

예를 들어 타입 X와 자기 동치 $e : X \simeq X$가 있다고 합시다. 그러면 $\mathbb{S}^1$-재귀를 사용하여 타입 족 $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$를 정의할 수 있습니다:

$$P(\mathsf{base}) :\equiv X \qquad \text{그리고} \qquad P(\mathsf{loop}) := \mathsf{ua}(e).$$

따라서 타입 X는 기점 위에서의 P의 섬유 $P(\mathsf{base})$로 나타납니다. 자기 동치 e는 P 안에 조금 더 숨겨져 있지만, 다음 보조정리는 loop을 따라 수송함으로써 이를 추출할 수 있음을 말해 줍니다.

보조정리 6.12.1. $B : A \to \mathcal{U}$와 $x, y : A$가 주어지고, 경로 $p : x = y$와 $B(p) = \mathsf{ua}(e)$를 만족하는 동치 $e : B(x) \simeq B(y)$가 주어지면, 임의의 $u : B(x)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^B(p, u) = e(u).$$

증명. 보조정리 2.10.5를 적용하면 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned}\mathsf{transport}^B(p, u) &= \mathsf{idtoeqv}(B(p))(u)\\ &= \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{ua}(e))(u)\\ &= e(u).\end{aligned}$$

□

우리는 이전에도 재귀로 정의된 타입 족을 본 적이 있습니다. §§2.12 및 2.13에서 이를 사용하여 (일반적인) 귀납적 타입의 동일성 타입을 특징지었습니다. 제8장에서는 비슷한 아이디어를 사용하여 고차 귀납적 타입의 호모토피 군을 계산할 것입니다.

이 절에서는 이러한 종류의 타입 족에 관한 일반적인 보조정리를 설명하며, 이는 나중에 유용하게 쓰일 것입니다. 이를 **평탄화 보조정리**라고 부릅니다. 이 보조정리는 $P : W \to \mathcal{U}$가 위와 같이 재귀적으로 정의되면, 그 전체 공간 $\sum_{(x:W)} P(x)$가 "평탄화된" 고차 귀납적 타입과 동치라고 말하며, 이 고차 귀납적 타입의 생성자는 W의 생성자와 P의 정의로부터 도출할 수 있습니다. (범주론적 관점에서 $\sum_{(x:W)} P(x)$는 P의 "그로텐디크 구성"이며, 평탄화 보조정리는 그 보편 성질을 "느슨한 쌍대극한"으로서 표현합니다. 다만 호모토피 타입 이론의 타입(W와 같은)은 범주론적으로 ∞-그루포이드에 대응하므로(모든 경로가 가역이기 때문에), 이 경우 느슨한 쌍대극한은 유사 쌍대극한과 같습니다.)

여기서는 평탄화 보조정리의 한 가지 일반적인 경우를 증명합니다. 이 경우로부터 많은 특수한 경우가 곧바로 따라 나오며, 다른 경우를 증명하는 방법도 엿볼 수 있습니다. $A, B : \mathcal{U}$와 $f, g : B \to A$가 주어져 있고, 고차 귀납적 타입 W가 다음으로 생성된다고 가정합시다.

- $\mathsf{c} : A \to W$ 및
- $\mathsf{p} : \prod_{(b:B)}(\mathsf{c}(f(b)) =_W \mathsf{c}(g(b)))$.

따라서 W는 f와 g의 **(호모토피) 쌍대동등자**입니다. 이항 합(쌍대곱)과 의존 합(Σ-타입)을 사용하면, 흥미로운 비재귀적 고차 귀납적 타입의 상당수를 이 형태로 나타낼 수 있습니다. 모든 점 생성자는 타입 A에, 모든 경로 생성자는 타입 B에 한데 묶어야 합니다. 예를 들면 다음과 같습니다.

- 원 $\mathbb{S}^1$은 $A :\equiv \mathbf{1}$, $B :\equiv \mathbf{1}$로 두고 f와 g를 항등 함수로 두어 나타낼 수 있습니다.
- $j : X \to Y$와 $k : X \to Z$의 푸시아웃은 $A :\equiv Y + Z$와 $B :\equiv X$로 두고 $f :\equiv \mathsf{inl} \circ j$와 $g :\equiv \mathsf{inr} \circ k$로 잡아서 나타낼 수 있습니다.

이제 추가로 다음을 가정합시다.

- $C : A \to \mathcal{U}$는 A 위의 타입족이고,
- $D : \prod_{(b:B)} C(f(b)) \simeq C(g(b))$는 B 위의 동치족입니다.

타입 족 $P : W \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 재귀적으로 정의합니다.

$$\begin{aligned}P(\mathsf{c}(a)) &:\equiv C(a)\\ P(\mathsf{p}(b)) &:= \mathsf{ua}(D(b)).\end{aligned}$$

$\widetilde{W}$를 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입이라고 합시다.

- $\widetilde{\mathsf{c}} : \prod_{(a:A)} C(a) \to \widetilde{W}$ 및
- $\widetilde{\mathsf{p}} : \prod_{(b:B)} \prod_{(y:C(f(b)))} (\widetilde{\mathsf{c}}(f(b), y) =_{\widetilde{W}} \widetilde{\mathsf{c}}(g(b), D(b)(y)))$.

평탄화 보조정리는 다음과 같습니다.

보조정리 6.12.2 (평탄화 보조정리). 위의 상황에서 다음이 성립합니다.

$$\left(\sum_{x:W} P(x)\right) \simeq \widetilde{W}.$$

앞서 언급했듯이, 이 동치는 $\sum_{(x:W)} P(x)$의 보편 성질을 W 위의 P의 "느슨한 쌍대극한"으로서 표현하는 것으로 볼 수 있습니다. 또한 이는 고차 토포스를 특징짓는 쌍대극한의 안정성 및 하강 성질의 일부로 볼 수도 있습니다.

보조정리 6.12.2의 증명이 이 절의 나머지를 차지합니다. 이 증명은 다소 기술적이어서 처음 읽을 때는 건너뛰어도 됩니다. 그러나 이는 "증명 관련 수학"의 좋은 예이기도 하므로, 두 번째로 읽을 때는 살펴보기를 권합니다.

핵심 아이디어는 $\sum_{(x:W)} P(x)$가 $\widetilde{W}$와 같은 보편 성질을 가짐을 보이는 것입니다. 먼저 이 타입에 생성자 $\widetilde{\mathsf{c}}$와 $\widetilde{\mathsf{p}}$의 유사물이 갖추어져 있음을 보이겠습니다.

보조정리 6.12.3. 다음과 같은 함수들이 존재합니다.

- $\widetilde{\mathsf{c}}' : \prod_{(a:A)} C(a) \to \sum_{(x:W)} P(x)$ 및
- $\widetilde{\mathsf{p}}' : \prod_{(b:B)} \prod_{(y:C(f(b)))} \left(\widetilde{\mathsf{c}}'(f(b), y) =_{\sum_{(w:W)} P(w)} \widetilde{\mathsf{c}}'(g(b), D(b)(y))\right)$.

증명. 첫 번째는 쉽습니다. $\widetilde{\mathsf{c}}'(a, x) :\equiv (\mathsf{c}(a), x)$로 정의하고, 정의에 의해 $P(\mathsf{c}(a)) \equiv C(a)$임에 주목하십시오. 두 번째의 경우, $b : B$와 $y : C(f(b))$가 주어졌다고 합시다. 그러면 다음 등식을 제시해야 합니다.

$$(\mathsf{c}(f(b)), y) = (\mathsf{c}(g(b)), D(b)(y)).$$

$\mathsf{p}(b) : \mathsf{c}(f(b)) = \mathsf{c}(g(b))$가 있으므로, Σ-타입에서의 등식에 의해 등식 $\mathsf{p}(b)_*(y) = D(b)(y)$를 제시하는 것으로 충분합니다. 그런데 이는 P의 정의를 사용하면 보조정리 6.12.1로부터 따라 나옵니다. □

이제 다음 보조정리에 따르면, $\sum_{(w:W)} P(w)$ 위의 타입 족의 단면을 정의하려면 $\widetilde{W}$의 경우와 유사한 데이터를 제시하는 것으로 충분합니다.

보조정리 6.12.4. $Q : \left(\sum_{(x:W)} P(x)\right) \to \mathcal{U}$가 타입 족이고, 다음이 주어졌다고 가정합시다.

- $c : \prod_{(a:A)} \prod_{(x:C(a))} Q(\widetilde{\mathsf{c}}'(a, x))$ 그리고
- $p : \prod_{(b:B)} \prod_{(y:C(f(b)))} \left(\widetilde{\mathsf{p}}'(b, y)_*(c(f(b), y)) = c(g(b), D(b)(y))\right)$.

그러면 $k(\widetilde{\mathsf{c}}'(a, x)) \equiv c(a, x)$를 만족하는 $k : \prod_{(z:\sum_{(w:W)} P(w))} Q(z)$가 존재합니다.

증명. $w : W$와 $x : P(w)$가 주어졌다고 가정합시다. 우리는 원소 $k(w, x) : Q(w, x)$를 구성해야 합니다. w에 대한 귀납법에 의해 두 경우를 고려하는 것으로 충분합니다. $w \equiv \mathsf{c}(a)$일 때는 $x : C(a)$이므로, 원하는 대로 $c(a, x) : Q(\mathsf{c}(a), x)$를 얻습니다. (정의의 이 부분은 앞서 명시한 계산 규칙이 성립함도 보장합니다.)

이제 임의의 $b : B$에 대하여 이 정의가 $\mathsf{p}(b)$를 따른 수송에 의해 보존됨을 보여야 합니다. 우리가 모든 $w : W$에 대하여 정의하고 있는 것은 $\prod_{(x:P(w))} Q(w,x)$ 타입의 함수이므로, 보조정리 2.9.7에 의해 임의의 $y : C(f(b))$에 대하여 다음이 성립함을 보이는 것으로 충분합니다.

$$\mathsf{transport}^{Q}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), \mathsf{refl}_{\mathsf{p}(b)_*(y)}), c(f(b),y)) = c(g(b), \mathsf{p}(b)_*(y)).$$

$q : \mathsf{p}(b)_*(y) = D(b)(y)$를 보조정리 6.12.1에서 얻은 경로라고 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} c(g(b), \mathsf{p}(b)_*(y)) &= \mathsf{transport}^{x\mapsto Q(\widetilde{\mathsf{c}}'(g(b),x))}(q^{-1}, c(g(b), D(b)(y))) \quad (\mathsf{apd}_{x\mapsto c(g(b),x)}(q^{-1})^{-1} \text{에 의해}) \\ &= \mathsf{transport}^{Q}(\mathsf{ap}_{x\mapsto \widetilde{\mathsf{c}}'(g(b),x)}(q^{-1}), c(g(b), D(b)(y))). \quad (\text{보조정리 2.3.10에 의해}) \end{aligned}$$

따라서 다음을 보이는 것으로 충분합니다.

$$\mathsf{transport}^{Q}\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), \mathsf{refl}_{\mathsf{p}(b)_*(y)}),\ c(f(b),y)\Big) = \mathsf{transport}^{Q}\Big(\mathsf{ap}_{x\mapsto \widetilde{\mathsf{c}}'(g(b),x)}(q^{-1}),\ c(g(b), D(b)(y))\Big).$$

우변의 수송을 반대편으로 옮기고 두 수송을 합치면, 이는 다음과 동치입니다.

$$\mathsf{transport}^{Q}\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), \mathsf{refl}_{\mathsf{p}(b)_*(y)}) \cdot \mathsf{ap}_{x\mapsto \widetilde{\mathsf{c}}'(g(b),x)}(q),\ c(f(b),y)\Big) = c(g(b), D(b)(y)).$$

그런데 다음이 성립하므로,

$$\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), \mathsf{refl}_{\mathsf{p}(b)_*(y)}) \cdot \mathsf{ap}_{x\mapsto \widetilde{\mathsf{c}}'(g(b),x)}(q) = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), \mathsf{refl}_{\mathsf{p}(b)_*(y)}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}_{\mathsf{c}(g(b))}, q) = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), q) = \widetilde{\mathsf{p}}'(b,y)$$

다음 타입을 갖는 가정 $p(b,y)$에 의해 구성이 완료됩니다.

$$\mathsf{transport}^{Q}(\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y), c(f(b),y)) = c(g(b), D(b)(y)). \qquad \square$$

보조정리 6.12.4는 $\sum_{(w:W)} P(w)$에 $\widetilde{W}$와 거의 같은 귀납 원리를 부여합니다. 빠진 부분은 등식 $\mathsf{apd}_k(\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y)) = p(b,y)$입니다. 이를 증명하려면 보조정리 6.12.4의 증명을 분석해야 하는데, 이 증명은 물론 k의 정의입니다.

이는 가능할 것이지만, 실제로는 비의존 재귀 원리의 계산 규칙만 필요하다는 것이 밝혀집니다. 따라서 이제 재귀자의 좀 더 간단한 직접적 구성과 그 계산 규칙의 증명을 제시합니다.

보조정리 6.12.5. Q가 타입이고, 다음이 주어졌다고 가정합시다.

- $c : \prod_{(a:A)} C(a) \to Q$ 그리고
- $p : \prod_{(b:B)} \prod_{(y:C(f(b)))} \Big(c(f(b),y) =_Q c(g(b), D(b)(y))\Big)$.

그러면 $k(\widetilde{\mathsf{c}}'(a,x)) \equiv c(a,x)$를 만족하는 $k : \big(\sum_{(w:W)} P(w)\big) \to Q$가 존재합니다.

증명. 보조정리 6.12.4에서와 같이, $w : W$에 대한 귀납법으로 $k(w,x)$를 정의합니다. $w \equiv \mathsf{c}(a)$일 때는 $k(\mathsf{c}(a),x) :\equiv c(a,x)$로 정의합니다. 이제 보조정리 2.9.6에 의해, $b : B$와 $y : C(f(b))$에 대하여 다음 합성 경로를 고려하는 것으로 충분합니다.

$$\mathsf{transport}^{x\mapsto Q}(\mathsf{p}(b), c(f(b),y)) = c(g(b), \mathsf{transport}^{P}(\mathsf{p}(b),y)) \tag{6.12.6}$$

이는 다음 합성으로 정의됩니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{transport}^{x\mapsto Q}(\mathsf{p}(b), c(f(b),y)) &= c(f(b),y) && \text{(보조정리 2.3.5에 의해)}\\
&= c(g(b), D(b)(y)) && (p(b,y)\text{에 의해})\\
&= c(g(b), \mathsf{transport}^{P}(\mathsf{p}(b),y)). && \text{(보조정리 6.12.1에 의해)}
\end{aligned}$$

계산 규칙 $k(\widetilde{\mathsf{c}}'(a,x)) \equiv c(a,x)$는 앞에서와 같이 정의에 의해 성립합니다. □

두 번째 계산 규칙을 위해서는 다음 보조정리가 필요합니다.

보조정리 6.12.7. $Y : X \to \mathcal{U}$를 타입 족이라 하고, $k : (\sum_{(x:X)} Y(x)) \to Z$가 커리된 함수 $d : \prod_{(x:X)} Y(x) \to Z$에 대하여 $k(x,y) :\equiv d(x)(y)$로 성분별로 정의되었다고 합시다. 그러면 임의의 $s : x_1 =_X x_2$와, 경로 $r : s_*(y_1) = y_2$를 갖는 임의의 $y_1 : Y(x_1)$ 및 $y_2 : Y(x_2)$에 대하여, 다음 경로는

$$\mathsf{ap}_k(\mathsf{pair}^{=}(s,r)) : k(x_1,y_1) = k(x_2,y_2)$$

다음 합성과 같습니다.

$$\begin{aligned}
k(x_1,y_1) &\equiv d(x_1)(y_1)\\
&= \mathsf{transport}^{x\mapsto Z}(s, d(x_1)(y_1)) && ((\text{보조정리 } 2.3.5)^{-1}\text{에 의해})\\
&= \mathsf{transport}^{x\mapsto Z}(s, d(x_1)({s^{-1}}_*(s_*(y_1))))\\
&= \left(\mathsf{transport}^{x\mapsto (Y(x)\to Z)}(s, d(x_1))\right)(s_*(y_1)) && (\text{ (2.9.4)에 의해})\\
&= d(x_2)(s_*(y_1)) && (\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_d(s))(s_*(y_1)\text{에 의해})\\
&= d(x_2)(y_2) && (\mathsf{ap}_{d(x_2)}(r)\text{에 의해})\\
&\equiv k(x_2,y_2).
\end{aligned}$$

증명. s와 r에 대한 경로 귀납법을 적용하면, 두 등식 모두 반사성으로 환원됩니다. □

처음에는 보조정리 6.12.7의 진술이 이토록 복잡한데도 이렇게 간단히 증명된다는 점이 놀랍게 보일 수 있습니다. 진술이 복잡한 이유는 진술의 타입이 올바르도록 보장하기 위해서입니다. 즉, $\mathsf{ap}_k(\mathsf{pair}^{=}(s,r))$와 그것과 같다고 주장되는 합성 경로는 반드시 같은 시작점과 끝점을 가져야 합니다. 이를 해결하고 나면 증명은 경로 귀납법으로 쉽게 이루어집니다.

보조정리 6.12.8. 보조정리 6.12.5의 상황에서 $\mathsf{ap}_k(\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y)) = p(b,y)$가 성립합니다.

증명. $\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y) :\equiv \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{p}(b), q)$였음을 상기하십시오. 여기서 $q : \mathsf{p}(b)_*(y) = D(b)(y)$는 보조정리 6.12.1에서 온 것입니다. 따라서 k는 성분별로 정의되므로, 다음과 같이 두고 보조정리 6.12.7를 이용하여 $\mathsf{ap}_k(\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y))$를 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
x_1 &:\equiv \mathsf{c}(f(b)) & y_1 &:\equiv y\\
x_2 &:\equiv \mathsf{c}(g(b)) & y_2 &:\equiv D(b)(y)\\
s &:\equiv \mathsf{p}(b) & r &:\equiv q.
\end{aligned}$$

커리된 함수 $d : \prod_{(w:W)} P(w) \to Q$는 $w : W$에 대한 귀납법으로 정의되었습니다. 보조정리 6.12.7를 적용하려면 $\mathsf{ap}_{d(x_2)}(r)$와 $\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_d(s), s_*(y_1))$를 이해해야 합니다.

첫 번째의 경우, $d(\mathsf{c}(a), x) \equiv c(a, x)$이므로 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{ap}_{d(x_2)}(r) \equiv \mathsf{ap}_{c(g(b),-)}(q).$$

두 번째의 경우, W의 귀납 원리에 대한 계산 규칙에 따르면 $\mathsf{apd}_d(\mathsf{p}(b))$는 합성 (6.12.6)를 보조정리 2.9.6의 동치를 통해 옮긴 것과 같습니다. 따라서 보조정리 2.9.6에 주어진 계산 규칙에 의해 $\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_d(\mathsf{p}(b)), \mathsf{p}(b)_*(y))$는 다음 합성과 같습니다.

$$\begin{aligned}
\big(\mathsf{p}(b)_*(c(f(b),-))\big)(\mathsf{p}(b)_*(y)) &= \mathsf{p}(b)_*\Big(c(f(b), \mathsf{p}(b)^{-1}{}_*(\mathsf{p}(b)_*(y)))\Big) && (\text{(2.9.4)에 의해})\\
&= \mathsf{p}(b)_*(c(f(b), y)) \\
&= c(f(b), y) && (\text{보조정리 2.3.5에 의해})\\
&= c(g(b), D(b)(y)) && (p(b,y)\text{에 의해})\\
&= c(g(b), \mathsf{p}(b)_*(y)). && (\mathsf{ap}_{c(g(b),-)}(q)^{-1}\text{에 의해})
\end{aligned}$$

마지막으로, $\mathsf{ap}_{d(x_2)}(r)$와 $\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_d(s), s_*(y_1))$의 이 값들을 보조정리 6.12.7에 대입하면, 모든 경로가 쌍으로 상쇄되어 $p(b,y)$만 남는다는 것을 알 수 있습니다. □

이제 드디어 평탄화 보조정리를 증명할 준비가 되었습니다.

보조정리 6.12.2의 증명. $\widetilde{\mathsf{c}}'$와 $\widetilde{\mathsf{p}}'$를 입력 데이터로 하여 $\widetilde{W}$의 재귀 원리를 사용해 $h : \widetilde{W} \to \sum_{(w:W)} P(w)$를 정의합니다. 마찬가지로, $\widetilde{\mathsf{c}}$와 $\widetilde{\mathsf{p}}$를 입력 데이터로 하여 보조정리 6.12.5의 재귀 원리를 사용해 $k : (\sum_{(w:W)} P(w)) \to \widetilde{W}$를 정의합니다.

한편으로, 임의의 $z : \widetilde{W}$에 대해 $k(h(z)) = z$임을 보여야 합니다. z에 대한 귀납법에 의해 $\widetilde{W}$의 두 생성자를 고려하면 충분합니다. 그런데 다음이 성립합니다.

$$k(h(\widetilde{\mathsf{c}}(a,x))) \equiv k(\widetilde{\mathsf{c}}'(a,x)) \equiv \widetilde{\mathsf{c}}(a,x)$$

이는 정의에 의한 것이며, 마찬가지로 다음이 성립합니다.

$$k(h(\widetilde{\mathsf{p}}(b,y))) = k\big(\widetilde{\mathsf{p}}'(b,y)\big) = \widetilde{\mathsf{p}}(b,y)$$

이는 $\widetilde{W}$에 대한 명제적 계산 규칙과 보조정리 6.12.8를 사용한 것입니다.

다른 한편으로, 임의의 $z : \sum_{(w:W)} P(w)$에 대해 $h(k(z)) = z$임을 보여야 합니다. 그러나 이는 "$\sum_{(w:W)} P(w)$에 대한 귀납법"으로 보조정리 6.12.4를 사용하고 같은 계산 규칙들을 사용하면 되므로 본질적으로 동일합니다. □

6.13 고차 귀납적 정의의 일반적인 구문

§5.6에서는 제안된 "귀납적 정의"를 허용 가능하게 만드는 조건, 즉 생성자에서 그 타입의 모든 귀납적 출현이 "엄격하게 양성"이어야 한다는 조건을 논의했습니다. 이 절에서는 고차 귀납적 정의에 요구되는 추가 조건에 대해 이야기합니다. 유효한 고차 귀납적 정의에 대한 일반적인 구문적 기술을 찾는 것은 현재 연구가 진행 중인 분야이며, 지금까지 제안된 모든 해법은 다소 기술적인 성격을 띱니다. 따라서 여기서는 정확한 정의가 아닌 일반적인 설명만 제시합니다. 다행히도 이러한 경계 사례는 실제로는 결코 발생하지 않는 것으로 보입니다.

일반적인 귀납적 정의와 마찬가지로, 고차 귀납적 정의는 생성자들의 목록으로 명시되며, 각 생성자는 (의존) 함수입니다. 단순화를 위해, 각 생성자의 입력이 일반적인 귀납적 타입의 생성자 입력과 같은 조건을 만족하도록 요구할 수 있습니다. 특히, 입력은 정의되는 타입을 엄격하게 양성적으로만 포함할 수 있습니다. 이는 §6.9에서 제시된 0-절단과 같은 정의를 배제한다는 점에 유의하십시오. 그 정의에서는 생성자의 입력이 정의되는 귀납적 타입뿐 아니라 그것의 동일성 타입까지 포함합니다. 이러한 정의를 허용하도록 구문을 확장하는 것이 가능할 수도 있습니다. 한편 §7.3에서는 생성자들이 더 제한적인 조건을 실제로 만족하는 0-절단의 다른 구성을 제시할 것입니다.

그렇다면 일반적인 귀납적 정의와 고차 귀납적 정의의 유일한 차이점은, 생성자의 출력 타입이 정의되는 타입(예를 들어 W)이 아니라 $u =_W v$와 같은 그것의 어떤 동일성 타입, 또는 더 일반적으로 $p =_{(u=_W v)} q$와 같은 반복된 동일성 타입일 수 있다는 점입니다. 따라서 고차 귀납적 정의를 제시할 때에는 각 생성자의 입력뿐 아니라, 구성되는 경로의 시작점과 끝점을 결정하는 표현식 u와 v(또는 u, v, p, q 등) 도 명시해야 합니다.

중요한 점은 이러한 표현식이 W의 다른 생성자를 참조할 수 있다는 것입니다. 예를 들어, $\mathbb{S}^1$의 정의에서 생성자 loop의 u와 v는 모두 앞선 생성자인 base입니다. 이것이 의미를 갖도록, 고차 귀납적 타입의 생성자들을 순서대로 명시하도록 요구하며, 각 생성자의 시작점 및 끝점 표현식 u와 v가 앞선 생성자는 참조할 수 있지만 뒤에 오는 생성자는 참조할 수 없도록 합니다. (물론 실제로는 어떤 귀납적 정의의 생성자든 어떤 순서로 적히지만, 일반적인 귀납적 타입에서는 그 순서가 무관합니다.)

이 순서가 반드시 "차원"의 순서인 것은 아니라는 점에 유의하십시오. 원칙적으로 1차원 경로 생성자가 2차원 경로 생성자를 참조할 수 있으며, 그렇다면 그 뒤에 와야 합니다. 그러나 0차원 생성자(점 생성자)에는 앞선 생성자를 참조할 방법을 전혀 부여하지 않았으므로, 이들은 모두 맨 앞에 두어도 무방합니다. 그리고 허브-스포크 구성(§6.7)을 사용하여 모든 생성자를 점과 1-경로로 환원한다면, 모든 점 생성자가 먼저 오고 그 뒤에 모든 1-경로 생성자가 온다고 가정할 수 있습니다 — 그러나 1-경로 생성자들 사이의 순서는 여전히 중요합니다.

남은 질문은 u와 v가 어떤 종류의 표현식일 수 있느냐는 것입니다. 이들이 앞선 생성자들을 포함하는 표현식이라면 무엇이든 될 수 있기를 기대할 수도 있습니다. 그러나 다음 예는 이 생각에 대한 단순한 접근이 통하지 않음을 보여 줍니다.

예 6.13.1. 함수족 $f : \prod_{(X:\mathcal{U})}(X \to X)$를 생각해 봅시다. 물론 모든 X에 대해 f_X가 단지 id_X일 수도 있지만, 그 밖의 이러한 f들도 존재할 수 있습니다. 예를 들어, $f_{\mathbf{2}} : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$이 항등이 아닌 자기동형사상이 되는 것을 막는 것은 아무것도 없습니다(연습문제 6.9 참조).

이제 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입 K를 정의하려 한다고 가정해 봅시다:

- 두 원소 $a, b : K$, 그리고
- 경로 $\sigma : f_K(a) = f_K(b)$.

K에 대한 귀납 원리는 무엇이라고 말하겠습니까? 타입 족 $P : K \to \mathcal{U}$를 가정하고, 물론 $x : P(a)$와 $y : P(b)$가 필요할 것입니다. 나머지 자료는 σ 위에 놓인 P 안의 의존 경로여야 하며, 따라서 이 경로는 $P(f_K(a))$의 어떤 원소와 $P(f_K(b))$의 어떤 원소를 연결해야 합니다. 그러나 이 원소들은 대체 무엇일 수 있겠습니까? $P(a)$와 $P(b)$에 각각 x와 y라는 원소가 있다는 것은 알지만, 이것으로는 $P(f_K(a))$와 $P(f_K(b))$에 대해 아무것도 알 수 없습니다.

정의가 타당하려면 u와 v에 어떤 조건이 필요하다는 것은 분명합니다. 각 생성자의 정의역이 (여러 조건 가운데 특히) 공변 함자여야 하는 것과 마찬가지로, 표현식 u와 v에 대한 적절한 조건은 이들이 자연 변환을 정의해야 한다는 것으로 보입니다. 이 요구 조건을 엄밀하게 규정하는 일은 이 책의 범위를 벗어나지만, 비형식적으로 말하면 u와 v에는 타입 사이의 모든 함수가 보존하는 연산만 포함되어야 한다는 뜻입니다.

예를 들어 §6.6에서 다룬 토러스의 마지막 생성자처럼 u와 v가 경로의 이어붙이기를 참조하는 것은 허용됩니다. 타입 이론의 모든 함수는 경로 이어붙이기를 (호모토피 차이를 무시하면) 보존하기 때문입니다. 그러나 예 6.13.1의 함수 f처럼 반드시 자연적이지는 않은 연산을 참조하는 것은 허용되지 않습니다. 즉, $f_Y \circ g \neq g \circ f_X$인 함수 $g : X \to Y$가 존재할 수도 있습니다. (유니밸런스는 f_X가 모든 동치에 대해서는 자연적이어야 함을 함의하지만, 동치가 아닌 함수에 대해서까지 반드시 자연적이어야 함을 함의하지는 않습니다.)

자연성이라는 직관은 고차 귀납적 정의가 언제 허용되는지에 대한 대략적인 지침만을 제공합니다. 이 책에서 그러한 정의의 허용 가능한 형태를 엄밀하게 명세할 수 있다고 하더라도, 이 이론의 새로운 확장이 끊임없이 탐구되고 있으므로 그러한 명세는 아마도 금세 낡은 것이 될 것입니다. 예를 들어 §6.4에서 언급한 "의존 n-루프"를 이용한 n-구면의 표현과 제11장에서 사용한 "고차 귀납-재귀적 정의"는 이 책을 쓰는 동안 도입된 새로운 착상입니다. 독자 여러분께 실험해 보시기를 권합니다 — 다만 신중하게 하십시오.

주

이전 연구에서도 몇몇 특수한 경우에 대한 암시가 있었지만, 고차 귀납적 타입의 일반적인 착상은 2011년 Oberwolfach 모임에서 Andrej Bauer, Peter Lumsdaine, Mike Shulman, Michael Warren이 나눈 논의에서 구상되었습니다. 이후 Guillaume Brunerie와 Dan Licata가 일반 이론에 크게 기여했는데, 특히 컴퓨터 증명 보조기 에서 고차 귀납적 타입을 표현하고 이를 이용해 호모토피 이론을 전개하는 편리한 방법을 찾아냈습니다(제8장를 참조하십시오).

고차 귀납적 타입의 구문과 고차 범주론적 모형에서의 의미론에 대한 일반적인 논의는 [LS17]에 나와 있습니다. 일반적인 귀납적 타입과 마찬가지로 고차 귀납적 타입의 모형도 초한 반복 과정으로 구성할 수 있습니다. 이를 표어로 나타내면, 일반적인 귀납적 타입은 자유 모나드를 기술하는 반면 고차 귀납적 타입은 모나드의 표시를 기술합니다. 경로 생성자의 도입에는 (경로 공간을 사용하여 정의되는) "오른쪽 호모토피"와 (원기둥을 사용하여 정의되는) "왼쪽 호모토피" 사이의 모형 범주론적 동치도 관련됩니다 — 이 동치가 일반적으로 호모토피 차이를 무시한 수준에서만 성립한다는 사실은 경로 생성자에 대해 명제적 계산 규칙을 선호할 의미론적 근거가 됩니다.

이러한 선호의 또 다른 (일시적인) 이유는 기존 컴퓨터 구현의 한계에서 비롯됩니다. Coq 및 Agda 같은 증명 보조기에는 일반적인 귀납적 타입이 내장되어 있지만, 고차 귀납적 타입은 아직 내장되어 있지 않습니다. 물론 많은 공리를 가정하여 이를 도입할 수는 있지만, 그렇게 하면 명제적 계산 규칙만 얻게 됩니다. 그러나 Dan Licata가 고안한, 비공개 데이터 타입을 사용하여 고차 귀납적 타입을 구현하는 기법이 있습니다. 이 기법은 점 생성자에 대해서는 판단적 규칙을 제공하지만 경로 생성자에 대해서는 제공하지 않습니다.

§§6.4 및 6.5에서 루프 공간과 현수를 이용해 고차원 구면을 타입 이론적으로 기술한 것은 대부분 Brunerie와 Licata의 업적입니다. Hou는 n차원 경로를 사용하는 다른 기술 방식의 타입 이론적 버전을 제시했습니다. 허브와 스포크를 이용해 고차 경로를 1차원 경로로 환원하는 방법(§6.7)은 Lumsdaine과 Shulman의 업적입니다. 절단을 고차 귀납적 타입으로 기술한 것은 Lumsdaine의 업적이며, (-1)-절단은 [AB04]의 "괄호 타입"과 밀접하게 관련되어 있습니다. 평탄화 보조정리는 Brunerie가 처음으로 일반적인 형태로 정식화했습니다.

몫 타입은 NuPRL [CAB+86] 같은 외연적 타입 이론에서는 문제가 되지 않습니다. 몫 타입은 흔히 세토이드로 이루어진 확장된 체계로 넘어가는 방식으로 추가됩니다. 그러나 (호모토피 타입 이론의 출발점인) 내포적 타입 이론에서는 몫이 더 까다로운 문제입니다. 새로운 명제적 등식이 어떻게 동작해야 하는지 명시하지 않은 채 단순히 추가할 수는 없기 때문입니다. 이 문제에 대한 몇 가지

해법이 연구되었으며 [Hof95, Alt99, AMS07], 몫 타입에 대한 여러 가지 개념이 검토되었습니다. 고차 귀납적 타입을 이용한 집합-몫의 구성은 일반적인 메커니즘의 한 사례로 나타나므로, (이전에 검토된 몇몇 방식과 유사한) 우리의 특정 접근 방식을 뒷받침하는 논거가 됩니다. 아직 고차 귀납적 타입 전반에 대한 충분한 계산적 이해가 부족하므로, 우리의 구성이 몫과 관련된 모든 계산적 문제에 대한 새로운 해법을 제공하는 것은 아직 아닙니다 — 그러나 고차 귀납적 타입의 계산적 해석에 관해 진행 중인 연구가 몫에도 적용된다는 의미는 있습니다. 동치류를 이용한 몫의 구성은 물론 표준적인 집합론적 착상이며, 초등 토포스 이론에서도 잘 알려진 측면입니다. 이를 타입 이론에서 사용하는 방식은 (적어도 단순 명제에 대해서는 유니벌런스 공리에 의존하며) Voevodsky가 제안했습니다. 내포적 타입 이론에서 몫 타입이 함수 외연성을 함의한다는 사실은 정확 완비화에 관한 [Car95]의 연구에서 영감을 받아 [Hof95]가 증명했으며, 보조정리 6.3.2는 그러한 논증을 변형한 것입니다.

연습문제

연습문제 6.1. 의존 경로의 이어붙이기를 정의하고, 의존 함수의 적용이 이어붙이기를 보존함을 증명하고, 토러스 T^2에 대한 정확한 귀납 원리를 계산 규칙과 함께 적으십시오.

연습문제 6.2. §6.4에서 제시한 base와 surf를 이용한 $\mathbb{S}^2$의 명시적 정의를 사용하여 $\Sigma\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^2$임을 증명하십시오.

연습문제 6.3. §6.6에서 정의한 토러스 T^2가 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$과 동치임을 증명하십시오. (경고: 이에 필요한 경로 대수는 상당히 어렵습니다.)

연습문제 6.4. 의존 n-루프와 n-루프에 대한 의존 함수의 작용을 정의하고, §6.4의 끝에서 정의한 n-구면에 대한 귀납 원리를 적으십시오.

연습문제 6.5. §6.4에서 제시한 Ω^n을 이용한 $\mathbb{S}^n$의 정의를 사용하여 $\Sigma\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$임을 증명하십시오.

연습문제 6.6. 타입 $\mathbb{S}^2$가 어떤 유니버스 $\mathcal{U}$에 속한다면 $\mathcal{U}$은 2-타입이 아님을 증명하십시오.

연습문제 6.7. G가 모노이드이고 $x : G$이면 $\sum_{(y:G)}((x \cdot y = e) \times (y \cdot x = e))$가 단순 명제임을 증명하십시오. 그리고 유일 선택 원리(따름정리 3.9.2)를 사용하여, 군을 모든 $x : G$에 대해 $x \cdot y = e$이고 $y \cdot x = e$인 $y : G$가 단순히 존재하는 모노이드로 정의해도 동치임을 결론지으십시오.

연습문제 6.8. A가 집합이면 $\mathsf{List}(A)$가 모노이드임을 증명하십시오. 그런 다음 보조정리 6.11.5의 증명을 완성하십시오.

연습문제 6.9. LEM 을 가정하고, $f_{\mathbf{2}} : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$가 항등이 아닌 자기동형사상이 되도록 하는 족 $f : \prod_{(X:\mathcal{U})}(X \to X)$를 구성하십시오.

연습문제 6.10. 보조정리 6.3.2에서 구성한 사상이 실제로 happly의 준역원이며, 따라서 구간 타입이 완전한 함수 외연성 공리를 함의함을 보이십시오. (연습문제 2.16를 사용해야 할 수도 있습니다.)

연습문제 6.11. 현수의 보편 성질을 증명하십시오:

$$\left(\Sigma A \to B\right) \simeq \left(\sum_{(b_n:B)} \sum_{(b_s:B)} (A \to (b_n = b_s))\right)$$

연습문제 6.12. $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N} + \mathbf{1} + \mathbb{N}$임을 보이십시오. 또한 $\mathbb{Z}$를 $\mathbb{N} + \mathbf{1} + \mathbb{N}$으로 정의한다면 판단적 계산 규칙을 갖춘 보조정리 6.10.12을 얻을 수 있음을 보이십시오.

연습문제 6.13. I 대신 $\|\mathbf{2}\|$을 사용해서도 보조정리 6.3.2를 증명할 수 있음을 보이십시오.

제7장

호모토피 n-타입

호모토피 이론의 기본 개념 중 하나는 호모토피 n-타입입니다. 이는 차원 n보다 높은 곳에 흥미로운 호모토피가 없는 공간입니다. 예를 들어 호모토피 0-타입은 본질적으로 자명하지 않은 경로가 없는 집합이며, 호모토피 1-타입은 자명하지 않은 경로를 가질 수는 있지만 경로 사이의 자명하지 않은 경로는 갖지 않습니다. 호모토피 n-타입은 n-절단된 공간이라고도 합니다. 이 개념은 이미 §3.1에서 언급한 바 있습니다. 이 장의 첫 번째 목표는 호모토피 타입 이론에서 이 개념을 정확하게 정의하는 것입니다.

절단성의 쌍대 개념은 연결성입니다. 어떤 공간이 차원 n 이하에서 흥미로운 호모토피를 갖지 않으면 그 공간이 n-연결되어 있다고 합니다. 예를 들어 어떤 공간이 연결 성분을 단 하나만 가지면 0-연결(단순히 "연결"이라고도 합니다)되어 있다고 하고, 여기에 더해 자명하지 않은 루프도 갖지 않으면 1-연결("단일 연결"이라고도 합니다)되어 있다고 합니다(다만 루프 사이의 자명하지 않은 고차 루프는 가질 수 있습니다).

절단성과 연결성 사이의 쌍대성은 두 개념을 모두 사상으로 확장하면 가장 쉽게 드러납니다. 어떤 사상의 모든 섬유가 n-절단되어 있거나 n-연결되어 있으면 그 사상도 각각 그러하다고 합니다. 그러면 n-연결 사상과 n-절단 사상은 직교 분해 체계를 이루는 두 사상의 부류가 됩니다. 즉, 모든 사상은 n-연결 사상 다음에 n-절단 사상이 오는 합성으로 유일하게 분해됩니다.

$n = -1$인 경우, n-절단된 사상은 매장이고 n-연결 사상은 전사이며, 이는 §4.6에서 정의한 바와 같습니다. 따라서 n-연결 분해 체계는 집합 사이의 함수를 전사와 그 뒤에 오는 단사로 분해하는 표준적인 상 분해를 대대적으로 일반화한 것입니다. 이 장의 끝에서 우리는 이보다 더 일반적인 이론을 간략히 소개합니다. 임의의 타입 이론적 모달리티는 이와 유사한 분해 체계를 낳습니다.

7.1 n-타입의 정의

§§3.1 및 3.11에서 언급했듯이, n-타입은 0보다 두 단계 아래에서 시작하여 정의하는 것이 편리하며, 이때 (-1)-타입은 단순 명제이고 (-2)-타입은 축약 가능한 타입입니다.

정의 7.1.1. $n \geq -2$에 대하여 술어 $\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 재귀적으로 정의합니다:

$$\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X) :\equiv \begin{cases} \mathsf{isContr}(X) & \text{만약} n = -2, \\ \prod_{(x,y:X)} \mathsf{is}\text{-}n'\text{-}\mathsf{type}(x =_X y) & \text{만약} n = n' + 1. \end{cases}$$

$\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X)$에 원소가 존재하면 X를 n-**타입**이라고 하며, 때로는 n-절단되어 있다고도 합니다 .

주 7.1.2. 정의 7.1.1의 수 n은 -2 이상인 모든 정수에 걸쳐 있습니다. 이를 형식적으로 다루려면 그러한 정수들의 타입 $\mathbb{Z}_{\geq -2}$(귀납 원리가 $\mathbb{N}$의 귀납 원리와 동일한 타입)를 정의하거나, 대신 $k : \mathbb{N}$에 대하여 술어 is-$(k-2)$-type를 정의하면 됩니다. 어느 쪽이든 $n = -2$를 기저 사례로 삼아 n에 대한 귀납법으로 n-타입에 관한 정리를 증명할 수 있습니다.

예 7.1.3. 보조정리 3.11.10에서 X가 (-1)-타입일 필요충분조건은 X가 단순 명제인 것임을 보았습니다. 따라서 X가 0-타입일 필요충분조건은 X가 집합인 것입니다.

또한 집합이 아닌 타입이 존재한다는 것도 보았습니다(예 3.1.9). 그러나 지금까지는 어떤 $n > 0$에 대해서도 n-타입이 아닌 타입이 존재함을 보이지 않았습니다. 하지만 제8장에서는 $(n+1)$-구면 $\mathbb{S}^{n+1}$이 n-타입이 아님을 보일 것입니다. (Kraus는 고차 귀납적 타입을 전혀 사용하지 않고도 n^{th} 중첩 유니밸런트 유니버스 역시 n-타입이 아님을 보였습니다.) 나아가 §8.8에서는 어떤 (유한한) 수 n에 대해서도 n-타입이 아닌 타입의 예를 제시할 것입니다.

n-타입이 특정 연산과 생성자에 대해 닫혀 있음을 보이는 것으로 n-타입의 일반 이론을 시작합니다.

정리 7.1.4. $p : X \to Y$가 수축 사상이고, 임의의 $n \geq -2$에 대하여 X가 n-타입이라고 가정합시다. 그러면 Y도 n-타입입니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다. 기저 사례 $n = -2$는 보조정리 3.11.7에서 다룹니다.

귀납 단계에서는 n-타입의 모든 수축체가 n-타입이고 X가 $(n+1)$-타입이라고 가정합니다. $y, y' : Y$라고 합시다. 이제 $y = y'$가 n-타입임을 보여야 합니다. s를 p의 단면이라 하고, ϵ을 호모토피 $\epsilon : p \circ s \sim 1$이라고 합시다. X가 $(n+1)$-타입이므로 $s(y) =_X s(y')$는 n-타입입니다. 우리는 $y = y'$가 $s(y) =_X s(y')$의 수축체라고 주장합니다. 단면으로는 다음을 취합니다.

$$\mathsf{ap}_s : (y = y') \to (s(y) = s(y')).$$

수축 사상으로는 $t : (s(y) = s(y')) \to (y = y')$를 다음과 같이 정의합니다.

$$t(q) :\equiv {\epsilon_y}^{-1} \cdot p(q) \cdot \epsilon_{y'}.$$

t가 ap_s의 수축 사상임을 보이려면 다음을 보여야 합니다.

$${\epsilon_y}^{-1} \cdot p(s(r)) \cdot \epsilon_{y'} = r$$

이는 임의의 $r : y = y'$에 대하여 성립해야 합니다. 그런데 이는 보조정리 2.4.3에서 따라 나옵니다. □

이 결과의 직접적인 따름정리로서 동치에 대한 n-타입의 안정성을 얻습니다(이는 유니밸런스에서도 곧바로 따라 나옵니다):

따름정리 7.1.5. $X \simeq Y$이고 X가 n-타입이면 Y도 n-타입입니다.

§4.6의 매장 개념도 상기하십시오.

정리 7.1.6. $f : X \to Y$가 매장이고 어떤 $n \geq -1$에 대해 Y가 n-타입이면, X도 n-타입입니다.

증명. $x, x' : X$라고 합시다. $x =_X x'$가 $(n-1)$-타입임을 보여야 합니다. 그런데 f가 매장이므로 $(x =_X x') \simeq (f(x) =_Y f(x'))$이고, 가정에 의해 후자는 $(n-1)$-타입입니다. □

$n = -2$일 때는 이 정리가 성립하지 않는다는 점에 유의하십시오. 사상 $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$은 매장이지만, $\mathbf{1}$은 (-2)-타입인 반면 $\mathbf{0}$은 그렇지 않습니다.

정리 7.1.7. n-타입의 계층은 다음과 같은 의미에서 누적적입니다. 수 $n \geq -2$가 주어졌을 때, X가 n-타입이면 X는 $(n+1)$-타입이기도 합니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다.

$n = -2$인 경우, 축약 가능한 타입, 예컨대 A가 축약 가능한 경로 공간을 가짐을 보여야 합니다. $a_0 : A$를 A의 축약 중심이라 하고, $x, y : A$라 합시다. $x =_A y$가 축약 가능함을 보이겠습니다. A의 축약 가능성에 의해 경로 $\mathsf{contr}_x \centerdot \mathsf{contr}_y{}^{-1} : x = y$를 얻으며, 이를 $x = y$의 축약 중심으로 택합니다. 임의의 $p : x = y$가 주어졌을 때, $p = \mathsf{contr}_x \centerdot \mathsf{contr}_y{}^{-1}$임을 보여야 합니다. 경로 귀납법에 의해 $\mathsf{refl}_x = \mathsf{contr}_x \centerdot \mathsf{contr}_x{}^{-1}$임을 보이면 충분하며, 이는 자명합니다.

귀납 단계에서는 X가 $(n+1)$-타입이라는 조건 아래 $x =_X y$가 $(n+1)$-타입임을 보여야 합니다. $x =_X y$에 귀납 가설을 적용하면 원하는 결과를 얻습니다. □

이제 n-타입이 대부분의 타입 형성 연산에 의해 보존됨을 보이겠습니다.

정리 7.1.8. $n \geq -2$라 하고, $A : \mathcal{U}$ 및 $B : A \to \mathcal{U}$이라 합시다. A가 n-타입이고 모든 $a : A$에 대해 $B(a)$가 n-타입이면, $\sum_{(x:A)} B(x)$도 n-타입입니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다.

$n = -2$인 경우, $\sum_{(x:A)} B(x)$의 축약 중심으로 쌍 (a_0, b_0)을 택합니다. 여기서 $a_0 : A$는 A의 축약 중심이고 $b_0 : B(a_0)$는 $B(a_0)$의 축약 중심입니다. $\sum_{(x:A)} B(x)$의 다른 임의의 원소 (a, b)가 주어지면, A와 $B(a_0)$ 각각의 축약 가능성에 의해 경로 $(a, b) = (a_0, b_0)$를 제공합니다.

귀납 단계에서는 A가 $(n+1)$-타입이고 임의의 $a : A$에 대해 $B(a)$가 $(n+1)$-타입이라고 가정합니다. $\sum_{(x:A)} B(x)$가 $(n+1)$-타입임을 보이겠습니다. 즉, $\sum_{(x:A)} B(x)$에서 (a_1, b_1)과 (a_2, b_2)를 고정하고 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$가 n-타입임을 보입니다. 정리 2.7.2에 의해 다음이 성립하며

$$((a_1, b_1) = (a_2, b_2)) \simeq \sum_{p:a_1=a_2} (p_*(b_1) =_{B(a_2)} b_2)$$

동치에 의해 n-타입이 보존되므로(따름정리 7.1.5), 후자가 n-타입임을 증명하는 것으로 충분합니다. 이는 귀납 가설로부터 따라 나옵니다. □

특수한 경우로, A와 B가 n-타입이면 $A \times B$도 n-타입입니다. 또한 정리 7.1.7에 의해 A가 n-타입이면 임의의 $x, y : A$에 대해 $x =_A y$도 n-타입이라는 점에 유의하십시오. 이를 정리 7.1.8와 결합하면, n-타입들 사이의 임의의 함수 $f : A \to C$와 $g : B \to C$에 대해 그 당김

$$A \times_C B :\equiv \sum_{(x:A)} \sum_{(y:B)} (f(x) = g(y))$$

(연습문제 2.11 참조) 역시 n-타입임을 알 수 있습니다. 더 일반적으로, n-타입은 모든 극한에 대해 닫혀 있습니다.

정리 7.1.9. $n \geq -2$라 하고, $A : \mathcal{U}$ 및 $B : A \to \mathcal{U}$이라 합시다. 모든 $a : A$에 대해 $B(a)$가 n-타입이면, $\prod_{(x:A)} B(x)$도 n-타입입니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다. $n = -2$인 경우, 이 결과는 바로 보조정리 3.11.6입니다.

귀납 단계에서는 결과가 n-타입에 대해 참이고 각 $B(a)$가 $(n+1)$-타입이라고 가정합니다. $f, g : \prod_{(a:A)} B(a)$라고 합시다. $f = g$가 n-타입임을 보여야 합니다. 함수 외연성과 n-타입이 동치에 대해 닫혀 있다는 사실에 의해, $\prod_{(a:A)}(f(a) =_{B(a)} g(a))$가 n-타입임을 보이는 것으로 충분합니다. 이는 귀납 가설로부터 따라 나옵니다. □

위 정리의 특수한 경우로, B가 n-타입이면 함수 공간 $A \to B$도 n-타입입니다. 이제 $\mathsf{isSet}(A)$와 $\mathsf{isProp}(A)$가 단순 명제라는 제2장에서의 관찰을 일반화할 수 있습니다.

정리 7.1.10. 임의의 $n \geq -2$와 임의의 타입 X에 대해, 타입 $\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X)$는 단순 명제입니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다.

기저 사례에서는 임의의 X에 대해 타입 $\mathsf{isContr}(X)$가 단순 명제임을 보여야 합니다. 이것이 바로 보조정리 3.11.4입니다.

귀납 단계에서는 다음을 보여야 합니다.

$$\prod_{X:\mathcal{U}} \mathsf{isProp}(\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X)) \to \prod_{X:\mathcal{U}} \mathsf{isProp}(\mathsf{is}\text{-}(n+1)\text{-}\mathsf{type}(X)).$$

이 함의의 결론을 보이려면, 임의의 타입 X에 대해 다음 타입이

$$\prod_{x,x':X} \mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(x = x')$$

가 단순 명제임을 보입니다. 예 3.6.2 또는 정리 7.1.9에 의해, 임의의 $x, x' : X$에 대해 타입 $\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(x =_X x')$가 단순 명제임을 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 이는 타입 $(x =_X x')$에 귀납 가설을 적용하면 따라 나옵니다. □

마지막으로, n-타입들의 타입 자체가 $(n+1)$-타입임을 보이겠습니다. 이 타입을 다음과 같이 정의합니다.

$$n\text{-}\mathsf{Type} :\equiv \sum_{X:\mathcal{U}} \mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X).$$

필요한 경우 $n\text{-}\mathsf{Type}_{\mathcal{U}}$이라고 써서 유니버스 $\mathcal{U}$를 명시할 수 있습니다. 특히 제2장에서 정의한 대로 $\mathsf{Prop} :\equiv (-1)\text{-}\mathsf{Type}$이고 $\mathsf{Set} :\equiv 0\text{-}\mathsf{Type}$입니다. Prop 및 Set의 경우와 마찬가지로, $\mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X)$는 단순 명제이므로 보조정리 3.5.1에 의해 임의의 $(X, p), (X', p') : n\text{-}\mathsf{Type}$에 대해 다음이 성립한다는 점에 유의하십시오.

$$\begin{aligned}\Big((X, p) =_{n\text{-}\mathsf{Type}} (X', p')\Big) &\simeq (X =_{\mathcal{U}} X') \\ &\simeq (X \simeq X').\end{aligned}$$

정리 7.1.11. 임의의 $n \geq -2$에 대해, 타입 $n\text{-}\mathsf{Type}$은 $(n+1)$-타입입니다.

증명. $(X, p), (X', p') : n\text{-}\mathsf{Type}$이라고 합시다. $(X, p) = (X', p')$가 n-타입임을 보여야 합니다. 위의 관찰에 의해 이 타입은 $X \simeq X'$와 동치입니다. 다음으로, 아래의 사영을 살펴봅시다.

$$(X \simeq X') \to (X \to X').$$

이 사영은 매장이므로, $n \geq -1$이면 정리 7.1.6에 의해 $X \to X'$가 n-타입임을 보이면 충분합니다. 그런데 n-타입은 화살표 타입을 만들어도 보존되므로, 이는 X'가 n-타입이라는 가정으로 귀결됩니다.

$n = -2$인 경우, 이 논증은 $X \simeq X'$가 (-1)-타입임을 보여 줍니다. 그런데 임의의 두 축약 가능한 타입은 $\mathbf{1}$과 동치이고 따라서 서로 동치이므로, 이 타입은 원소를 가지기도 합니다. 따라서 $X \simeq X'$는 (-2)-타입이기도 합니다. □

7.2 동일성 증명의 유일성과 헤드베리 정리

§3.1에서 우리는 모든 $x, y : X$와 $p, q : x =_X y$에 대해 $p = q$가 성립하면 타입 X를 집합이라고 정의했습니다. 전통적인 타입 이론에서는 이 성질을 **동일성 증명의 유일성**(UIP)이라고 부릅니다. 또한 우리는 이 성질이 앞 절의 의미에서 0-타입인 것과 동치임을 보았습니다. 다음은 Streicher의 "공리 K" [Str93]와 관련된 또 다른 동치 특성화입니다:

정리 7.2.1. 타입 X가 집합일 필요충분조건은 X가 **공리** K를 만족하는 것입니다: 모든 $x : X$와 $p : (x =_A x)$에 대해 $p = \mathsf{refl}_x$가 성립합니다.

증명. 공리 K가 UIP의 특수한 경우임은 분명합니다. 역으로, X가 공리 K를 만족한다고 하고 $x, y : X$와 $p, q : (x = y)$라고 합시다. 우리는 $p = q$임을 보이고자 합니다. 그런데 q에 대한 귀납법을 적용하면 이 목표는 정확히 공리 K로 귀결됩니다. □

우리는 UIP나 K 원리를 공리로 가정하지 않는다는 점을 강조합니다! 이들은 단지 특정 타입이 만족할 수도 있고 만족하지 않을 수도 있는 성질(집합인 것과 동치인 성질)일 뿐입니다. 예 3.1.9에서 보았듯이 모든 타입이 집합인 것은 아님을 상기하십시오.

다음 정리는 타입이 집합임을 보이는 또 다른 유용한 방법입니다.

정리 7.2.2. R이 타입 X 위의 반사적 단순 관계이며 동일성을 함의한다고 합시다. 그러면 X는 집합이며, 모든 $x, y : X$에 대해 $R(x, y)$는 $x =_X y$와 동치입니다.

증명. $\rho : \prod_{(x:X)} R(x, x)$가 R의 반사성에 대한 증거이고, $f : \prod_{(x,y:X)} R(x, y) \to (x =_X y)$가 R이 동일성을 함의한다는 증거라고 합시다. 먼저 정리의 두 진술이 동치임에 유의하십시오. 한편으로, X가 집합이면 $x =_X y$는 단순 명제이고, 가정에 의해 단순 명제 $R(x, y)$와 논리적으로 동치이므로 이와 동치이기도 해야 합니다. 다른 한편으로, $x =_X y$가 $R(x, y)$와 동치이면, 후자와 마찬가지로 모든 $x, y : X$에 대해 단순 명제이므로 X는 집합입니다.

이 정리에 대해 두 가지 증명을 제시합니다. 첫 번째 증명은 X가 집합임을 직접 보이고, 두 번째 증명은 $R(x, y) \simeq (x = y)$임을 직접 보입니다.

첫 번째 증명: X가 집합임을 보입니다. 아이디어는 보조정리 3.3.4에서와 같습니다. 즉, 함수 f는 인자 x와 y에 대해 연속이어야 합니다. 다만 타입 $R(x, y)$의 추가 인자를 다루어야 하므로 표기가 약간 더 복잡합니다.

먼저, 임의의 $x : X$와 $p : x =_X x$에 대해 $\mathsf{apd}_{f(x)}(p)$를 생각해 봅시다. 이는 $f(x, x)$에서 자기 자신으로 가는 의존 경로입니다. $f(x, x)$는 여전히 함수 $R(x, x) \to (x =_X x)$이므로, 보조정리 2.9.6에 의해 이로부터 임의의 $r : R(x, x)$에 대해 다음 경로를 얻습니다.

$$p_*(f(x, x, r)) = f(x, x, p_*(r)).$$

좌변에는 동일성 타입에서의 수송이 있으며, 이는 이어붙이기입니다. 그리고 우변에서는 둘 다 단순 명제 $R(x, x)$에 속하므로 $p_*(r) = r$입니다. 따라서 $r :\equiv \rho(x)$를 대입하면 다음을 얻습니다.

$$f(x, x, \rho(x)) \cdot p = f(x, x, \rho(x)).$$

소거에 의해 $p = \mathsf{refl}_x$입니다. 따라서 X는 공리 K를 만족하며, 그러므로 집합입니다.

두 번째 증명: 각 $f(x, y) : R(x, y) \to x =_X y$가 동치임을 보입니다. 정리 4.7.7에 의해, f가 전체 공간 사이의 동치를 유도함을 보이면 충분합니다:

$$\Big(\sum_{y:X} R(x, y)\Big) \simeq \Big(\sum_{y:X} x =_X y\Big).$$

보조정리 3.11.8에 의해 오른쪽의 타입은 축약 가능하므로, 왼쪽의 타입이 축약 가능함을 보이는 것으로 충분합니다. 축약 중심으로는 쌍 $(x, \rho(x))$를 택합니다. 이제 모든 $y : X$와 모든 $H : R(x,y)$에 대해 다음을 보이는 일이 남아 있습니다.

$$(x, \rho(x)) = (y, H).$$

그런데 $R(x,y)$는 단순 명제이므로, 정리 2.7.2에 의해 $x =_X y$임을 보이면 충분하며, 이는 $f(H)$로부터 얻습니다. □

따름정리 7.2.3. 타입 X가 임의의 $x, y : X$에 대해 $\neg\neg(x = y) \to (x = y)$라는 성질을 가지면, X는 집합입니다.

타입이 집합임을 보이는 또 다른 편리한 방법은 다음과 같습니다. §3.4에서 타입 X가 결정 가능한 상등을 가진다고 하는 것은 모든 $x, y : X$에 대해 다음이 성립하는 경우임을 상기하십시오.

$$(x =_X y) + \neg(x =_X y).$$

이는 매우 강한 조건입니다. 이 조건은 경로 $x = y$가 존재할 때 이를 x와 y에 대해 연속적으로(또는 계산 가능하게, 또는 함자적으로) 선택할 수 있다는 뜻입니다. 정리 7.2.2와 다음 보조정리를 통해, 이 조건이 X가 집합임을 함의한다는 사실이 밝혀집니다.

보조정리 7.2.4. 임의의 타입 A에 대해 $(A + \neg A) \to (\neg\neg A \to A)$가 성립합니다.

증명. 이는 본질적으로 따름정리 3.2.7에서 이미 증명되었지만, 논증을 다시 반복합니다. $x : A + \neg A$라고 가정합시다. 고려해야 할 경우는 두 가지입니다. 어떤 $a : A$에 대해 x가 $\mathsf{inl}(a)$이면, 모든 것을 a로 사상하는 상수 함수 $\neg\neg A \to A$가 있습니다. 어떤 $t : \neg A$에 대해 x가 $\mathsf{inr}(t)$이면, 모든 $g : \neg\neg A$에 대해 $g(t) : \mathbf{0}$를 얻습니다. 따라서 ex falso quodlibet, 즉 $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$를 사용하여 임의의 $g : \neg\neg A$에 대해 A의 원소를 얻을 수 있습니다. □

정리 7.2.5 (헤드베리). X가 결정 가능한 상등을 가지면, X는 집합입니다.

증명. X가 결정 가능한 상등을 가지면, 임의의 $x, y : X$에 대해 $\neg\neg(x = y) \to (x = y)$가 따라 나옵니다. 따라서 헤드베리 정리는 따름정리 7.2.3으로부터 따라 나옵니다. □

물론 이 정리와 따름정리 3.2.7 사이에는 강한 연관이 있습니다. 따름정리 3.2.7이 부정하는 명제 LEM_∞는 모든 타입이 결정 가능한 상등을 가지며 따라서 집합임을 분명히 함의하는데, 우리는 이것이 사실이 아님을 알고 있습니다. §3.4의 무모순적인 공리 LEM은 모든 타입이 단순히 결정 가능한 상등을 가진다는 것, 즉 임의의 A에 대해 다음이 성립한다는 것만을 함의한다는 점에 유의하십시오.

$$\prod_{a,b:A} (\|a = b\| + \neg\|a = b\|).$$

정리 7.2.5의 응용 예로서, 예 3.1.4에서 §2.13에서 얻은 $\mathbb{N}$의 동일성 타입의 특성화를 사용하여 $\mathbb{N}$가 집합임을 확인했음을 상기하십시오. 이 정리의 보다 전통적인 증명은 정리 2.13.1의 완전한 특성화 대신 (2.13.2)와 (2.13.3)만을 사용하고, 나머지 빈 곳은 정리 7.2.5로 채웁니다.

정리 7.2.6. 자연수 타입 $\mathbb{N}$은 결정 가능한 상등을 가지며, 따라서 집합입니다.

증명. $x, y : \mathbb{N}$가 주어졌다고 합시다. $(x = y) + \neg(x = y)$를 증명하기 위해 x에 대한 귀납법과 y에 대한 경우 분석을 진행합니다. $x \equiv 0$이고 $y \equiv 0$이면, $\mathsf{inl}(\mathsf{refl}_0)$을 취합니다. $x \equiv 0$이고 $y \equiv \mathsf{succ}(n)$이면, (2.13.2)에 의해 $\neg(0 = \mathsf{succ}(n))$을 얻습니다.

귀납 단계로서 $x \equiv \mathsf{succ}(n)$이라고 합시다. $y \equiv 0$이면, 다시 (2.13.2)를 사용합니다. 마지막으로 $y \equiv \mathsf{succ}(m)$이면, 귀납 가설에 의해 $(m = n) + \neg(m = n)$을 얻습니다. 첫 번째 경우에 $p : m = n$이면, $\mathsf{succ}(p) : \mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)$입니다. 그리고 두 번째 경우에는 (2.13.3)에 의해 $\neg(\mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n))$을 얻습니다. □

헤드베리 정리는 집합(0-타입)에 다소 특수한 것으로 보이지만, "공리 K"는 n-타입으로 자연스럽게 일반화됩니다. (타입 X의 성질로서의) 통상적인 공리 K는 모든 $x : X$에 대해 루프 공간 $\Omega(X, x)$(정의 2.1.8 참조)가 축약 가능하다고 말한다는 점에 유의하십시오. $\Omega(X, x)$에는 항상 (refl_x라는) 원소가 있으므로, 이는 그것이 단순 명제((-1)-타입)라는 것과 동치입니다. $0 = (-1) + 1$이므로, 이는 다음과 같은 일반화를 시사합니다.

정리 7.2.7. 임의의 $n \geq -1$에 대해, 타입 X가 $(n+1)$-타입일 필요충분조건은 모든 $x : X$에 대해 타입 $\Omega(X, x)$가 n-타입인 것입니다.

이를 증명하기 전에, 보조정리를 하나 증명합니다:

보조정리 7.2.8. $n \geq -1$과 $X : \mathcal{U}$이 주어졌다고 합시다. X의 임의의 원소가 주어질 때 X가 n-타입임이 따라 나온다면, X는 n-타입입니다.

증명. $f : X \to \mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(X)$를 주어진 사상이라고 합시다. 임의의 $x, x' : X$에 대해 타입 $x = x'$가 $(n-1)$-타입임을 보여야 합니다. 그런데 이때 $f(x)$는 X가 n-타입임을 보여 주므로, 그 모든 경로 공간은 $(n-1)$-타입입니다. □

정리 7.2.7의 증명. $\Omega(X, x) :\equiv (x =_X x)$이므로 "필요조건" 방향은 자명합니다. 역으로, X가 $(n+1)$-타입임을 보이려면 임의의 $x, x' : X$에 대해 타입 $x = x'$가 n-타입임을 보여야 합니다. 보조정리 7.2.8에 따라 다음 사상을 제시하는 것으로 충분합니다.

$$(x = x') \to \mathsf{is}\text{-}n\text{-}\mathsf{type}(x = x').$$

경로 귀납법에 의해 $x \equiv x'$인 경우에 이를 보이는 것으로 충분하며, 이 경우에는 $\Omega(X, x)$가 n-타입이라는 가정으로부터 따라 나옵니다. □

귀납과 약간 영리한 위스커링을 통해 K 성질을 $n > 0$으로 일반화할 수 있습니다.

정리 7.2.9. 모든 $n \geq -1$에 대해, 타입 A가 n-타입일 필요충분조건은 모든 $a : A$에 대해 $\Omega^{n+1}(A, a)$가 축약 가능한 것입니다.

증명. $\Omega^0(A, a) = (A, a)$임을 상기하면, $n = -1$인 경우는 연습문제 3.5입니다. $n = 0$인 경우는 정리 7.2.1입니다. 이제 귀납법을 사용합니다. 주장이 $n : \mathbb{N}$에 대해 성립한다고 가정합시다. 정리 7.2.7에 의해, A가 $(n+1)$-타입일 필요충분조건은 모든 $a : A$에 대해 $\Omega(A, a)$가 n-타입인 것입니다. 귀납 가설에 의해, 후자는 모든 $p : \Omega(A, a)$에 대해 $\Omega^{n+1}(\Omega(A, a), p)$가 축약 가능하다는 것과 동치입니다.

$\Omega^{n+2}(A,a) :\equiv \Omega^{n+1}(\Omega(A,a),\mathsf{refl}_a)$이고 $\Omega^{n+1} = \Omega^n \circ \Omega$이므로, 점을 가진 타입들의 타입 $\mathcal{U}_\bullet$에서 $\Omega(\Omega(A,a),p)$가 $\Omega(\Omega(A,a),\mathsf{refl}_a)$와 같음을 보이는 것으로 충분합니다. 이를 위해서는 다음 동치를 제시하는 것으로 충분합니다.

$$g : \Omega(\Omega(A,a),p) \simeq \Omega(\Omega(A,a),\mathsf{refl}_a)$$

이 동치는 기점 refl_p를 기점 $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a}$로 보내는 것이어야 합니다. $q : p = p$에 대해, $g(q) : \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a$를 다음 합성으로 정의합니다:

$$\mathsf{refl}_a = p \cdot p^{-1} \overset{q}{=} p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_a,$$

여기서 "q"로 표시된 경로는 실제로는 $\mathsf{ap}_{\lambda r.\, r \cdot p^{-1}}(q)$입니다. 그러면 g는 다음 동치들의 합성이므로 동치입니다.

$$(p = p) \xrightarrow{\mathsf{ap}_{\lambda r.\, r \cdot p^{-1}}} (p \cdot p^{-1} = p \cdot p^{-1}) \xrightarrow{i \cdot - \cdot i^{-1}} (\mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a).$$

예 2.4.8 및 정리 2.11.1를 사용하며, 여기서 $i : \mathsf{refl}_a = p \cdot p^{-1}$는 표준적인 등식입니다. 또한 $g(\mathsf{refl}_p) = \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_a}$임은 자명합니다. □

7.3 절단

§3.7에서 우리는 명제 절단을 도입했는데, 이는 어떤 타입을 단순 명제, 즉 (-1)-타입으로 "가장 잘 근사"한 것을 만듭니다. §6.9에서는 이 절단을 고차 귀납적 타입으로 구성하고, 이를 0-절단으로 일반화하는 한 가지 방법을 제시했습니다. 이제 이보다 더 나은 일반화를 설명합니다. 이는 임의의 $n \geq -2$에 대해 임의의 타입을 n-타입으로 절단하며, 고전적 호모토피 이론에서는 이를 그 타입의 n^{th} Postnikov **단면**이라고 부릅니다.

아이디어는 정리 7.2.9과 보조정리 6.5.4를 활용하는 것입니다. 정리 7.2.9은 A가 n-타입인 것은 모든 $a : A$에 대해 $\Omega^{n+1}(A,a)$가 축약 가능한 것과 정확히 같다는 것을 말하고, 보조정리 6.5.4는 $\Omega^{n+1}(A,a) \simeq \mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^{n+1},(A,a))$, 임을 함의합니다. 여기서 $\mathbb{S}^{n+1}$은 어떤 기점을 갖추고 있으며, 이 기점을 base 라고 불러도 무방합니다. 그런데 $\mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^{n+1},(A,a))$의 축약 가능성은 경로 생성자를 제공함으로써 직접 보장할 수 있는 것입니다.

§6.7에서와 같이 "허브와 스포크" 구성을 사용하겠습니다. 따라서 $n \geq -1$에 대해 $\|A\|_n$를 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 정의합니다:

- 함수 $|-|_n : A \to \|A\|_n$,
- 각 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$에 대해 허브 점 $h(r) : \|A\|_n$, 그리고
- 각 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$와 각 $x : \mathbb{S}^{n+1}$에 대해 스포크 경로 $s_r(x) : r(x) = h(r)$.

이제 이 생성자들이 존재한다는 것만으로 다음을 보이기에 충분합니다:

보조정리 7.3.1. $\|A\|_n$는 n-타입입니다.

증명. 정리 7.2.9에 의해 모든 $b : \|A\|_n$에 대해 $\Omega^{n+1}(\|A\|_n,b)$가 축약 가능함을 보이면 충분하며, 이는 보조정리 6.5.4에 의해 다음이 축약 가능하다는 것과 동치입니다. $\mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^{n+1},(\|A\|_n,b))$. 후자의 축약 중심으로는 b에서 상수인 함수 $c_b : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$를 $\mathsf{refl}_b : c_b(\mathsf{base}) = b$와 함께 택합니다.

이제 $\mathsf{Map}_*(\mathbb{S}^{n+1},(\|A\|_n,b))$의 임의의 원소는 사상 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$와 경로 $p : r(\mathsf{base}) = b$로 이루어집니다. 함수 외연성에 의해, $r = c_b$를 보이려면 각 $x : \mathbb{S}^{n+1}$에 대해 경로 $r(x) = c_b(x) \equiv b$

를 제시하면 충분합니다. 이 경로로는 합성 $s_r(x) \cdot s_r(\mathsf{base})^{-1} \cdot p$를 택하며, 여기서 $s_r(x)$는 x에서의 스포크입니다.

마지막으로, 이 등식 $r = c_b$를 따라 수송했을 때 경로 p가 refl_b가 됨을 보여야 합니다. 경로 타입에서의 수송에 의해, 이는 다음이 필요하다는 뜻입니다:

$$(s_r(\mathsf{base}) \cdot s_r(\mathsf{base})^{-1} \cdot p)^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_b.$$

그러나 이는 경로 연산으로부터 즉시 따라 나옵니다. □

(이 구성은 $n = -2$일 때는 성립하지 않지만, 그 경우에는 모든 A에 대해 간단히 $\|A\|_{-2} :\equiv \mathbf{1}$로 정의할 수 있습니다. 이제부터는 $n \geq -1$이라고 가정합니다.)

n-절단의 원하는 보편 성질을 보이려면 귀납 원리가 필요합니다. 이 원리는 통상적인 방식으로 생성자들로부터 추출하며, 그 내용은 다음과 같습니다. $P : \|A\|_n \to \mathcal{U}$가 다음과 함께 주어지면

- 각 $a : A$에 대해 원소 $g(a) : P(|a|_n)$,
- 각 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$와 $r' : \prod_{(x:\mathbb{S}^{n+1})} P(r(x))$에 대해 원소 $h'(r, r') : P(h(r))$,
- 각 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$와 $r' : \prod_{(x:\mathbb{S}^{n+1})} P(r(x))$, 그리고 각 $x : \mathbb{S}^{n+1}$에 대해 의존 경로 $r'(x) =^P_{s_r(x)} h'(r, r')$,

모든 $a : A$에 대해 $f(|a|_n) \equiv g(a)$를 만족하는 단면 $f : \prod_{(x:\|A\|_n)} P(x)$가 존재합니다. 이를 더 유용하게 만들기 위해 다음과 같이 재정식화합니다.

정리 7.3.2. 각 $P(x)$가 n-타입인 임의의 타입 족 $P : \|A\|_n \to \mathcal{U}$와 임의의 함수 $g : \prod_{(a:A)} P(|a|_n)$에 대해, 모든 $a : A$에 대해 $f(|a|_n) :\equiv g(a)$를 만족하는 단면 $f : \prod_{(x:\|A\|_n)} P(x)$가 존재합니다.

증명. g는 정확히 첫 번째 자료의 타입을 가지므로, 위에 나열한 두 번째와 세 번째 자료를 구성하면 충분합니다. $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$와 $r' : \prod_{(x:\mathbb{S}^{n+1})} P(r(x))$가 주어지면 $h(r) : \|A\|_n$와 $s_r : \prod_{(x:\mathbb{S}^{n+1})} (r(x) = h(r))$가 있습니다. $t : \mathbb{S}^{n+1} \to P(h(r))$를 $t(x) :\equiv s_r(x)_*(r'(x))$로 정의합니다. 그러면 $P(h(r))$가 n-절단되어 있으므로, 점 $u : P(h(r))$와 축약 $v : \prod_{(x:\mathbb{S}^{n+1})} (t(x) = u)$가 존재합니다. $h'(r, r') :\equiv u$로 정의하면 두 번째 자료가 주어집니다. 그러면 (의존 경로의 정의를 상기하면) v는 정확히 세 번째 자료에 요구되는 타입을 가집니다. □

특히 E가 어떤 n-타입이면, A의 모든 점에 대해 E와 같은 상수 족, 즉 상수 타입족을 생각할 수 있습니다. 따라서 모든 사상 $f : A \to E$는 $\mathsf{ext}(f)(|a|_n) :\equiv f(a)$로 정의되는 사상 $\mathsf{ext}(f) : \|A\|_n \to E$로 확장될 수 있습니다. 이것이 $\|A\|_n$에 대한 재귀 원리입니다.

귀납 원리는 또한 이러한 형태의 함수에 대한 유일성 원리를 함의합니다. 즉, E가 n-타입이고 $g, g' : \|A\|_n \to E$가 모든 $a : A$에 대해 $g(|a|_n) = g'(|a|_n)$를 만족하면, 타입 $g(x) = g'(x)$가 n-타입이므로 모든 $x : \|A\|_n$에 대해 $g(x) = g'(x)$입니다. 따라서 $g = g'$입니다. (사실 이 유일성 원리는 더 일반적으로 E가 $(n+1)$-타입일 때에도 성립합니다.) 이로부터 다음 보편 성질을 얻습니다.

보조정리 7.3.3 (절단의 보편 성질). $n \geq -2$, $A : \mathcal{U}$, $B : n\text{-}\mathsf{Type}$이라고 합시다. 다음 사상은 동치입니다:

$$\begin{cases} (\|A\|_n \to B) & \longrightarrow & (A \to B) \\ g & \longmapsto & g \circ |-|_n \end{cases}$$

증명. B가 n-절단되어 있으므로, 임의의 $f : A \to B$를 사상 $\mathsf{ext}(f) : \|A\|_n \to B$로 확장할 수 있습니다. 모든 $a : A$에 대해 정의에 의해 $\mathsf{ext}(f)(|a|_n) = f(a)$이므로, 사상 $\mathsf{ext}(f) \circ |-|_n$은 f와 같습니다. 또한 사상 $\mathsf{ext}(g \circ |-|_n)$은 g와 같습니다. 두 사상 모두 $|a|_n$를 $g(|a|_n)$로 보내기 때문입니다. □

범주론의 언어로 말하면, 이는 n-타입들이 타입의 범주의 반영적 부분범주를 이룬다는 뜻입니다. (이를 완전히 정확하게 진술하려면 $(\infty,1)$-범주의 언어를 사용해야 합니다.) 특히 이로부터 n-절단이 함자적임을 알 수 있습니다. $f : A \to B$가 주어졌을 때, 합성 $A \xrightarrow{f} B \to \|B\|_n$에 재귀 원리를 적용하면 사상 $\|f\|_n : \|A\|_n \to \|B\|_n$를 얻습니다. 정의에 의해 다음 호모토피가 있습니다.

$$\mathsf{nat}_n^f : \prod_{a:A} \|f\|_n(|a|_n) = |f(a)|_n, \tag{7.3.4}$$

이는 사상 $|-|_n$의 자연성을 나타냅니다.

유일성으로부터 $\|g \circ f\|_n = \|g\|_n \circ \|f\|_n$ 및 $\|\mathsf{id}_A\|_n = \mathsf{id}_{\|A\|_n}$와 같은 함자성 법칙이 이에 수반되는 정합성 법칙과 함께 도출됩니다. 또한 고차 함자성도 성립하며, 예를 들면 다음과 같습니다.

보조정리 7.3.5. $f, g : A \to B$와 호모토피 $h : f \sim g$가 주어지면, 유도된 호모토피 $\|h\|_n : \|f\|_n \sim \|g\|_n$가 존재하여 다음 합성

$$|f(a)|_n \overset{\mathsf{nat}_n^f(a)^{-1}}{=\!=} \|f\|_n(|a|_n) \overset{\|h\|_n(|a|_n)}{=\!=} \|g\|_n(|a|_n) \overset{\mathsf{nat}_n^g(a)}{=\!=} |g(a)|_n \tag{7.3.6}$$

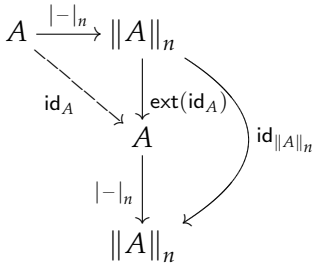
이 $\mathsf{ap}_{|-|_n}(h(a))$와 같습니다.

증명. 먼저, 성분이 $\mathsf{ap}_{|-|_n}(h(a)) : |f(a)|_n = |g(a)|_n$인 호모토피가 실제로 존재합니다. 여기에 $\|f\|_n$와 $\|g\|_n$의 정의로부터 나오는 경로 $|f(a)|_n = \|f\|_n(|a|_n)$와 $|g(a)|_n = \|g\|_n(|a|_n)$를 양쪽에 합성하면 호모토피 $(\|f\|_n \circ |-|_n) \sim (\|g\|_n \circ |-|_n)$를 얻고, 따라서 함수 외연성에 의해 등식을 얻습니다. 그런데 $(- \circ |-|_n)$이 동치이므로 이를 유도하는 경로 $\|f\|_n = \|g\|_n$가 반드시 존재하며, 함수 외연성의 정합성 법칙으로부터 (7.3.6)가 따라옵니다. □

반영적 부분범주에 관한 다음 관찰 역시 표준적인 것입니다.

따름정리 7.3.7. 타입 A가 n-타입일 필요충분조건은 $|-|_n : A \to \|A\|_n$가 동치인 것입니다.

증명. "충분성"은 n-타입들이 동치에 대해 닫혀 있다는 사실로부터 따라옵니다. 반대로, A가 n-타입이면 $\mathsf{ext}(\mathsf{id}_A) : \|A\|_n \to A$를 정의할 수 있습니다. 그러면 정의에 의해 $\mathsf{ext}(\mathsf{id}_A) \circ |-|_n = \mathsf{id}_A : A \to A$가 성립합니다. $|-|_n \circ \mathsf{ext}(\mathsf{id}_A) = \mathsf{id}_{\|A\|_n}$임을 증명하려면 $|-|_n \circ \mathsf{ext}(\mathsf{id}_A) \circ |-|_n = \mathsf{id}_{\|A\|_n} \circ |-|_n$임을 증명하기만 하면 됩니다. 이 역시 다음과 같이 성립합니다:



□

n-타입의 범주는 모든 반영적 부분범주가 갖지는 않는 몇 가지 특별한 성질도 가집니다. 예를 들어, 반영자 $\|-\|_n$는 유한 곱을 보존합니다.

정리 7.3.8. 임의의 타입 A와 B에 대해, 유도된 사상 $\|A \times B\|_n \to \|A\|_n \times \|B\|_n$는 동치입니다.

증명. $\|A\|_n \times \|B\|_n$가 $\|A \times B\|_n$와 같은 보편 성질을 가짐을 보이면 충분합니다. 따라서 C를 n-타입이라고 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}(\|A\|_n \times \|B\|_n \to C) &= (\|A\|_n \to (\|B\|_n \to C)) \\ &= (\|A\|_n \to (B \to C)) \\ &= (A \to (B \to C)) \\ &= (A \times B \to C)\end{aligned}$$

여기서는 $\|B\|_n$와 $\|A\|_n$의 보편 성질과 함께, C가 n-타입이므로 $B \to C$도 n-타입이라는 사실을 사용하였습니다. 이 동치가 필요한 대로 $|-|_n \times |-|_n$과의 합성으로 주어짐은 쉽게 확인할 수 있습니다. □

의존 합에 관한 다음의 관련 사실이 자주 유용합니다.

정리 7.3.9. $P : A \to \mathcal{U}$를 타입족이라고 합시다. 그러면 다음 동치가 존재합니다.

$$\left\|\sum_{x:A} \|P(x)\|_n\right\|_n \simeq \left\|\sum_{x:A} P(x)\right\|_n.$$

증명. n-절단의 귀납 원리를 여러 번 사용하여 다음 함수들

$$\begin{aligned}\varphi &: \left\|\sum_{x:A} \|P(x)\|_n\right\|_n \to \left\|\sum_{x:A} P(x)\right\|_n \\ \psi &: \left\|\sum_{x:A} P(x)\right\|_n \to \left\|\sum_{x:A} \|P(x)\|_n\right\|_n\end{aligned}$$

그리고 이들이 서로 준역원임을 보여 주는 호모토피 $H : \varphi \circ \psi \sim \mathsf{id}$와 $K : \psi \circ \varphi \sim \mathsf{id}$를 구성합니다. φ는 $\varphi(|(x, |u|_n)|_n) :\equiv |(x, u)|_n$로 두어 정의합니다. ψ는 $\psi(|(x, u)|_n) :\equiv |(x, |u|_n)|_n$로 두어 정의합니다. 그런 다음 $H(|(x, u)|_n) :\equiv \mathsf{refl}_{|(x,u)|_n}$와 $K(|(x, |u|_n)|_n) :\equiv \mathsf{refl}_{|(x,|u|_n)|_n}$로 정의합니다. □

따름정리 7.3.10. A가 n-타입이고 $P : A \to \mathcal{U}$가 임의의 타입 족이면, 다음이 성립합니다.

$$\sum_{a:A} \|P(a)\|_n \simeq \left\|\sum_{a:A} P(a)\right\|_n$$

증명. A가 n-타입이면 위의 좌변 타입은 이미 n-타입이므로 자신의 n-절단과 동치입니다. 따라서 이는 정리 7.3.9로부터 따라옵니다. □

§§2.12 및 2.13에서 쌍대곱과 자연수에 대해 사용했던 것과 같은 방법(그리고 제8장에서 호모토피 군을 계산할 때 사용할 방법)으로 절단의 경로 공간을 특성화할 수 있습니다. 예상대로, A의 $(n+1)$-절단의 경로 공간은 A의 경로 공간의 n-절단입니다. 실제로 임의의 $x, y : A$에 대해 다음과 같은 표준 사상이 존재합니다.

$$f : \|x =_A y\|_n \to \left(|x|_{n+1} =_{\|A\|_{n+1}} |y|_{n+1}\right) \tag{7.3.11}$$

이 사상은 다음과 같이 정의됩니다.

$$f(|p|_n) :\equiv \mathsf{ap}_{|-|_{n+1}}(p).$$

이 정의는 $\|-\|_n$의 재귀 원리를 사용합니다. $\|A\|_{n+1}$가 $(n+1)$-절단되어 있어 f의 공역이 n-절단되어 있으므로 이 정의는 올바릅니다.

정리 7.3.12. 임의의 A와 $x, y : A$ 그리고 $n \geq -2$에 대하여 사상 (7.3.11)은 동치입니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\|x =_A y\|_n \simeq \left(|x|_{n+1} =_{\|A\|_{n+1}} |y|_{n+1}\right).$$

증명. 증명은 인코드-디코드 방법을 간단히 적용한 것입니다. 앞선 상황들과 마찬가지로, $|x|_{n+1}$와 $|y|_{n+1}$ 사이의 등식에 대해 귀납할 방법이 없으므로 사상 (7.3.11)의 준역원을 직접 정의할 수는 없습니다. 따라서 그 대신 $|x|_{n+1}$와 $|y|_{n+1}$ 자리에 타입 $\|A\|_{n+1}$의 일반적인 원소를 둘 수 있도록 그 타입을 일반화합니다. $P : \|A\|_{n+1} \to \|A\|_{n+1} \to n\text{-}\mathsf{Type}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$P(|x|_{n+1}, |y|_{n+1}) :\equiv \|x =_A y\|_n$$

$\|x =_A y\|_n$가 n-절단되어 있고, 정리 7.1.11에 의해 n-Type이 $(n+1)$-절단되어 있으므로 이 정의는 올바릅니다. 이제 모든 $u, v : \|A\|_{n+1}$에 대하여 다음 사상이 존재합니다.

$$\mathsf{decode} : P(u, v) \to \left(u =_{\|A\|_{n+1}} v\right)$$

이 사상은 $u = |x|_{n+1}$, $v = |y|_{n+1}$, $p : x = y$에 대하여 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{decode}(|p|_n) :\equiv \mathsf{ap}_{|-|_{n+1}}(p).$$

decode의 공역이 n-절단되어 있으므로 이 형태의 u와 v에 대해서만 정의하면 충분하며, 그러면 앞에서와 똑같은 정의가 됩니다. 또한 다음 함수를

$$r : \prod_{u:\|A\|_{n+1}} P(u, u)$$

u에 대한 귀납법으로 정의합니다. 여기서 $r(|x|_{n+1}) :\equiv |\mathsf{refl}_x|_n$입니다.

이제 역사상

$$\mathsf{encode} : \left(u =_{\|A\|_{n+1}} v\right) \to P(u, v)$$

을 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{encode}(p) :\equiv \mathsf{transport}^{v \mapsto P(u,v)}(p, r(u)).$$

합성

$$\left(u =_{\|A\|_{n+1}} v\right) \xrightarrow{\mathsf{encode}} P(u, v) \xrightarrow{\mathsf{decode}} \left(u =_{\|A\|_{n+1}} v\right)$$

이 항등 함수임을 보이려면, 경로 귀납법에 의해 $\mathsf{refl}_u : u = u$에 대해서만 확인하면 충분하며, 이 경우 알아야 할 것은 $\mathsf{decode}(r(u)) = \mathsf{refl}_u$라는 사실입니다. 그런데 이것은 $(n-1)$-타입이고 따라서 $(n+1)$-타입이기도 하므로 $u \equiv |x|_{n+1}$라고 가정할 수 있으며, 이 경우 r과 decode의 정의에 의해 성립합니다. 마지막으로

$$P(u, v) \xrightarrow{\mathsf{decode}} \left(u =_{\|A\|_{n+1}} v\right) \xrightarrow{\mathsf{encode}} P(u, v)$$

가 항등 함수임을 보이려면, 이 목표 역시 $(n-1)$-타입이므로 $u = |x|_{n+1}$이고 $v = |y|_{n+1}$이며 어떤 $p : x = y$에 대하여 $|p|_n : P(|x|_{n+1}, |y|_{n+1})$를 고려하고 있다고 가정할 수 있습니다. 그러면 다음이

성립합니다.

$$\begin{aligned}\mathsf{encode}(\mathsf{decode}(|p|_n)) &= \mathsf{encode}(\mathsf{ap}_{|-|_{n+1}}(p)) \\ &= \mathsf{transport}^{v\mapsto P(|x|_{n+1},v)}(\mathsf{ap}_{|-|_{n+1}}(p), |\mathsf{refl}_x|_n) \\ &= \mathsf{transport}^{y\mapsto \|x=y\|_n}(p, |\mathsf{refl}_x|_n) \\ &= \left|\mathsf{transport}^{y\mapsto (x=y)}(p, \mathsf{refl}_x)\right|_n \\ &= |p|_n,\end{aligned}$$

여기서 보조정리 2.3.10 및 2.3.11를 사용했습니다. (또는 p에 대해 경로 귀납법을 적용할 수도 있으며, 그러면 원하는 등식이 판단적으로 성립합니다.) 이로써 decode 와 encode 가 서로 준역원이라는 증명이 완성됩니다. 진술된 결과는 $u = |x|_{n+1}$이고 $v = |y|_{n+1}$인 특수한 경우입니다. □

따름정리 7.3.13. $n \geq -2$라 하고 (A, a)를 점을 가진 타입이라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\left\|\Omega(A,a)\right\|_n = \Omega\left(\|(A,a)\|_{n+1}\right)$$

증명. 이것은 앞의 보조정리에서 $x = y = a$인 특수한 경우입니다. □

따름정리 7.3.14. $n \geq -2$, $k \geq 0$이라 하고 (A, a)를 점을 가진 타입이라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\left\|\Omega^k(A,a)\right\|_n = \Omega^k\left(\|(A,a)\|_{n+k}\right).$$

증명. Ω^k의 재귀적 정의를 사용하여 k에 대한 귀납법으로 증명합니다. □

또한 "절단은 누적적"이라는 것도 관찰할 수 있습니다. 즉, n-타입으로 절단한 다음 $k \leq n$인 k-타입으로 절단한다면, 처음부터 곧바로 k-타입으로 절단한 것과 다를 바 없습니다.

보조정리 7.3.15. $k \leq n$인 $k, n \geq -2$와 $A : \mathcal{U}$가 주어졌다고 합시다. 그러면 $\|\|A\|_n\|_k = \|A\|_k$입니다.

증명. 두 사상 $f : \|\|A\|_n\|_k \to \|A\|_k$와 $g : \|A\|_k \to \|\|A\|_n\|_k$를 다음과 같이 정의합니다.

$$f(||a|_n|_k) :\equiv |a|_k \qquad \text{그리고} \qquad g(|a|_k) :\equiv ||a|_n|_k.$$

$\|A\|_k$는 k-절단되어 있고 ($k \leq n$이므로) n-절단되어 있기도 하므로 사상 f는 잘 정의되며, $\|\|A\|_n\|_k$가 k-절단되어 있으므로 사상 g도 잘 정의됩니다.

합성 $f \circ g : \|A\|_k \to \|A\|_k$는 $(f \circ g)(|a|_k) = |a|_k$를 만족하므로 $f \circ g = \mathsf{id}_{\|A\|_k}$입니다. 마찬가지로 $(g \circ f)(||a|_n|_k) = ||a|_n|_k$이므로 $g \circ f = \mathsf{id}_{\|\|A\|_n\|_k}$입니다. □

7.4 n-타입의 쌍대극한

§6.8에서 고차 귀납적 타입을 사용하여 타입의 푸시아웃을 정의하고 그 보편 성질을 증명했던 것을 떠올리십시오. 일반적으로 n-타입들의 (호모토피) 쌍대극한은 더 이상 n-타입이 아닐 수 있습니다 (극단적인 반례는 연습문제 7.2을 참고하십시오). 그러나 이를 n-절단하면, 다른 n-타입들에 대하여 올바른 보편 성질을 만족하는 n-타입을 얻습니다.

이 절에서는 쌍대극한 중 가장 중요하고 비자명한 경우인 푸시아웃에 대해 이를 증명합니다. §6.8의 다음 정의들을 상기하십시오.

정의 7.4.1. **스팬** 은 $f : C \to A$와 $g : C \to B$를 갖는 5-튜플 $\mathscr{D} = (A, B, C, f, g)$입니다.

$$\mathscr{D} = \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

정의 7.4.2. 스팬 $\mathscr{D} = (A, B, C, f, g)$와 타입 D가 주어졌을 때, **밑이 D인 $\mathscr{D}$ 아래의 쌍대뿔**은 $i : A \to D$, $j : B \to D$, $h : \prod_{(c:C)} i(f(c)) = j(g(c))$로 이루어진 세쌍 (i, j, h) 입니다:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \overset{h}{\swarrow\!\!\!/} & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow[i]{} & D \end{array}$$

이러한 모든 쌍대뿔의 타입을 $\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$로 나타냅니다.

쌍대뿔의 타입은 (공변적으로) 함자적입니다. 예를 들어, D, E 와 사상 $t : D \to E$가 주어지면 다음과 같은 사상이 존재합니다.

$$\begin{cases} \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D) & \longrightarrow & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \\ c & \longmapsto & t \circ c \end{cases}$$

이는 다음과 같이 정의됩니다:

$$t \circ (i, j, h) = (t \circ i, t \circ j, \mathsf{ap}_t \circ h).$$

또한 D, E, F, 함수 $t : D \to E$, $u : E \to F$ 및 $c : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$가 주어지면 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{id}_D \circ c = c \tag{7.4.3}$$

$$(u \circ t) \circ c = u \circ (t \circ c). \tag{7.4.4}$$

정의 7.4.5. n-타입들의 스팬 $\mathscr{D}$, n-타입 D, 쌍대뿔 $c : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$가 주어졌을 때, 쌍 (D, c)를 **n-타입에서의 $\mathscr{D}$의 푸시아웃** 이라고 부르는 조건은 모든 n-타입 E에 대해 다음 사상이

$$\begin{cases} (D \to E) & \longrightarrow & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \\ t & \longmapsto & t \circ c \end{cases}$$

동치인 것입니다.

n-타입들의 푸시아웃을 구성하려면 스팬과 쌍대뿔을 반영하는 방법을 설명해야 합니다.

정의 7.4.6. 다음이

$$\mathscr{D} = \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

스팬이라고 합시다. $\|\mathscr{D}\|_n$로 다음과 같은 n-타입들의 스팬을 나타냅니다:

$$\|\mathscr{D}\|_n :\equiv \quad \begin{array}{ccc} \|C\|_n & \xrightarrow{\|g\|_n} & \|B\|_n \\ {\scriptstyle \|f\|_n}\downarrow & & \\ \|A\|_n & & \end{array}$$

정의 7.4.7. $D : \mathcal{U}$이고 $c = (i, j, h) : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$라고 합시다. 다음과 같이 정의합니다.

$$\|c\|_n = (\|i\|_n, \|j\|_n, k) : \mathsf{cocone}_{\|\mathscr{D}\|_n}(\|D\|_n)$$

여기서 k는 다음 합성 호모토피입니다.

$$\|i\|_n \circ \|f\|_n \sim \|i \circ f\|_n \sim \|j \circ g\|_n \sim \|j\|_n \circ \|g\|_n$$

이때 보조정리 7.3.5와 $\|-\|_n$의 함자성을 사용합니다.

이제 각 타입에서 그 타입의 n-절단으로 가는 사상들이 다음과 같은 의미에서 하나의 스팬 사상을 이룬다는 점을 관찰합니다.

정의 7.4.8. 다음이

$$\mathscr{D} = \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array} \qquad \text{그리고} \qquad \mathscr{D}' = \quad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{g'} & B' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \\ A' & & \end{array}$$

스팬이라고 합시다. **스팬 사상** $\mathscr{D} \to \mathscr{D}'$은 함수 $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$, $\gamma : C \to C'$와 호모토피 $\phi : \alpha \circ f \sim f' \circ \gamma$, $\psi : \beta \circ g \sim g' \circ \gamma$로 이루어집니다.

따라서 임의의 스팬 $\mathscr{D}$에 대해, $|-|_n^A$, $|-|_n^B$, $|-|_n^C$ 및 (7.3.4)의 자연성 호모토피 nat_n^f, nat_n^g으로 이루어진 스팬 사상 $|-|_n^{\mathscr{D}} : \mathscr{D} \to \|\mathscr{D}\|_n$를 얻습니다.

또한 스팬 사상이 함자적으로 작용한다는 점도 알아야 합니다. 즉, $(\alpha, \beta, \gamma, \phi, \psi) : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$가 스팬 사상이고 D가 임의의 타입이면 다음을 얻습니다.

$$\begin{cases} \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}'}(D) & \longrightarrow & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D) \\ (i, j, h) & \longmapsto & (i \circ \alpha, j \circ \beta, k) \end{cases}$$

여기서 $k : \prod_{(z:C)} i(\alpha(f(z))) = j(\beta(g(z)))$는 다음 합성입니다.

$$i(\alpha(f(z))) \overset{\mathsf{ap}_i(\phi)}{=\!=} i(f'(\gamma(z))) \overset{h(\gamma(z))}{=\!=} j(g'(\gamma(z))) \overset{\mathsf{ap}_j(\psi)}{=\!=} j(\beta(g(z))). \tag{7.4.9}$$

이 쌍대뿔을 $(i, j, h) \circ (\alpha, \beta, \gamma, \phi, \psi)$로 나타냅니다. 더욱이 이 함자적 작용은 쌍대뿔의 다른 함자성과 교환됩니다.

보조정리 7.4.10. $(\alpha, \beta, \gamma, \phi, \psi) : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$와 $t : D \to E$가 주어지면 다음 도식은 가환합니다.

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}'}(D) & \xrightarrow{t\circ -} & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}'}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D) & \xrightarrow[t\circ -]{} & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \end{array}$$

증명. $(i, j, h) : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}'}(D)$가 주어졌을 때, 두 합성 모두 처음 두 성분이 $t \circ i \circ \alpha$와 $t \circ j \circ \beta$인 쌍대뿔을 내놓는다는 점에 주목하십시오. 따라서 호모토피들이 일치함을 확인하는 일만 남습니다. 위-오른쪽 합성의 경우, 호모토피는 (7.4.9)에서 (i, j, h)를 $(t \circ i, t \circ j, \mathsf{ap}_t \circ h)$로 바꾼 것입니다.

$$t\, i\, \alpha\, f\, z \overset{\mathsf{ap}_{t\circ i}(\phi)}{=\!=} t\, i\, f'\, \gamma\, z \overset{\mathsf{ap}_t(h(\gamma(z)))}{=\!=} t\, j\, g'\, \gamma\, z \overset{\mathsf{ap}_{t\circ j}(\psi)}{=\!=} t\, j\, \beta\, g\, z$$

(간결함을 위해 함수의 인자를 감싸는 괄호는 생략합니다.) 한편 왼쪽-아래 합성의 경우, 호모토피는 (7.4.9)에 ap_t를 적용한 것입니다. ap는 경로 이어붙이기를 보존하므로, 이는 다음과 같습니다.

$$t\, i\, \alpha\, f\, z \overset{\mathsf{ap}_t(\mathsf{ap}_i(\phi))}{=\!=} t\, i\, f'\, \gamma\, z \overset{\mathsf{ap}_t(h(\gamma(z)))}{=\!=} t\, j\, g'\, \gamma\, z \overset{\mathsf{ap}_t(\mathsf{ap}_j(\psi))}{=\!=} t\, j\, \beta\, g\, z.$$

그런데 $\mathsf{ap}_t \circ \mathsf{ap}_i = \mathsf{ap}_{t\circ i}$이고 j에 대해서도 마찬가지이므로, 이 두 호모토피는 같습니다. □

마지막으로, $\|c\|_n : \mathsf{cocone}_{\|\mathscr{D}\|_n}(\|D\|_n)$를 보조정리 7.3.5를 사용하여 정의했으므로, 추가 조건 (7.3.6)로부터 다음이 따른다는 점에 주목하십시오.

$$|-|_n^D \circ c = \|c\|_n \circ |-|_n^{\mathscr{D}}. \tag{7.4.11}$$

이는 임의의 $c : \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(D)$에 대해 성립합니다. 이제 원하던 정리를 증명할 수 있습니다.

정리 7.4.12. $\mathscr{D}$가 스팬이고 (D, c)가 그 푸시아웃이라고 합시다. 그러면 $(\|D\|_n, \|c\|_n)$는 n-타입들에서 $\|\mathscr{D}\|_n$의 푸시아웃입니다.

증명. E가 n-타입이라고 하고, 다음 도식을 생각합시다.

$$\begin{array}{ccc} (\|D\|_n \to E) & \xrightarrow{-\circ|-|_n^D} & (D \to E) \\ {\scriptstyle -\circ\|c\|_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ c} \\ \mathsf{cocone}_{\|\mathscr{D}\|_n}(E) & \xrightarrow{-\circ|-|_n^{\mathscr{D}}} & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \\ {\scriptstyle \ell_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \ell_2} \\ (\|A\|_n \to E) \times_{(\|C\|_n \to E)} (\|B\|_n \to E) & \longrightarrow & (A \to E) \times_{(C\to E)} (B \to E) \end{array}$$

E가 n-타입이므로 위쪽 수평 화살표는 동치이고, c가 푸시아웃 쌍대뿔이므로 $-\circ c$도 동치입니다. 따라서 2-out-of-3 성질에 의해, $-\circ\|c\|_n$가 동치임을 보이려면 위쪽 사각형이 가환하고 가운데 수평

화살표가 동치임을 보이는 것으로 충분합니다. 위쪽 사각형이 가환함을 보이기 위해 $t : \|D\|_n \to E$ 라고 합시다. 그러면

$$\begin{aligned}
\left(t \circ \|c\|_n\right) \circ |-|_n^{\mathscr{D}} &= t \circ \left(\|c\|_n \circ |-|_n^{\mathscr{D}}\right) && \text{(보조정리 7.4.10에 의해)} \\
&= t \circ \left(|-|_n^D \circ c\right) && \text{((7.4.11)에 의해)} \\
&= \left(t \circ |-|_n^D\right) \circ c. && \text{((7.4.4)에 의해)}
\end{aligned}$$

가운데 가로 화살표가 동치임을 보이기 위해 아래쪽 사각형을 생각합시다. 아래쪽의 두 세로 화살표는 단순히 happly를 적용한 것입니다.

$$\begin{aligned}
\ell_1(i,j,p) &:\equiv (i,j,\mathsf{happly}(p)) \\
\ell_2(i,j,p) &:\equiv (i,j,\mathsf{happly}(p))
\end{aligned}$$

따라서 함수 외연성에 의해 동치입니다. 맨 아래 가로 화살표는 다음과 같이 정의됩니다.

$$(i,j,p) \mapsto \left(i \circ |-|_n^A,\ \ j \circ |-|_n^B,\ \ q\right)$$

여기서 q는 다음 합성입니다.

$$\begin{aligned}
i \circ |-|_n^A \circ f &= i \circ \|f\|_n \circ |-|_n^C && \left(\mathsf{funext}(\lambda z.\, \mathsf{ap}_i(\mathsf{nat}_n^f(z))) \text{에 의해}\right) \\
&= j \circ \|g\|_n \circ |-|_n^C && \left(\mathsf{ap}_{-\circ|-|_n^C}(p) \text{에 의해}\right) \\
&= j \circ |-|_n^B \circ g. && \left(\mathsf{funext}(\lambda z.\, \mathsf{ap}_j(\mathsf{nat}_n^g(z))) \text{에 의해}\right)
\end{aligned}$$

이는 코스팬의 동치로부터 유도되므로 동치입니다. 따라서 셋 중 둘 성질에 의해, 아래쪽 사각형이 가환함을 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 아래쪽 사각형을 도는 두 합성은 처음 두 성분에서 정의상 일치하므로, 왼쪽 아래 모서리의 (i,j,p)와 $z : C$에 대해 다음 경로가

$$\mathsf{happly}(q,z) : i(|f(z)|_n) = j(|g(z)|_n)$$

(여기서 q는 위와 같습니다) 다음 합성과 같습니다.

$$\begin{aligned}
i(|f(z)|_n) &= i(\|f\|_n(|z|_n)) && \left(\mathsf{ap}_i(\mathsf{nat}_n^f(z)) \text{에 의해}\right) \\
&= j(\|g\|_n(|z|_n)) && \left(\mathsf{happly}(p,|z|_n) \text{에 의해}\right) \\
&= j(|g(z)|_n). && \left(\mathsf{ap}_j(\mathsf{nat}_n^g(z)) \text{에 의해}\right)
\end{aligned}$$

그러나 happly는 함자적이므로, 세 성분 경로에 대해 등식을 확인하면 충분합니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{happly}(\mathsf{funext}(\lambda z.\, \mathsf{ap}_i(\mathsf{nat}_n^f(z))), z) &= \mathsf{ap}_i(\mathsf{nat}_n^f(z)) \\
\mathsf{happly}(\mathsf{ap}_{-\circ|-|_n^C}(p), z) &= \mathsf{happly}(p, |z|_n) \\
\mathsf{happly}(\mathsf{funext}(\lambda z.\, \mathsf{ap}_j(\mathsf{nat}_n^g(z))), z) &= \mathsf{ap}_j(\mathsf{nat}_n^g(z)).
\end{aligned}$$

이 중 첫 번째와 세 번째는 단지 happly가 funext의 준역원이라는 사실이고, 두 번째는 happly와 선합성에 관한 쉬운 일반적인 보조정리입니다. □

7.5 연결성

n-타입은 차원 n보다 높은 차원에 흥미로운 정보가 없는 타입입니다. 반면, n-연결 타입은 차원 n보다 낮은 차원에 흥미로운 정보가 없는 타입입니다. 함수에 대해서도 더 일반적인 개념을 연구하는 것이 자연스럽다는 것이 밝혀집니다.

정의 7.5.1. 함수 $f : A \to B$는 모든 $b : B$에 대해 타입 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$가 축약 가능할 때 n-**연결**이라고 합니다:

$$\mathsf{conn}_n(f) :\equiv \prod_{b:B} \mathsf{isContr}(\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n).$$

타입 A는 유일한 함수 $A \to \mathbf{1}$가 n-연결일 때, 즉 $\|A\|_n$가 축약 가능할 때 n-**연결** 이라고 합니다.

따라서 함수 $f : A \to B$가 n-연결일 필요충분조건은 모든 $b : B$에 대해 $\mathsf{fib}_f(b)$가 n-연결인 것입니다. 물론 모든 함수는 (-2)-연결입니다. 그다음 단계에서는 다음이 성립합니다:

보조정리 7.5.2. 함수 f가 (-1)-연결일 필요충분조건은 f가 §4.6의 의미에서 전사인 것입니다.

증명. 우리는 모든 b에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_{-1}$에 원소가 존재할 때 f가 전사라고 정의했습니다. 그런데 이것은 단순 명제이므로, 원소의 존재는 축약 가능성과 동치입니다. □

따라서 $n \geq 0$일 때 함수의 n-연결성은 전사성의 강한 형태로 생각할 수 있습니다. 범주론적으로, (-1)-연결성은 대상에 대한 본질적 전사성에 대응하고, n-연결성은 $k \leq n+1$인 k-사상에 대한 본질적 전사성에 대응합니다.

보조정리 7.5.2로부터 타입 A가 (-1)-연결일 필요충분조건은 A에 원소가 단순히 존재하는 것이라는 사실도 따라 나옵니다. 타입이 0-연결일 때는 간단히 **연결**되었다고 할 수 있으며, 1-연결일 때는 **단일 연결**되었다고 합니다.

주 7.5.3. 타입에 대한 우리의 n-연결성 개념은 호모토피 이론의 표준적인 개념과 일치하지만, 함수에 대한 우리의 n-연결성 개념은 고전적 호모토피 이론에서 흔히 쓰이는 첨자 방식과 하나씩 어긋납니다. 우리는 함수 f의 모든 섬유가 n-연결일 때 f를 n-연결이라고 하지만, 일부 고전적 호모토피 이론가들은 그러한 함수를 $(n+1)$-연결이라고 부릅니다. (이는 역사적으로 섬유보다 쌍대 섬유에 초점을 맞추었기 때문입니다.)

이제 연결 사상의 몇 가지 닫힘 성질을 살펴보겠습니다.

보조정리 7.5.4. g가 n-연결 함수 f의 리트랙트라고 가정합시다. 그러면 g는 n-연결입니다.

증명. 이는 보조정리 4.7.3의 직접적인 귀결입니다. □

따름정리 7.5.5. g가 n-연결 함수 f와 호모토픽하면, g는 n-연결입니다.

보조정리 7.5.6. $f : A \to B$가 n-연결이라고 가정합시다. 그러면 $g : B \to C$가 n-연결일 필요충분조건은 $g \circ f$가 n-연결인 것입니다.

증명. 임의의 $c : C$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\left\|\mathsf{fib}_{g\circ f}(c)\right\|_n &\simeq \left\|\sum_{w:\mathsf{fib}_g(c)} \mathsf{fib}_f(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n && \text{(연습문제 4.4에 의해)}\\
&\simeq \left\|\sum_{w:\mathsf{fib}_g(c)} \left\|\mathsf{fib}_f(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n\right\|_n && \text{(정리 7.3.9에 의해)}\\
&\simeq \left\|\mathsf{fib}_g(c)\right\|_n. && (\left\|\mathsf{fib}_f(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n \text{가 축약 가능하므로})
\end{aligned}$$

따라서 $\left\|\mathsf{fib}_g(c)\right\|_n$가 축약 가능할 필요충분조건은 $\left\|\mathsf{fib}_{g\circ f}(c)\right\|_n$가 축약 가능한 것입니다. □

중요한 점은, n-연결 함수를 n-타입에 대한 "귀납 원리"를 만족하는 함수로 동치적으로 특징지을 수 있다는 것입니다. 이 발상은 §8.6에서 제시할 프로이덴탈 현수 정리의 증명으로 곧바로 이어집니다.

보조정리 7.5.7. $f : A \to B$와 $P : B \to \mathcal{U}$에 대해 다음 함수를 생각합시다:

$$\lambda s.\, s \circ f : \Big(\prod_{b:B} P(b)\Big) \to \Big(\prod_{a:A} P(f(a))\Big).$$

고정된 f와 $n \geq -2$에 대해 다음은 서로 동치입니다.

(i) f는 n-연결입니다.
(ii) 모든 $P : B \to n\text{-}\mathsf{Type}$에 대하여 사상 $\lambda s.\, s \circ f$는 동치입니다.
(iii) 모든 $P : B \to n\text{-}\mathsf{Type}$에 대하여 사상 $\lambda s.\, s \circ f$는 단면을 가집니다.

증명. f가 n-연결이라고 가정하고 $P : B \to n\text{-}\mathsf{Type}$이라 합시다. 그러면 다음 동치들을 얻습니다.

$$\begin{aligned}
\prod_{b:B} P(b) &\simeq \prod_{b:B} \Big(\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n \to P(b)\Big) && (\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n\text{가 축약 가능하므로})\\
&\simeq \prod_{b:B} \Big(\mathsf{fib}_f(b) \to P(b)\Big) && (P(b)\text{가 } n\text{-타입이므로})\\
&\simeq \prod_{(b:B)} \prod_{(a:A)} \prod_{(p:f(a)=b)} P(b) && (\Sigma\text{-타입의 왼쪽 보편 성질에 의해})\\
&\simeq \prod_{a:A} P(f(a)). && (\text{경로 타입의 왼쪽 보편 성질에 의해})
\end{aligned}$$

이 동치가 실제로 $\lambda s.\, s \circ f$로 주어진다는 증명은 생략합니다. 따라서 (i)⇒(ii)이고, 명백히 (ii)⇒(iii)입니다. (iii)⇒(i)을 보이기 위해 다음 타입 족을 생각하십시오.

$$P(b) :\equiv \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n.$$

그러면 (iii)에 의해 $c(f(a)) = \left|(a, \mathsf{refl}_{f(a)})\right|_n$를 만족하는 사상 $c : \prod_{(b:B)} \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$를 얻습니다. 각 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$가 축약 가능함을 보이기 위해 다음 타입의 함수를 찾겠습니다.

$$\prod_{(b:B)} \prod_{(w:\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n)} w = c(b).$$

정리 7.3.2에 의해, 이를 위해서는 다음 타입의 함수를 찾는 것으로 충분합니다.

$$\prod_{(b:B)} \prod_{(a:A)} \prod_{(p:f(a)=b)} |(a,p)|_n = c(b).$$

그런데 변수를 재배열하고 경로 귀납법을 적용하면, 이는 다음 타입과 동치입니다.

$$\prod_{a:A} \left|(a, \mathsf{refl}_{f(a)})\right|_n = c(f(a)).$$

이 성질은 우리가 택한 $c(f(a))$에 의해 성립합니다. □

따름정리 7.5.8. 임의의 A에 대해, 표준적인 함수 $|-|_n : A \to \|A\|_n$는 n-연결입니다.

증명. 정리 7.3.2와 이에 따르는 유일성 원리에 의해 보조정리 7.5.7의 조건이 성립합니다. □

예를 들어 $n = -1$일 때, 따름정리 7.5.8는 타입에서 그 명제 절단으로 가는 사상 $A \to \|A\|$가 전사임을 말해 줍니다.

따름정리 7.5.9. 타입 A가 n-연결일 필요충분조건은 다음 사상이

$$\lambda b.\, \lambda a.\, b : B \to (A \to B)$$

모든 n-타입 B에 대하여 동치인 것입니다. 다시 말해, "A에서 n-타입으로 가는 모든 사상은 상수입니다".

증명. 공역이 $\mathbf{1}$인 함수에 보조정리 7.5.7를 적용하면 됩니다. □

보조정리 7.5.10. B가 n-타입이고 $f : A \to B$가 함수라고 합시다. 그러면 유도된 함수 $g : \|A\|_n \to B$가 동치일 필요충분조건은 f가 n-연결인 것입니다.

증명. 따름정리 7.5.8에 의해 $|-|_n$은 n-연결입니다. 따라서 $f = g \circ |-|_n$이므로, 보조정리 7.5.6에 의해 f가 n-연결일 필요충분조건은 g가 n-연결인 것입니다. 그런데 g는 n-타입 사이의 함수이므로 그 섬유 또한 n-타입입니다. 따라서 g가 n-연결일 필요충분조건은 g가 동치인 것입니다. □

연결된 점을 가진 타입은 그 기점의 포함의 연결성으로도 특징지을 수 있습니다.

보조정리 7.5.11. A가 타입이고 $a_0 : \mathbf{1} \to A$가 기점이며 $n \geq -1$이라 합시다. 그러면 A가 n-연결일 필요충분조건은 사상 a_0이 $(n-1)$-연결인 것입니다.

증명. 먼저 $a_0 : \mathbf{1} \to A$가 $(n-1)$-연결이라고 가정하고 B가 n-타입이라 합시다. 여기서는 따름정리 7.5.9를 사용하겠습니다. 사상 $\lambda b.\, \lambda a.\, b : B \to (A \to B)$는 $f \mapsto f(a_0)$로 주어지는 수축을 가지므로, 이 사상이 단면도 가짐을, 즉 임의의 $f : A \to B$에 대하여 $f = \lambda a.\, b$를 만족하는 $b : B$가 존재함을 보이는 것으로 충분합니다. $b :\equiv f(a_0)$로 택합니다. $P : A \to \mathcal{U}$를 $P(a) :\equiv (f(a) = f(a_0))$로 정의합니다. 그러면 P는 $(n-1)$-타입들의 족이고 $P(a_0)$가 성립합니다. 그러므로 $a_0 : \mathbf{1} \to A$가 $(n-1)$-연결이므로 $\prod_{(a:A)} P(a)$를 얻습니다. 따라서 원하는 대로 $f = \lambda a.\, f(a_0)$입니다.

이제 A가 n-연결이라고 가정하고, $P : A \to (n-1)\text{-}\mathsf{Type}$와 $u : P(a_0)$가 주어졌다고 합시다. 보조정리 7.5.7에 의해, $f(a_0) = u$를 만족하는 $f : \prod_{(a:A)} P(a)$를 구성하는 것으로 충분합니다. 그런데 $(n-1)\text{-}\mathsf{Type}$은 n-타입이고 A는 n-연결이므로, 따름정리 7.5.9에 의해 $P = \lambda a.\, B$를 만족하는 n-타입 B가 존재합니다. 그러므로 동치들의 족 $g : \prod_{(a:A)} (P(a) \simeq B)$를 얻습니다. $f(a) :\equiv {g_a}^{-1}(g_{a_0}(u))$로 정의하면, 원하는 대로 $f : \prod_{(a:A)} P(a)$이고 $f(a_0) = u$입니다. □

특히 점을 가진 타입 (A, a_0)가 0-연결일 필요충분조건은 $a_0 : \mathbf{1} \to A$가 전사인 것, 즉 $\prod_{(x:A)} \|x = a_0\|$인 것입니다. 반드시 점을 가지지는 않는 경우에 대한 비슷한 결과는 연습문제 7.6를 참고하십시오.

보조정리 7.5.6의 유용한 변형은 다음과 같습니다.

보조정리 7.5.12. $f : A \to B$가 함수이고 $P : A \to \mathcal{U}$와 $Q : B \to \mathcal{U}$가 타입 족이라고 합시다. $g : \prod_{(a:A)} P(a) \to Q(f(a))$가 섬유별로 n-연결인 함수족, 즉 각 함수 $g_a : P(a) \to Q(f(a))$가 n-연결이라고 가정합시다. f도 n-연결이면, 다음 함수 역시 n-연결입니다.

$$\varphi : \left(\sum_{a:A} P(a)\right) \to \left(\sum_{b:B} Q(b)\right)$$
$$\varphi(a, u) :\equiv (f(a), g_a(u)).$$

역으로, φ와 각 g_a가 n-연결이고, 더욱이 Q가 섬유별로 단지 거주된다면(즉 모든 $b : B$에 대하여 $\|Q(b)\|$가 성립한다면), f는 n-연결입니다.

증명. 임의의 $b : B$와 $v : Q(b)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\left\|\mathsf{fib}_\varphi((b,v))\right\|_n &\simeq \left\| \sum_{(a:A)} \sum_{(u:P(a))} \sum_{(p:f(a)=b)} p_*(g_a(u)) = v \right\|_n \\
&\simeq \left\| \sum_{(w:\mathsf{fib}_f(b))} \sum_{(u:P(\mathsf{pr}_1(w)))} g_{\mathsf{pr}_1 w}(u) = \mathsf{pr}_2(w)^{-1}{}_*(v) \right\|_n \\
&\simeq \left\| \sum_{w:\mathsf{fib}_f(b)} \mathsf{fib}_{g(\mathsf{pr}_1 w)}(\mathsf{pr}_2(w)^{-1}{}_*(v)) \right\|_n \\
&\simeq \left\| \sum_{w:\mathsf{fib}_f(b)} \left\|\mathsf{fib}_{g(\mathsf{pr}_1 w)}(\mathsf{pr}_2(w)^{-1}{}_*(v))\right\|_n \right\|_n \\
&\simeq \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n
\end{aligned}$$

여기서 $f(p)$와 $f(p)^{-1}$을 따른 수송은 Q에 대한 것입니다. 따라서 둘 중 하나가 축약 가능하면 다른 하나도 축약 가능합니다.

특히 f가 n-연결이면 모든 $b : B$에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$가 축약 가능하고, 따라서 모든 $(b,v) : \sum_{(b:B)} Q(b)$에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_\varphi((b,v))\right\|_n$도 축약 가능합니다. 한편 φ가 n-연결이면 모든 (b,v)에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_\varphi((b,v))\right\|_n$가 축약 가능하고, 따라서 어떤 $v : Q(b)$가 존재하는 임의의 $b : B$에 대해 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$도 축약 가능합니다. 마지막으로, 축약 가능성은 단순 명제이므로 그러한 v가 단순히 존재하기만 하면 충분합니다. □

Q가 섬유별로 단순히 원소를 가지지 않으면 보조정리 7.5.12의 역방향은 성립하지 않을 수 있습니다. 예를 들어 P와 Q가 모두 $\mathbf{0}$ 값을 갖는 상수 족이면 φ와 각 g_a는 동치이지만, f는 임의의 것일 수 있습니다.

다른 방향으로는 다음이 성립합니다.

보조정리 7.5.13. $P, Q : A \to \mathcal{U}$를 타입 족이라 하고 다음과 같은 섬유별 변환을 생각합시다.

$$f : \prod_{a:A} \Big(P(a) \to Q(a)\Big)$$

이는 P에서 Q로 가는 변환입니다. 그러면 유도된 사상 $\mathsf{total}(f) : \sum_{(a:A)} P(a) \to \sum_{(a:A)} Q(a)$가 n-연결일 필요충분조건은 각 $f(a)$가 n-연결인 것입니다.

물론 "필요조건" 방향은 보조정리 7.5.12의 특수한 경우이기도 합니다.

증명. 정리 4.7.6에 의해 각 $x : A$와 $v : Q(x)$에 대해 $\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}((x,v)) \simeq \mathsf{fib}_{f(x)}(v)$가 성립합니다. 따라서 $\left\|\mathsf{fib}_{\mathsf{total}(f)}((x,v))\right\|_n$가 축약 가능할 필요충분조건은 $\left\|\mathsf{fib}_{f(x)}(v)\right\|_n$가 축약 가능한 것입니다. □

연결 사상에 관한 또 다른 유용한 사실은 연결 사상이 n-절단 사이의 동치를 유도한다는 것입니다.

보조정리 7.5.14. $f : A \to B$가 n-연결이면 f는 동치 $\|A\|_n \simeq \|B\|_n$를 유도합니다.

증명. c를 f가 n-연결이라는 증명이라고 합시다. 왼쪽에서 오른쪽으로는 사상 $\|f\|_n : \|A\|_n \to \|B\|_n$를 사용합니다. 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 사상을 정의하려면, 절단의 보편 성질에 의해 사상 $\mathsf{back} : B \to \|A\|_n$를 주는 것으로 충분합니다. 이 사상은 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathsf{back}(y) :\equiv \|\mathsf{pr}_1\|_n(\mathsf{pr}_1(c(y))).$$

정의에 의해 $c(y)$는 타입 $\mathsf{isContr}(\|\mathsf{fib}_f(y)\|_n)$를 가지므로, 그 첫 번째 성분은 타입 $\|\mathsf{fib}_f(y)\|_n$를 가지며, 여기에 사영을 적용하여 $\|A\|_n$의 원소를 얻을 수 있습니다.

다음으로 합성들이 항등 사상임을 보입니다. 두 방향 모두에서 목표는 n-절단된 타입 안의 경로이므로, 생성자 $|-|_n$의 경우만 다루면 충분합니다.

한 방향으로는 모든 $x : A$에 대해 다음을 보여야 합니다.

$$\|\mathsf{pr}_1\|_n(\mathsf{pr}_1(c(f(x)))) = |x|_n.$$

그런데 $\left|(x, \mathsf{refl}_{f(x)})\right|_n : \|\mathsf{fib}_f(f(x))\|_n$이고, $c(f(x))$는 이 타입이 축약 가능하다는 것을 말해 주므로 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{pr}_1(c(f(x))) = |(x, \mathsf{refl})|_n.$$

이 등식의 양변에 $\|\mathsf{pr}_1\|_n$을 적용하면 원하는 결과를 얻습니다.

다른 방향으로는 모든 $y : B$에 대해 다음을 보여야 합니다.

$$\|f\|_n(\|\mathsf{pr}_1\|_n(\mathsf{pr}_1(c(y)))) = |y|_n.$$

$\mathsf{pr}_1(c(y))$는 타입 $\|\mathsf{fib}_f(y)\|_n$를 가지며, 우리가 원하는 경로는 본질적으로 $\mathsf{fib}_f(y)$의 두 번째 성분이지만, 절단이 제대로 맞아떨어지는지 확인해야 합니다.

일반적으로 $p : \left\|\sum_{(x:A)} B(x)\right\|_n$가 주어졌을 때 $P(\|\mathsf{pr}_1\|_n(p))$를 증명하려 한다고 합시다. 절단 귀납법에 의해 모든 $a : A$와 $b : B(a)$에 대해 $P(|a|_n)$를 증명하면 충분합니다. 이 원리를 지금의 경우에 적용하면, 다음을 증명하는 것으로 충분합니다.

$$\|f\|_n(|a|_n) = |y|_n$$

여기서 $a : A$와 $b : f(a) = y$가 주어져 있습니다. 그런데 좌변은 $|f(a)|_n$와 같으므로, b의 양변에 $|-|_n$을 적용하면 원하는 결과를 얻습니다. □

이 사실이 n-연결 사상을 특징짓는다고 추측할 수도 있지만, 실제로 n-연결이라는 성질은 이보다 조금 더 강합니다. 예를 들어 포함 사상 $0_{\mathbf{2}} : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$은 (-1)-절단 사이의 동치를 유도하지만 전사(즉, (-1)-연결)는 아닙니다. §8.4에서 일반적으로 그 차이가 이와 유사한 약간의 추가적인 전사성이라는 것을 보게 될 것입니다.

7.6 직교 분해

집합론에서 전사와 단사는 유일 분해 체계를 이룹니다. 즉 모든 함수는 전사 다음에 단사가 오는 형태로 본질적으로 유일하게 분해됩니다. 전사가 n-연결 사상으로 자연스럽게 일반화됨을 보았으므로, 이들도 분해 체계에 참여하는지 묻는 것은 자연스럽습니다. 다음은 이에 대응하는 단사의 일반화입니다.

정의 7.6.1. 함수 $f : A \to B$는 모든 $b : B$에 대해 섬유 $\mathsf{fib}_f(b)$가 n-타입일 때 n-**절단** 되어 있다고 합니다.

특히, f가 (-2)-절단되어 있을 필요충분조건은 f가 동치인 것입니다. 그리고 물론, A가 n-타입일 필요충분조건은 $A \to \mathbf{1}$이 n-절단되어 있는 것입니다. 더욱이, n-절단된 사상은 n-타입과 마찬가지로 재귀적으로 정의할 수도 있으며, 두 정의는 서로 동등합니다.

보조정리 7.6.2. 임의의 $n \geq -2$에 대해, 함수 $f : A \to B$가 $(n+1)$-절단되어 있을 필요충분조건은 모든 $x, y : A$에 대해 사상 $\mathsf{ap}_f : (x = y) \to (f(x) = f(y))$가 n-절단되어 있는 것입니다. 특히, f가 (-1)-절단되어 있을 필요충분조건은 f가 §4.6의 의미에서 매장인 것입니다.

증명. 임의의 $(x, p), (y, q) : \mathsf{fib}_f(b)$에 대해 다음이 성립함에 주목하십시오.

$$\begin{aligned}\big((x,p) = (y,q)\big) &\equiv \sum_{r:x=y} (p = \mathsf{ap}_f(r) \cdot q) \\ &\equiv \sum_{r:x=y} (\mathsf{ap}_f(r) = p \cdot q^{-1}) \\ &\equiv \mathsf{fib}_{\mathsf{ap}_f}(p \cdot q^{-1}).\end{aligned}$$

따라서 f의 임의의 섬유 안의 임의의 경로 공간은 ap_f의 섬유입니다. 한편, $b :\equiv f(y)$와 $q :\equiv \mathsf{refl}_{f(y)}$를 택하면 ap_f의 임의의 섬유가 f의 어떤 섬유 안의 경로 공간임을 알 수 있습니다. f의 섬유들의 모든 경로 공간이 n-타입이면 f는 $(n+1)$-절단되어 있으므로, 결론이 따라 나옵니다. □

이제 상당히 자명한 방식으로 분해를 구성할 수 있습니다.

정의 7.6.3. $f : A \to B$를 함수라고 합시다. f의 n-**상** 은 다음과 같이 정의됩니다.

$$\mathsf{im}_n(f) :\equiv \sum_{b:B} \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n.$$

$n = -1$일 때는 간단히 $\mathsf{im}(f)$라고 쓰고, 이를 f의 **상**이라고 부릅니다.

보조정리 7.6.4. 임의의 함수 $f : A \to B$에 대해, 표준적인 함수 $\tilde{f} : A \to \mathsf{im}_n(f)$는 n-연결입니다. 따라서 모든 함수는 n-연결 함수 다음에 n-절단된 함수가 오는 형태로 분해됩니다.

증명. $A \simeq \sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_f(b)$임에 주목하십시오. 함수 $\tilde{f}$는 다음 표준 섬유별 변환이 유도하는 전체 공간 사이의 함수입니다.

$$\prod_{b:B} \left(\mathsf{fib}_f(b) \to \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n\right).$$

따름정리 7.5.8에 의해 각 사상 $\mathsf{fib}_f(b) \to \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n$가 n-연결되어 있으므로, 보조정리 7.5.13에 의해 $\tilde{f}$는 n-연결되어 있습니다. 마지막으로, 사영 $\mathsf{pr}_1 : \mathsf{im}_n(f) \to B$의 섬유들은 f의 섬유들의 n-절단과 동치이므로, 이 사영은 n-절단되어 있습니다. □

다음 보조정리에서는 유일 분해 정리를 증명하기 위한 도구 집합을 마련합니다.

보조정리 7.6.5. 다음과 같은 함수들의 가환 도식이 있다고 가정합시다.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & X_1 \\ {\scriptstyle g_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ X_2 & \xrightarrow[h_2]{} & B \end{array}$$

여기서 $H : h_1 \circ g_1 \sim h_2 \circ g_2$이고, g_1과 g_2는 n-연결되어 있으며 h_1과 h_2는 n-절단되어 있습니다. 그러면 다음 동치가 존재합니다.

$$E(H, b) : \mathsf{fib}_{h_1}(b) \simeq \mathsf{fib}_{h_2}(b)$$

이는 임의의 $b : B$에 대한 것이며, 임의의 $a : A$에 대해 다음 동일시가 성립합니다.

$$\overline{E}(H, a) : E(H, h_1(g_1(a)))(g_1(a), \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))}) = (g_2(a), H(a)^{-1}).$$

증명. $b : B$라고 합시다. 그러면 다음 동치들이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \mathsf{fib}_{h_1}(b) &\simeq \sum_{w:\mathsf{fib}_{h_1}(b)} \left\|\mathsf{fib}_{g_1}(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n && (g_1\text{이 } n\text{-연결이므로}) \\ &\simeq \left\| \sum_{w:\mathsf{fib}_{h_1}(b)} \mathsf{fib}_{g_1}(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n && (h_1\text{이 } n\text{-절단되어 있으므로 따름정리 7.3.10에 의해}) \\ &\simeq \left\|\mathsf{fib}_{h_1\circ g_1}(b)\right\|_n && (\text{연습문제 4.4에 의해}) \end{aligned}$$

h_2와 g_2에 대해서도 마찬가지입니다. 또한 호모토피 $H : h_1 \circ g_1 \sim h_2 \circ g_2$가 있으므로 자명한 동치 $\mathsf{fib}_{h_1\circ g_1}(b) \simeq \mathsf{fib}_{h_2\circ g_2}(b)$가 존재합니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{fib}_{h_1}(b) \simeq \mathsf{fib}_{h_2}(b)$$

이는 임의의 $b : B$에 대해 성립합니다. 바탕 함수들을 분석하면, E를 이루는 각 동치를 적용한 뒤 원소 $(g_1(a), \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))})$에 일어나는 일을 다음과 같이 나타낼 수 있습니다. 동일시 중 일부는 정의적이지만, 나머지(아래에서 $=$로 표시한 것)는 명제적일 뿐입니다. 이들을 모두 합치면 $\overline{E}(H, a)$를 얻습니다.

$$\begin{aligned} (g_1(a), \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))}) &\overset{=}{\mapsto} \left((g_1(a), \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))}), \left|(a, \mathsf{refl}_{g_1(a)})\right|_n\right) \\ &\mapsto \left|((g_1(a), \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))}), (a, \mathsf{refl}_{g_1(a)}))\right|_n \\ &\mapsto \left|(a, \mathsf{refl}_{h_1(g_1(a))})\right|_n \\ &\overset{=}{\mapsto} \left|(a, H(a)^{-1})\right|_n \\ &\mapsto \left|((g_2(a), H(a)^{-1}), (a, \mathsf{refl}_{g_2(a)}))\right|_n \\ &\mapsto \left((g_2(a), H(a)^{-1}), \left|(a, \mathsf{refl}_{g_2(a)})\right|_n\right) \\ &\mapsto (g_2(a), H(a)^{-1}) \end{aligned}$$

첫 번째 등식이 성립하는 이유는, 일반적인 b에 대해 사상 $\mathsf{fib}_{h_1}(b) \to \sum_{(w:\mathsf{fib}_{h_1}(b))} \left\|\mathsf{fib}_{g_1}(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n$는 g_1이 n-절단되어 있다는 가정이 제공하는 $\left\|\mathsf{fib}_{g_1}(\mathsf{pr}_1 w)\right\|_n$의 축약 중심을 끼워 넣는 반면, 지금 다루는 경우에는 이 타입이 자명한 원소 $\left|(a, \mathsf{refl}_{g_1(a)})\right|_n$를 가지며, 이 원소는 축약 가능성에 의해 중심과 같아야 하기 때문입니다. 두 번째 명제적 등식이 성립하는 이유는 동치 $\mathsf{fib}_{h_1 \circ g_1}(b) \simeq \mathsf{fib}_{h_2 \circ g_2}(b)$가 두 번째 성분에 $H(a)^{-1}$를 이어 붙이며, $H(a)^{-1} \cdot \mathsf{refl} = H(a)^{-1}$가 성립하기 때문입니다. 나머지 등식들이 정의적이라는 것은 (연습문제 4.4에 대한 합리적인 풀이를 가정하면) 독자가 확인할 수 있습니다. □

보조정리 7.6.4 및 7.6.5를 결합하면 다음과 같은 유일 분해 결과를 얻습니다.

정리 7.6.6. 각 $f : A \to B$에 대해, 다음과 같이 정의되는 공간 $\mathsf{fact}_n(f)$는

$$\sum_{(X:\mathcal{U})} \sum_{(g:A\to X)} \sum_{(h:X\to B)} (h \circ g \sim f) \times \mathsf{conn}_n(g) \times \mathsf{trunc}_n(h)$$

축약 가능합니다. 그 축약 중심은 다음 원소입니다.

$$(\mathsf{im}_n(f), \tilde{f}, \mathsf{pr}_1, \theta, \varphi, \psi) : \mathsf{fact}_n(f)$$

이 원소는 보조정리 7.6.4에서 비롯되며, 여기서 $\theta : \mathsf{pr}_1 \circ \tilde{f} \sim f$는 표준 호모토피이고, φ는 보조정리 7.6.4의 증명이며, ψ는 $\mathsf{pr}_1 : \mathsf{im}_n(f) \to B$의 섬유들이 n-절단되어 있다는 자명한 증명입니다.

증명. 보조정리 7.6.4에 의해 $\mathsf{fact}_n(f)$의 원소가 존재함을 알고 있으므로, $\mathsf{fact}_n(f)$가 단순 명제임을 보이는 것으로 충분합니다. 다음과 같은 두 n-분해가 있다고 가정합시다.

$$(X_1, g_1, h_1, H_1, \varphi_1, \psi_1) \qquad \text{그리고} \qquad (X_2, g_2, h_2, H_2, \varphi_2, \psi_2)$$

f의 분해입니다. 그러면 다음과 같이 점별로 이어 붙인 호모토피를 얻습니다.

$$H :\equiv (\lambda a.\, H_1(a) \cdot H_2^{-1}(a)) \;:\; (h_1 \circ g_1 \sim h_2 \circ g_2).$$

유니밸런스와 Σ-타입, 함수 타입, 경로 타입에서 경로와 수송을 특성화한 결과에 의해, 다음을 보이면 충분합니다.

(i) 동치 $e : X_1 \simeq X_2$가 존재합니다.
(ii) 호모토피 $\zeta : e \circ g_1 \sim g_2$가 존재합니다.
(iii) 호모토피 $\eta : h_2 \circ e \sim h_1$이 존재합니다.
(iv) 임의의 $a : A$에 대해 $\mathsf{ap}_{h_2}(\zeta(a))^{-1} \cdot \eta(g_1(a)) \cdot H_1(a) = H_2(a)$가 성립합니다.

이 네 가지 주장을 위의 순서대로 증명합니다.

(i) 보조정리 7.6.5에 의해 다음과 같은 섬유별 동치를 얻습니다.

$$E(H) : \prod_{b:B} \mathsf{fib}_{h_1}(b) \simeq \mathsf{fib}_{h_2}(b).$$

이는 전체 공간 사이의 동치를 유도합니다. 즉, 다음이 성립합니다.

$$\Big(\sum_{b:B} \mathsf{fib}_{h_1}(b)\Big) \;\simeq\; \Big(\sum_{b:B} \mathsf{fib}_{h_2}(b)\Big).$$

물론 보조정리 4.8.2로부터 동치 $X_1 \simeq \sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_{h_1}(b)$와 $X_2 \simeq \sum_{(b:B)} \mathsf{fib}_{h_2}(b)$도 얻습니다. 이로써 원하는 동치 $e : X_1 \simeq X_2$를 얻으며, 독자는 e의 바탕 함수가 다음과 같이 주어짐을 확인할 수 있습니다.

$$e(x) \equiv \mathsf{pr}_1(E(H, h_1(x))(x, \mathsf{refl}_{h_1(x)})).$$

(ii) 보조정리 7.6.5에 의해 $\zeta(a) :\equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(\overline{E}(H,a)) : e(g_1(a)) = g_2(a)$로 택할 수 있습니다.

(iii) 모든 $x : X_1$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{pr}_2(E(H, h_1(x))(x, \mathsf{refl}_{h_1(x)})) : h_2(e(x)) = h_1(x),$$

이로써 호모토피 $\eta : h_2 \circ e \sim h_1$을 얻습니다.

(iv) 섬유 안의 경로에 대한 특성화(보조정리 4.2.5)에 의해, 보조정리 7.6.5의 경로 $\overline{E}(H,a)$로부터 $\eta(g_1(a)) = \mathsf{ap}_{h_2}(\zeta(a)) \cdot H(a)^{-1}$를 얻습니다. 원하는 등식은 H의 정의를 대입하고 경로들을 재배열하면 얻어집니다. □

표준적인 논증을 거치면 이로부터 다음 직교성 원리를 얻습니다.

정리 7.6.7. $e : A \to B$가 n-연결되어 있고 $m : C \to D$가 n-절단되어 있다고 합시다. 그러면 다음 사상은

$$\varphi : (B \to C) \;\to \sum_{(h:A\to C)} \sum_{(k:B\to D)} (m \circ h \sim k \circ e)$$

동치입니다.

증명 개요. 공역의 임의의 (h,k,H)에 대해 $h = h_2 \circ h_1$, $k = k_2 \circ k_1$이라 합시다. 여기서 h_1과 k_1은 n-연결되어 있고 h_2와 k_2는 n-절단되어 있습니다. 그러면 $f = (m \circ h_2) \circ h_1$과 $f = k_2 \circ (k_1 \circ e)$는 모두 $m \circ h = k \circ e$의 n-분해입니다. 따라서 둘 사이에는 유일한 동치가 존재합니다. 이로부터 $\mathsf{fib}_\varphi((h,k,H))$가 축약 가능하다는 것을 이끌어 내는 일은 (다소 번거롭기는 하지만) 어렵지 않습니다. □

끝으로 상이 당김에 대해 안정적임을 보입니다.

보조정리 7.6.8. 다음 사각형이

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

당김 사각형이라고 가정하고 $b : B$라 합시다. 그러면 $\mathsf{fib}_f(b) \simeq \mathsf{fib}_g(h(b))$가 성립합니다.

증명. 이는 당김의 붙이기(연습문제 2.12)로부터 따라 나옵니다. 왜냐하면 다음 도표의 타입 X가

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow[b]{} & B & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

왼쪽 사각형의 당김일 필요충분조건은 바깥 직사각형의 당김인 것이고, $\mathsf{fib}_f(b)$는 왼쪽 사각형의 당김이며 $\mathsf{fib}_g(h(b))$는 바깥 직사각형의 당김이기 때문입니다. □

정리 7.6.9. 함수 $f : A \to B$, $g : C \to D$와 다음 다이어그램을 생각해 봅시다.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ {\scriptstyle \tilde{f}_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{g}_n} \\ \mathsf{im}_n(f) & \longrightarrow & \mathsf{im}_n(g) \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}_1} \\ B & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

바깥쪽 직사각형이 당김이면 아래쪽 사각형도 당김입니다(따라서 연습문제 2.12에 의해 위쪽 사각형도 당김입니다). 결과적으로 상은 당김에 대해 안정적입니다.

증명. 바깥쪽 사각형이 당김이라고 가정하면 다음 동치들을 얻습니다

$$\begin{aligned} B \times_D \mathsf{im}_n(g) &\equiv \sum_{(b:B)} \sum_{(w:\mathsf{im}_n(g))} h(b) = \mathsf{pr}_1 w \\ &\simeq \sum_{(b:B)} \sum_{(d:D)} \sum_{(w:\left\|\mathsf{fib}_g(d)\right\|_n)} h(b) = d \\ &\simeq \sum_{b:B} \left\|\mathsf{fib}_g(h(b))\right\|_n \\ &\simeq \sum_{b:B} \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|_n && \text{(보조정리 7.6.8에 의해)} \\ &\equiv \mathsf{im}_n(f). \end{aligned}$$

□

7.7 모달리티

n-타입과 연결성에 관한 이론은 거의 전부 훨씬 더 일반적인 상황에서 전개할 수 있습니다. 이 절의 내용은 이 책의 나머지 부분에서 사용되지 않습니다.

n-타입 이론을 일반화할 때 가장 먼저 떠오르는 생각은 보조정리 7.3.3를 정의로 삼는 것일지도 모릅니다.

정의 7.7.1. **반영적 부분유니버스** 란 술어 $P : \mathcal{U} \to \mathsf{Prop}$로서, 모든 $A : \mathcal{U}$에 대해 $P(\bigcirc A)$를 만족하는 타입 $\bigcirc A$와 사상 $\eta_A : A \to \bigcirc A$가 존재하고, $P(B)$를 만족하는 모든 $B : \mathcal{U}$에 대해 다음 사상이 동치라는 성질을 가지는 것입니다:

$$\begin{cases} (\bigcirc A \to B) & \longrightarrow & (A \to B) \\ f & \longmapsto & f \circ \eta_A \end{cases}.$$

$\mathcal{U}_P :\equiv \{\, A : \mathcal{U} \mid P(A) \,\}$로 표기하므로, $A : \mathcal{U}_P$는 $A : \mathcal{U}$이고 $P(A)$가 성립한다는 뜻입니다. 또한 위 사상의 준역원을 $\mathsf{rec}_\bigcirc$로 표기합니다. $\bigcirc$라는 표기가 다소 이상해 보일 수 있지만, 곧 그 이유가 더 분명해질 것입니다.

임의의 반영적 부분유니버스에 대해, 범주론에서 반영적 부분범주에 관해 익히 알려진 사실들을 모두 통상적인 방법으로 증명할 수 있습니다. 예를 들어 다음이 성립합니다:

- 타입 A가 $\mathcal{U}_P$에 속할 필요충분조건은 $\eta_A : A \to \bigcirc A$가 동치인 것입니다.
- $\mathcal{U}_P$는 수축 대상에 대해 닫혀 있습니다. 특히 η_A가 수축을 가지기만 하면 A는 $\mathcal{U}_P$에 속합니다.
- 연산 $\bigcirc$는 정합적 호모토피를 법으로 하는 적절한 의미에서 함자이며, 이는 필요한 만큼 높은 수준까지 엄밀하게 표현할 수 있습니다.
- $\mathcal{U}_P$에 속하는 타입들은 곱과 당김 같은 모든 극한에 대해 닫혀 있습니다. 특히 임의의 $A : \mathcal{U}_P$와 $x, y : A$에 대해 동일성 타입 $(x =_A y)$도 $\mathcal{U}_P$에 속합니다. 이 타입은 두 함수 $\mathbf{1} \to A$의 당김이기 때문입니다.
- $\mathcal{U}_P$에서의 쌍대극한은 타입들의 일반적인 쌍대극한에 $\bigcirc$를 적용하여 구성할 수 있습니다.

중요한 점은 곱에 대해 닫혀 있다는 성질이 "무한 곱", 즉 의존 함수 타입으로도 확장된다는 것입니다.

정리 7.7.2. $B : A \to \mathcal{U}_P$가 반영적 부분유니버스 $\mathcal{U}_P$ 에 속하는 임의의 타입족이면, $\prod_{(x:A)} B(x)$도 $\mathcal{U}_P$에 속합니다.

증명. 임의의 $x : A$에 대해 $\mathsf{ev}_x(f) :\equiv f(x)$로 정의된 함수 $\mathsf{ev}_x : (\prod_{(x:A)} B(x)) \to B(x)$를 생각해 봅시다. $B(x)$가 P에 속하므로, 이 함수는 다음 함수로 확장됩니다.

$$\mathsf{rec}_{\bigcirc}(\mathsf{ev}_x) : \bigcirc\Big(\prod_{x:A} B(x)\Big) \to B(x).$$

따라서 $h(z)(x) :\equiv \mathsf{rec}_{\bigcirc}(\mathsf{ev}_x)(z)$로 $h : \bigcirc(\prod_{(x:A)} B(x)) \to \prod_{(x:A)} B(x)$를 정의할 수 있습니다. 그러면 h는 $\eta_{\prod_{(x:A)} B(x)}$의 수축이므로 $\prod_{(x:A)} B(x)$는 $\mathcal{U}_P$에 속합니다. □

특히 $B : \mathcal{U}_P$이고 A가 임의의 타입이면 $(A \to B)$는 $\mathcal{U}_P$ 에 속합니다. 범주론의 언어로 말하면, 이는 모든 반영적 부분유니버스가 **지수 아이디얼**이라는 뜻입니다. 그리고 이로부터 표준적인 논증에 의해 반영자가 유한 곱을 보존한다는 사실이 따라 나옵니다.

따름정리 7.7.3. 임의의 타입 A, B와 임의의 반영적 부분유니버스에 대해, 유도된 사상 $\bigcirc(A \times B) \to \bigcirc(A) \times \bigcirc(B)$는 동치입니다.

증명. $\bigcirc(A) \times \bigcirc(B)$가 $\bigcirc(A \times B)$와 같은 보편 성질을 가진다는 것을 보이면 충분합니다. $\mathcal{U}_P$의 타입들이 극한에 대해 닫혀 있다는 위의 언급에 의해 이 타입은 $\mathcal{U}_P$에 속합니다. 이제 $C : \mathcal{U}_P$라고 하면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}(\bigcirc(A) \times \bigcirc(B) \to C) &= (\bigcirc(A) \to (\bigcirc(B) \to C)) \\ &= (\bigcirc(A) \to (B \to C)) \\ &= (A \to (B \to C)) \\ &= (A \times B \to C)\end{aligned}$$

여기서 $\bigcirc(B)$와 $\bigcirc(A)$의 보편 성질, 그리고 C가 $\mathcal{U}_P$ 에 속하므로 $B \to C$도 $\mathcal{U}_P$ 에 속한다는 사실을 사용하였습니다. 이 동치가 필요한 대로 $\eta_A \times \eta_B$와의 합성으로 주어진다는 것은 쉽게 확인할 수 있습니다. □

타입들의 모든 반영적 부분범주가 자동으로 지수 아이디얼이 되고, 그 반영자가 곱을 보존한다는 것이 이상해 보일 수 있습니다. 그러나 고전적으로도 집합의 범주에서 같은 이유로 이 사실이 성립합니다. 다만 고전적인 집합의 범주는 — 호모토피 타입의 범주와 달리 — 흥미로운 반영적 부분범주를 많이 가지고 있지 않기 때문에, 이 사실이 보통 언급되지 않을 뿐입니다.

n-타입의 두 가지 기본 성질인 정리 7.1.8(Σ-타입에 대해 닫혀 있음)와 정리 7.3.2(절단 귀납법)는 일반적인 반영적 부분유니버스에서는 성립하지 않습니다. 그러나 이 두 성질에 대응하는 성질들은 서로 동치입니다.

정리 7.7.4. 반영적 부분유니버스 $\mathcal{U}_P$ 에 대해 다음은 논리적으로 동치입니다.

(i) $A : \mathcal{U}_P$ 이고 $B : A \to \mathcal{U}_P$ 이면 $\sum_{(x:A)} B(x)$ 는 $\mathcal{U}_P$ 에 속합니다.

(ii) 모든 $A : \mathcal{U}$, 타입 족 $B : \bigcirc A \to \mathcal{U}_P$, 사상 $g : \prod_{(a:A)} B(\eta(a))$ 에 대하여, 모든 $a : A$ 에 대해 $f(\eta(a)) = g(a)$ 를 만족하는 $f : \prod_{(z:\bigcirc A)} B(z)$ 가 존재합니다.

증명. 조건 (i)을 가정합시다. 그러면 (ii)의 상황에서 타입 $\sum_{(z:\bigcirc A)} B(z)$ 는 $\mathcal{U}_P$ 에 속하며, $g'(a) :\equiv (\eta(a), g(a))$ 로 정의되는 $g' : A \to \sum_{(z:\bigcirc A)} B(z)$ 가 있습니다. 따라서 $\mathsf{rec}_\bigcirc(g')(\eta(a)) = (\eta(a), g(a))$ 를 만족하는 $\mathsf{rec}_\bigcirc(g') : \bigcirc A \to \sum_{(z:\bigcirc A)} B(z)$ 가 있습니다.

이제 함수 $\mathsf{pr}_1 \circ \mathsf{rec}_\bigcirc(g') : \bigcirc A \to \bigcirc A$ 와 $\mathsf{id}_{\bigcirc A}$ 를 생각해 봅시다. 가정에 의해 이 두 함수는 η 를 앞에 합성하면 같아집니다. 따라서 $\bigcirc$ 의 보편 성질에 의해 이 두 함수는 이미 같습니다. 즉 모든 z 에 대해 $p_z : \mathsf{pr}_1(\mathsf{rec}_\bigcirc(g')(z)) = z$ 가 있습니다. 이제 다음을 정의할 수 있습니다. $f(z) :\equiv p_{z*}(\mathsf{pr}_2(\mathsf{rec}_\bigcirc(g')(z)))$, 정의 7.7.1의 동치가 갖는 수반 성질을 사용하면, 다음의 첫 번째 성분이 $\mathsf{rec}_\bigcirc(g')(\eta(a)) = (\eta(a), g(a))$ $p_{\eta(a)}$ 와 같음을 보일 수 있습니다. 따라서 그 두 번째 성분으로부터 필요한 대로 $f(\eta(a)) = g(a)$ 를 얻습니다.

역으로, 조건 (ii)를 가정하고 $A : \mathcal{U}_P$ 이며 $B : A \to \mathcal{U}_P$ 라고 합시다. h 를 다음 합성이라고 합시다.

$$\bigcirc\Big(\sum_{x:A} B(x)\Big) \xrightarrow{\bigcirc(\mathsf{pr}_1)} \bigcirc A \xrightarrow{(\eta_A)^{-1}} A.$$

그러면 $z : \sum_{(x:A)} B(x)$ 에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} h(\eta(z)) &= \eta^{-1}(\bigcirc(\mathsf{pr}_1)(\eta(z))) \\ &= \eta^{-1}(\eta(\mathsf{pr}_1(z))) \\ &= \mathsf{pr}_1(z). \end{aligned}$$

이 경로를 p_z 로 나타냅시다. 이제 $C : \bigcirc(\sum_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U}$ 를 $C(w) :\equiv B(h(w))$ 로 정의하면 다음이 성립합니다.

$$g :\equiv \lambda z.\, p_{z*}(\mathsf{pr}_2(z)) \;:\; \prod_{z:\sum_{(x:A)} B(x)} C(\eta(z)).$$

따라서 가정으로부터 다음을 얻습니다. $f : \prod_{(w:\bigcirc(\sum_{(x:A)} B(x)))} C(w)$ 여기서 이 함수는 $f(\eta(z)) = g(z)$ 를 만족합니다. h 와 f 를 함께 사용하면 다음 함수를 얻습니다. $k : \bigcirc(\sum_{(x:A)} B(x)) \to \sum_{(x:A)} B(x)$ 이 함수는 $k(w) :\equiv (h(w), f(w))$ 로 정의되며, p_z 와 등식 $f(\eta(z)) = g(z)$ 는 k 가 $\eta_{\sum_{(x:A)} B(x)}$ 의 수축(retraction)임을 보여 줍니다. 그러므로 $\sum_{(x:A)} B(x)$ 는 $\mathcal{U}_P$ 에 속합니다. □

§5.5의 논의와 비슷하다는 점에 주목하십시오. 반영적 부분유니버스의 반영자가 가지는 보편 성질은 유일성 성질을 갖춘 재귀 원리와 같고, 정리 7.7.4(ii)는 그에 대응하는 귀납 원리와 같습니다.

여기서는 $\mathcal{U}_P$에 속하는 타입으로만 제거할 수 있다는 제약이 있습니다. 이 때문에 §5.5에서와 달리 두 원리가 동치가 아닙니다. 이 간극을 메워 주는 것이 정리 7.7.4의 조건 (i)입니다.

당연하게도 귀납 원리가 있으면 재귀 원리를 유도할 수 있습니다. 경로 타입으로 제거하는 것을 허용하기만 하면 그 유일성 성질도 유도할 수 있습니다. 이로부터 다음 정의를 생각할 수 있습니다. $P(A) = \mathsf{isequiv}(\eta_A)$이므로 임의의 반영적 부분유니버스는 연산 $\bigcirc : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$과 함수 $\eta_A : A \to \bigcirc A$로 특징지을 수 있다는 점에 유의하십시오.

정의 7.7.5. **모달리티** 는 다음이 존재하는 연산 $\bigcirc : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$입니다

(i) 모든 타입 A에 대해 함수 $\eta^{\bigcirc}_A : A \to \bigcirc(A)$가 존재합니다.
(ii) 모든 $A : \mathcal{U}$과 모든 타입 족 $B : \bigcirc(A) \to \mathcal{U}$에 대하여 다음 함수가 존재합니다.

$$\mathsf{ind}_{\bigcirc} : \Big(\prod_{a:A} \bigcirc(B(\eta^{\bigcirc}_A(a)))\Big) \to \prod_{z:\bigcirc(A)} \bigcirc(B(z)).$$

(iii) 각 $f : \prod_{(a:A)} \bigcirc(B(\eta^{\bigcirc}_A(a)))$에 대해 경로 $\mathsf{ind}_{\bigcirc}(f)(\eta^{\bigcirc}_A(a)) = f(a)$가 존재합니다.
(iv) 임의의 $z, z' : \bigcirc(A)$에 대하여 함수 $\eta^{\bigcirc}_{z=z'} : (z = z') \to \bigcirc(z = z')$는 동치입니다.

$\eta^{\bigcirc}_A : A \to \bigcirc(A)$가 동치이면 A가 $\bigcirc$에 대하여 **양상적** 이라고 하며, 다음 표기를 사용합니다.

$$\mathcal{U}_{\bigcirc} :\equiv \{\, X : \mathcal{U} \mid X\bigcirc\text{-양상적입니다} \,\} \tag{7.7.6}$$

이는 양상적 타입들의 타입을 나타냅니다.

조건 (ii)와 (iii)은 정리 7.7.4(ii)와 매우 유사하지만, B가 $\mathcal{U}_P$에 값을 갖는다고 가정하는 대신 $\bigcirc B(z)$를 사용하여 서술되어 있습니다. 이렇게 하면 술어 $P : \mathcal{U} \to \mathsf{Prop}$가 미리 주어질 것을 요구하지 않고 순전히 연산 $\bigcirc$만으로 조건을 서술할 수 있습니다. (이는 완전히 만족스럽지는 않은데, 조항 (iv)에서 여전히 P를 꽤 노골적으로 언급해야 하기 때문입니다. 조항 (iv)가 (i)–(iii)으로부터 따라 나오는지는 알지 못합니다.) 그러나 정리 7.7.4(ii)의 더 강해 보이는 성질은 정의 7.7.5(ii)와 (iii)으로부터 따라 나옵니다. 임의의 $C : \bigcirc A \to \mathcal{U}_{\bigcirc}$에 대하여 $C(z) \simeq \bigcirc C(z)$가 성립하고, 이 동치를 거슬러 되돌아갈 수 있기 때문입니다.

다른 귀납 원리들과 마찬가지로, 이로부터 보편 성질이 따라 나옵니다.

정리 7.7.7. A를 타입이라 하고 $B : \bigcirc(A) \to \mathcal{U}_{\bigcirc}$이라 합시다. 그러면 다음 함수

$$(- \circ \eta^{\bigcirc}_A) : \Big(\prod_{z:\bigcirc(A)} B(z)\Big) \to \Big(\prod_{a:A} B(\eta^{\bigcirc}_A(a))\Big)$$

는 동치입니다.

증명. 정의에 의해 연산 $\mathsf{ind}_{\bigcirc}$은 $(- \circ \eta^{\bigcirc}_A)$의 오른쪽 역입니다. 따라서 다음 호모토피

$$\prod_{z:\bigcirc(A)} s(z) = \mathsf{ind}_{\bigcirc}(s \circ \eta^{\bigcirc}_A)(z)$$

를 각 $s : \prod_{(z:\bigcirc(A))} B(z)$에 대해 찾아서 이것이 왼쪽 역이기도 함을 보이기만 하면 됩니다. 가정에 의해 각 $B(z)$는 양상적이므로, 각 타입 $s(z) = R^{\bigcirc}_X(s \circ \eta^{\bigcirc}_A)(z)$ 역시 양상적입니다. 따라서 다음 타입의 함수

$$\prod_{a:A} s(\eta^{\bigcirc}_A(a)) = \mathsf{ind}_{\bigcirc}(s \circ \eta^{\bigcirc}_A)(\eta^{\bigcirc}_A(a))$$

를 찾으면 충분하며, 이는 정의 7.7.5(iii)에서 따라 나옵니다. □

특히 모든 타입 A와 모든 양상적 타입 B에 대해 동치 $(\bigcirc A \to B) \simeq (A \to B)$가 성립합니다.

따름정리 7.7.8. 임의의 모달리티 $\bigcirc$에 대해 $\bigcirc$-모달 타입들은 정리 7.7.4의 동치인 조건들을 만족하는 반영적 부분유니버스를 이룹니다.

따라서 모달리티는 Σ-타입에 대해 닫혀 있는 반영적 부분유니버스와 동일시할 수 있습니다. 물론 모달리티라는 이름은 양상 논리에서 왔으며, 양상 논리는 "아마도 A"(보통 $\Diamond A$로 씁니다)나 "반드시 A"(보통 $\Box A$로 씁니다)와 같은 명제를 만들 수 있는 논리를 연구합니다. 기호 $\bigcirc$은 임의의 양상 연산자를 나타내는 데 꽤 흔히 쓰입니다. 명제-타입 대응 원리 아래에서 양상 논리의 의미에서의 모달리티는 타입에 대한 연산에 대응하며, 정의 7.7.5는 그러한 연산을 어떻게 정의해야 하는지에 대한 합리적인 후보로 보입니다. (더 정확히 말하면, 이것들을 멱등적이고 모나드적인 모달리티라고 불러야 할 것입니다. 주석을 참조하십시오.) §3.10에서 언급했듯이, 일반적으로 이러한 모달리티에 대해 비형식적으로 말할 때 부사를 사용할 수 있습니다. 예를 들어 명제 절단에 대해서는 "단순히"를, 항등 모달리티 (즉, $\bigcirc A :\equiv A$로 정의되는 모달리티)에 대해서는 "순수하게"를 사용합니다.

임의의 모달리티 $\bigcirc$에 대해, 사상 $f : A \to B$는 모든 $b : B$에 대해 $\bigcirc(\mathsf{fib}_f(b))$가 축약 가능할 때 $\bigcirc$-**연결**되어 있다고 정의합니다. 또한 모든 $b : B$에 대해 $\mathsf{fib}_f(b)$가 모달일 때 $\bigcirc$-**절단**되어 있다고 정의합니다. §§7.5 및 7.6의 이론 가운데 서로 다른 n 값에 대한 n-타입들을 연관 짓지 않는 부분은 모두 이 일반적인 상황에서 그대로 성립합니다. 특히 직교 분해 체계를 얻습니다.

n-절단을 포함하지 않는 중요한 모달리티의 부류로 좌완전 모달리티가 있습니다. 이는 함자 $\bigcirc$이 유한 곱뿐만 아니라 당김도 보존하는 모달리티입니다. 이들은 초등 토포스 이론에서의 "Lawvere-Tierney 위상"의 범주화이며, 고차 범주론적 의미론에서는 부분-$(\infty,1)$-토포스에 대응합니다. 그러나 이는 이 책의 범위를 벗어납니다.

n-절단 이외의 모달리티의 구체적인 예 몇 가지는 연습문제에서 찾을 수 있습니다.

주

고전적 호모토피 이론에서 호모토피 n-타입의 개념은 꽤 오래되었습니다. 이 개념을 축약 가능성에서 출발하여 호모토피 타입 이론에서 재귀적으로 정의할 수 있다는 것을 깨달은 사람은 Voevodsky입니다.

"공리 K"라는 성질은 Thomas Streicher가 동일성 타입의 성질로서 J 다음에 온다는 뜻으로 붙인 이름이며, J는 동일성 타입의 제거자를 가리키는 전통적인 이름입니다. 정리 7.2.5는 Hedberg [Hed98]의 결과이며, [KECA13]에 더 많은 정보와 일반화가 담겨 있습니다.

n-연결 공간과 n-연결 함수의 개념 역시 호모토피 이론에서 고전적인 개념입니다. 다만 앞서 언급했듯이 함수의 연결성에 대한 우리의 인덱싱은 고전적인 인덱싱과 1만큼 어긋나 있습니다. 이렇게 얻어지는 분해 체계의 중요성은 Rezk, Lurie 등이 고차 토포스 이론에서 수행한 최근 연구에서 강조되었습니다. 특히 이 장의 결과는 [Lur09, §6.5.1]와 비교해 보아야 합니다. §8.6에서 n-연결 사상의 이론은 프로이덴탈 현수 정리를 증명하는 데 핵심적인 역할을 할 것입니다.

단순 타입 이론에서의 양상 연산자는 광범위하게 연구되어 왔습니다. 예를 들어 [dPGM04]를 참고하십시오. 의존 타입 이론의 설정에서는 [AB04]가 명제 절단((-1)-절단)이라는 특수한 경우를 양상 연산자로 다룹니다. 여기에서 제시한 전개는 토포스 이론의 아이디어도 활용하면서 이 연구를 크게 확장하고 일반화합니다.

일반적으로 양상 연산자에는 (적어도) 두 종류가 있습니다. 하나는 $\Diamond$("아마도")처럼 $A \Rightarrow \Diamond A$가 성립하는 것이고, 다른 하나는 $\Box$("필연적으로")처럼 $\Box A \Rightarrow A$가 성립하는 것입니다. 이들이 멱등이기도 하면(즉 $\Diamond A = \Diamond\Diamond A$ 또는 $\Box A = \Box\Box A$이면), 전자는 반영적 부분범주(또는 동치적으로 멱등 모나드)와 동일시할 수 있고, 후자는 쌍대반영적 부분범주(또는 멱등 쌍대모나드)와 동일시할

수 있습니다. 그러나 의존 타입 이론에서는 쌍대모나드적인 종류를 다루기가 더 까다롭습니다. 이들은 당김에 대해 안정적인 경우가 더 드물고, 따라서 유니버스 $\mathcal{U}$ 에 대한 연산으로 해석할 수 없기 때문입니다. 이 문제를 우회하는 방법이 있는 경우도 있지만(예를 들어 [SS12]를 참고하십시오), 여기서는 단순함을 위해 모나드적인 종류만 다룹니다.

계산적인 측면에서 모나드(따라서 모달리티)는 함수형 프로그래밍에서 계산 효과를 모델링하는 데 사용됩니다 [Mog89]. 실행해도 부수 효과(화면에 메시지 출력하기, 음악 재생하기, 인터넷으로 데이터 보내기 등)가 생기지 않는 계산을 순수하다고 합니다. Haskell처럼 "순수 함수형" 프로그래밍 언어도 있습니다. 이런 언어에서는 엄밀히 말해 순수 함수만 작성할 수 있으며, 부수 효과는 출력 타입에 "모나드"를 적용하여 표현합니다. 예를 들어 $\mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$ 타입의 함수는 순수합니다. 반면 $\mathsf{Int} \to \mathsf{IO}(\mathsf{Int})$ 타입의 함수는 결과를 계산하는 도중에 입력과 출력을 수행할 수 있습니다. 여기서 연산 IO가 모나드입니다. (항등 모나드는 계산적으로 부수 효과가 없는 순수 함수에 대응합니다. 우리가 항등 모나드에 "순수하게"라는 부사를 쓰는 것은 여기서 비롯되었습니다.) 이 장에서 살펴본 모달리티는 모두 멱등이지만, 함수형 프로그래밍에서 사용되는 모달리티는 멱등인 경우가 드뭅니다. 그럼에도 두 개념은 여전히 밀접하게 관련되어 있습니다.

연습문제

연습문제 7.1.

(i) 정리 7.2.2를 사용하여, 모든 타입 A에 대해 $\|A\| \to A$이면 모든 타입이 집합임을 보이십시오.

(ii) 모든 전사 함수가 (순수하게) 분할된다면, 즉 다음이 $\prod_{(b:B)} \|\mathsf{fib}_f(b)\| \to \prod_{(b:B)} \mathsf{fib}_f(b)$ 모든 $f : A \to B$에 대해 성립하면, 모든 타입이 집합임을 보이십시오.

연습문제 7.2. 이 연습문제에서는 다음과 같은 일반적인 쌍대극한 개념을 고려합니다. **그래프** Γ를 타입 Γ_0과 족 $\Gamma_1 : \Gamma_0 \to \Gamma_0 \to \mathcal{U}$로 이루어진 것으로 정의합니다. 그래프 Γ 위의 (타입들의) **도식**은 족 $F : \Gamma_0 \to \mathcal{U}$와 함께 각 $x, y : \Gamma_0$에 대한 함수 $F_{x,y} : \Gamma_1(x,y) \to F(x) \to F(y)$로 이루어집니다. 이러한 도식의 **쌍대극한**은 다음에 의해 생성되는 고차 귀납적 타입 $\mathsf{colim}(F)$입니다.

- 각 $x : \Gamma_0$에 대해 함수 $\mathsf{inc}_x : F(x) \to \mathsf{colim}(F)$, 그리고
- 각 $x, y : \Gamma_0$와 $\gamma : \Gamma_1(x,y)$와 $a : F(x)$에 대해 경로 $\mathsf{inc}_y(F_{x,y}(\gamma, a)) = \mathsf{inc}_x(a)$.

더 일반적인 종류의 쌍대극한도 있지만(예를 들어 연습문제 7.16를 참고하십시오), 많은 목적에는 이것으로 충분합니다.

(i) §6.8에서 정의한 푸시아웃과 Γ-다이어그램의 쌍대극한을 동일시할 수 있는 그래프 Γ를 제시하십시오. 다시 말해, 각 스팬은 Γ 위의 다이어그램을 유도해야 하며, 그 다이어그램의 쌍대극한은 해당 스팬의 푸시아웃이어야 합니다.

(ii) 모든 x에 대해 $F(x) = \mathbf{1}$이지만 $\mathsf{colim}(F) = \mathbb{S}^2$인 그래프 Γ와 Γ 위의 다이어그램 F를 제시하십시오. $\mathbf{1}$은 (-2)-타입이지만, $\mathbb{S}^2$은 어떤 유한한 n에 대해서도 n-타입이 아닐 것으로 예상된다는 점에 유의하십시오. 연습문제 7.16도 참고하십시오.

연습문제 7.3. $n \geq -1$일 때, A가 n-타입이고 $B : A \to n\text{-Type}$이 n-타입들의 족이면, W-타입 $\mathsf{W}_{(a:A)} B(a)$(§5.3 참고) 역시 n-타입임을 보이십시오.

연습문제 7.4. 보조정리 7.5.13을 사용하여 보조정리 7.5.11를 임의의 단면-수축 쌍으로 확장하십시오.

연습문제 7.5. 따름정리 7.5.9가 반대 방향의 특성화로도 성립함을 보이십시오. 즉, B가 n-타입일 필요충분조건은 n-연결된 타입에서 B로 가는 모든 사상이 상수 사상인 것입니다. 이상적으로는, 여러분의 증명이 §7.7에서와 같은 임의의 모달리티에 대해서도 성립해야 합니다.

연습문제 7.6. $n \geq -1$일 때, 타입 A가 n-연결일 필요충분조건은 A가 단순히 거주되어 있고 모든 $a, b : A$에 대해 타입 $a =_A b$가 $(n-1)$-연결인 것임을 증명하십시오. 따라서 모든 타입은 (-2)-연결이므로, 타입의 n-연결성은 명제 절단만을 사용하여 귀납적으로 정의할 수 있습니다. (특히, A가 0-연결일 필요충분조건은 $\|A\|$이고 $\prod_{(a,b:A)} \|a = b\|$인 것입니다.)

연습문제 7.7. $-1 \leq n, m \leq \infty$에 대해, $\mathsf{LEM}_{n,m}$이 다음 명제를 나타낸다고 합시다.

$$\prod_{A:n\text{-}\mathsf{Type}} \|A + \neg A\|_m,$$

여기서 $\infty\text{-}\mathsf{Type} :\equiv \mathcal{U}$이고 $\|X\|_\infty :\equiv X$입니다. 다음을 보이십시오.

(i) $n = -1$ 또는 $m = -1$이면, $\mathsf{LEM}_{n,m}$은 §3.4의 LEM과 동치입니다.
(ii) $n \geq 0$이고 $m \geq 0$이면, $\mathsf{LEM}_{n,m}$은 유니밸런스와 모순됩니다.

연습문제 7.8. $-1 \leq n, m \leq \infty$에 대해, $\mathsf{AC}_{n,m}$이 다음 명제를 나타낸다고 합시다.

$$\prod_{(X:\mathsf{Set})} \prod_{(Y:X\to n\text{-}\mathsf{Type})} \left(\prod_{x:X} \|Y(x)\|_m\right) \to \left\|\prod_{x:X} Y(x)\right\|_m,$$

여기서 규약은 연습문제 7.7에서와 같습니다. 따라서 $\mathsf{AC}_{0,-1}$은 §3.8의 선택 공리이고, $\mathsf{AC}_{\infty,\infty}$는 항등함수입니다. (만약 $\mathsf{AC}_{n,m}$을 (3.8.3)이 아니라 (3.8.1)와 유사하게 정식화했다면, $\mathsf{AC}_{\infty,\infty}$는 정리 2.15.7와 같은 것이 되었을 것입니다.) $\mathsf{AC}_{\infty,-1}$은 Voevodsky의 단체 모형에서 성립하므로 유니밸런스와 무모순임이 알려져 있습니다.

(i) 유니밸런스를 사용하지 않고, $\mathsf{LEM}_{n,\infty}$가 모든 m에 대해 $\mathsf{AC}_{n,m}$을 함의함을 보이십시오. (한편, §10.1.5에서는 $\mathsf{AC} = \mathsf{AC}_{0,-1}$이 $\mathsf{LEM} = \mathsf{LEM}_{-1,-1}$을 함의함을 보일 것입니다.)
(ii) 물론 $k \leq n$이면 $\mathsf{AC}_{n,m} \Rightarrow \mathsf{AC}_{k,m}$입니다. 원리 $\mathsf{AC}_{n,m}$들 사이에 다른 함의 관계가 있습니까? 어떤 $m \geq 0$과 어떤 n에 대해서든 $\mathsf{AC}_{n,m}$이 유니밸런스와 무모순입니까? (이들은 미해결 문제입니다.)

연습문제 7.9. $\mathsf{AC}_{n,-1}$이 임의의 n-타입 A에 대해 집합 B와 전사 $B \to A$가 단순히 존재함을 함의한다는 것을 보이십시오.

연습문제 7.10. 다음 명제를 **n-연결 선택 공리**로 정의하십시오.

> X가 집합이고 $Y : X \to \mathcal{U}$이 각 $Y(x)$가 n-연결인 타입족이면, $\prod_{(x:X)} Y(x)$는 n-연결입니다.

(-1)-연결 선택 공리는 연습문제 7.8의 $\mathsf{AC}_{\infty,-1}$이라는 점에 유의하십시오.

(i) (-1)-연결 선택 공리가 모든 $n \geq -1$에 대해 n-연결 선택 공리를 함의함을 증명하십시오.
(ii) n-연결 선택 공리들과 원리 $\mathsf{AC}_{n,m}$들 사이에 다른 함의 관계가 있습니까? (이는 미해결 문제입니다.)

연습문제 7.11. n-절단 모달리티는 어떤 $n \geq -1$에 대해서도 좌완전이 아님을 보이십시오. 즉, 이 모달리티가 보존하지 못하는 당김을 제시하십시오.

연습문제 7.12. $X \mapsto (\neg\neg X)$가 모달리티임을 보이십시오.

연습문제 7.13. P가 단순 명제라고 합시다.

(i) $X \mapsto (P \to X)$가 좌완전 모달리티임을 보이십시오. 이를 P에 연관된 **열린 모달리티** 라고 부릅니다.

(ii) $X \mapsto P * X$가 좌완전 모달리티임을 보이십시오. 여기서 $*$는 조인을 나타냅니다(§6.8 참조). 이를 P에 연관된 **닫힌 모달리티** 라고 합니다.

연습문제 7.14. $f : A \to B$를 사상이라고 합시다. $(- \circ f) : (B \to Z) \to (A \to Z)$가 동치이면 타입 Z를 f-**국소적** 이라고 합니다.

(i) f-국소 타입들이 반영적 부분유니버스를 이룸을 증명하십시오. 반영자(국소화)를 정의할 때 고차 귀납적 타입을 사용하게 될 것입니다.

(ii) $B = \mathbf{1}$이면 이 부분유니버스가 모달리티임을 증명하십시오.

연습문제 7.15. 주 6.7.1와 달리, $\|A\|_n$를 함수 $|-|_n : A \to \|A\|_n$와 함께 각 $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$ 및 각 $x : \mathbb{S}^{n+1}$에 대한 경로 $s_r(x) : r(x) = r(\mathsf{base})$로 생성되는 것으로 동치적으로 정의할 수 있음을 보이십시오.

연습문제 7.16. 이 연습문제에서는 연습문제 7.2에서보다 조금 더 정교한 쌍대극한 개념을 살펴봅니다. **합성이 있는 그래프** Γ를 연습문제 7.2에서와 같은 그래프에 더하여, 각 $x, y, z : \Gamma_0$에 대해 $\delta \mapsto \gamma \mapsto \delta \circ \gamma$로 표기하는 함수 $\Gamma_1(y,z) \to \Gamma_1(x,y) \to \Gamma_1(x,z)$를 갖춘 것으로 정의하십시오. (예를 들어, 제9장에서와 같은 모든 준범주는 합성이 있는 그래프입니다.) 합성이 있는 그래프 Γ 위의 **도식** F는 기저 그래프 위의 도식에 더하여, 각 $x, y, z : \Gamma_0$와 $\gamma : \Gamma_1(x,y)$ 및 $\delta : \Gamma_1(y,z)$에 대한 호모토피 $\mathsf{cmp}_{x,y,z}(\delta,\gamma) : F_{y,z}(\delta) \circ F_{x,y}(\gamma) \sim F_{x,z}(\delta \circ \gamma)$로 이루어집니다. 이러한 도식의 **쌍대극한**은 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입 $\mathsf{colim}(F)$입니다.

- 각 $x : \Gamma_0$에 대한 함수 $\mathsf{inc}_x : F(x) \to \mathsf{colim}(F)$,
- 각 $x, y : \Gamma_0$와 $\gamma : \Gamma_1(x,y)$ 및 $a : F(x)$에 대한 경로 $\mathsf{glue}_{x,y}(\gamma, a) : \mathsf{inc}_y(F_{x,y}(\gamma, a)) = \mathsf{inc}_x(a)$, 그리고
- 각 $x, y, z : \Gamma_0$와 $\gamma : \Gamma_1(x,y)$, $\delta : \Gamma_1(y,z)$ 및 $a : F(x)$에 대한 다음 경로

$$\mathsf{inc}_z\Big(\mathsf{cmp}_{x,y,z}(\delta,\gamma,a)\Big) \cdot \mathsf{glue}_{x,z}(\delta \circ \gamma, a) = \mathsf{glue}_{y,z}(\delta, F_{x,y}(\gamma,a)) \cdot \mathsf{glue}_{x,y}(\gamma,a).$$

(이는 완전히 호모토피 이론적인 도식 및 쌍대극한 개념에 대한 "2차 근사"이며, 그러한 개념은 이런 종류의 "정합성 경로"를 모든 고차 수준에서 포함해야 합니다. 이러한 것들을 타입 이론에서 정의하는 것은 중요한 미해결 문제입니다.)

Γ_0가 집합이고 각 타입 $\Gamma_1(x,y)$가 단순 명제인 합성이 있는 그래프 Γ와, 모든 x에 대해 $F(x) = \mathbf{1}$이면서 $\mathsf{colim}(F) = \mathbb{S}^2$가 되는 Γ 위의 도식 F를 제시하십시오.

연습문제 7.17. 보조정리 7.5.12 및 7.5.13을 비교해 보면, $f : A \to B$가 n-연결이고 $g : \prod_{(a:A)} P(a) \to Q(f(a))$가 n-연결 사상 $\left(\sum_{(a:A)} P(a)\right) \to \left(\sum_{(b:B)} Q(b)\right)$를 유도하면 g가 섬유별로 n-연결이라고 추측하고 싶어질 수 있습니다. 이것이 거짓임을 보이는 반례를 제시하십시오. (사실 모달리티로 일반화하면 이 성질은 좌완전 모달리티를 특징짓습니다. 연습문제 7.13를 참조하십시오.)

연습문제 7.18. $f : A \to B$가 n-연결이면 $\|f\|_k : \|A\|_k \to \|B\|_k$도 n-연결임을 보이십시오.

연습문제 7.19. 타입 A가 **범주적으로 연결되어** 있다는 것은, 모든 타입 B, C에 대해 다음과 같이 정의되는 표준 사상 $e_{A,B,C} : ((A \to B) + (A \to C)) \to (A \to B + C)$

$$e_{A,B,C}(\mathsf{inl}(g)) :\equiv \lambda x.\, \mathsf{inl}(g(x)),$$
$$e_{A,B,C}(\mathsf{inr}(g)) :\equiv \lambda x.\, \mathsf{inr}(g(x))$$

가 동치라는 뜻입니다.

(i) 임의의 연결 타입이 범주론적으로 연결되어 있음을 보이십시오.

(ii) 범주론적으로 연결된 모든 타입이 연결 타입이라는 것은 LEM이 성립하는 것과 동치임을 보이십시오. (힌트: $\neg\neg P$가 성립하는 $A :\equiv \Sigma P$를 생각하십시오.)

제II부

수학

제8장

호모토피 이론

이 장에서는 타입 이론 안에서 호모토피 이론의 일부를 전개합니다. 우리는 제2장에서 소개한 호모토피 이론에 대한 종합적 접근을 사용합니다. 공간, 점, 경로, 호모토피는 기본 개념이며, 타입과 타입의 원소, 특히 동일성 타입으로 표현됩니다. 경로와 호모토피의 대수적 구조는 타입 위의 자연스러운 ∞-그루포이드 구조로 표현되며, 이 구조는 동일성 타입의 규칙들로부터 생성됩니다. 제6장에서 소개한 고차 귀납적 타입을 사용하면 공간을 그 보편 성질로 직접 기술할 수 있습니다.

이 종합적 접근 방식에는 몇 가지 흥미로운 측면이 있습니다. 첫째, 이 접근 방식은 구체적인 모형(위상 공간이나 단체 집합 등)의 장점과 호모토피 이론을 위한 추상적인 범주론적 틀(Quillen 모형 범주 등)의 장점을 결합합니다. 한편으로 우리의 증명은 초등적으로 느껴지며, 타입 안의 점, 경로, 호모토피를 구체적으로 다룹니다. 다른 한편으로 우리의 접근 방식은 그럼에도 이러한 대상의 어떠한 구체적인 표현으로부터도 추상화되어 있습니다. 예를 들어 경로 이어붙이기의 결합 법칙은 사상 $[0,1] \to X$의 재매개변수화나 뿔 채우기 조건이 아니라 경로 귀납법으로 증명됩니다. 타입 이론은 ∞-그루포이드의 추상적인 호모토피 이론을 연구하는 매우 편리한 방법으로 보입니다. 동일성 타입에 대한 규칙을 사용하면 ∞-그루포이드의 여러 정의에 수반되는 복잡한 조합론을 피할 수 있으며, 각각의 증명에 필요한 만큼의 구조만 명시적으로 드러낼 수 있습니다.

타입 이론의 추상적인 본성은 우리의 증명이 다양한 환경에서 자동으로 적용된다는 것을 뜻합니다. 특히 앞서 언급했듯이 호모토피 타입 이론은 Kan 단체 집합에서 하나의 해석을 가지며, 이는 ∞-그루포이드의 호모토피 이론에 대한 하나의 모형입니다. 따라서 우리의 증명은 이 모형에 적용되며, 이를 단체 집합에서 위상 공간으로 가는 기하학적 실현 함자를 따라 옮기면 고전적 호모토피 이론에서 대응하는 정리들의 증명을 얻습니다. 그뿐 아니라, 세부 사항은 아직 연구가 진행 중이지만, 타입 이론은 $(\infty,1)$-토포스처럼 ∞-그루포이드의 범주와 닮은 매우 다양한 다른 범주에서도 해석할 수 있습니다. 따라서 타입 이론에서 어떤 결과를 증명하면 그 결과가 이러한 환경에서도 성립함을 보이게 됩니다. 이러한 종류의 추가적인 일반성은 일반적인 범주론적 논리의 성질로 잘 알려져 있으며, 유니밸런트 기초는 이를 호모토피 이론으로까지 확장합니다.

둘째, 우리의 종합적 접근 방식은 새로운 타입 이론적 방법과 증명을 제시해 왔습니다. 우리의 증명 중 일부는 고전적인 증명을 상당히 직접적으로 옮겨 적은 것입니다. 다른 증명들은 좀 더 타입 이론적인 느낌을 주며, 주로 ∞-그루포이드 연산을 이용한 계산으로 이루어져 있는데, 그 방식은 컴퓨터 과학자들이 컴퓨터 프로그램에 대해 추론하기 위해 타입 이론을 사용하는 방식과 매우 비슷합니다. 이러한 새로운 증명을 가능하게 한 것으로 보이는 한 가지 요인은 타입 이론이 다른 접근 방식과는 다른 호모토피 이론의 측면을 강조한다는 사실입니다. 경로 귀납법이나 고차 귀납적 타입의 보편 성질 같은 도구는 Kan 단체 집합 같은 환경에서도 사용할 수 있지만, 타입 이론에서는 이들이 이러한

타입을 다루는 데 쓸 수 있는 유일한 원시적 도구이므로 그 중요성이 커집니다. 이러한 도구에 집중한 결과, 원의 보편 피복이나 호프 올뭉치 같은 익숙한 구성을 고차 귀납적 타입의 재귀 원리만을 사용하여 새롭게 기술할 수 있게 되었습니다. 이러한 기술은 매우 직접적이며, 이 장의 많은 증명은 그러한 올뭉치를 이용한 계산적인 계산을 포함합니다. 우리 증명의 또 다른 새로운 측면은 그것들이 구성적이라는 점입니다(유니벌런스와 고차 귀납적 타입이 구성적이라고 가정할 때). 이를 구면의 호모토피 군에 응용한 사례는 §8.10에서 설명합니다.

셋째, 우리의 종합적 접근은 Coq 나 Agda 와 같은 증명 보조기에서의 컴퓨터 검증 증명에 매우 적합합니다. 이 장에서 설명하는 증명의 거의 전부가 컴퓨터로 검증되었으며, 그중 많은 증명은 먼저 증명 보조기에서 제시된 다음 이 책을 위해 "비형식화"되었습니다. 컴퓨터로 검증한 증명은 여기에 제시된 비형식적 증명과 길이 및 노력 면에서 비슷하며, 어떤 경우에는 오히려 더 짧고 수행하기도 더 쉽습니다.

우리의 결과를 제시하기에 앞서, 호모토피 이론에 익숙하지 않은 독자를 위해 호모토피 이론의 몇 가지 기본 개념과 정리를 간략히 복습합니다. 또한 이 장에서 증명하는 결과들을 개관합니다.

호모토피 이론은 대수적 위상수학의 한 분야로, 군론과 같은 추상대수학의 도구를 사용하여 공간의 성질을 탐구합니다. 호모토피 이론가들이 탐구하는 질문 중 하나는 두 공간이 같은지를 어떻게 판별하는가이며, 여기서 "같다"는 것은 호모토피 동치를 뜻합니다(서로 반대 방향으로 가는 연속 사상으로서 그 합성이 호모토피를 무시하면 항등 사상이 되는 것을 말하며, 이는 합성이 정확히 항등 사상이 되지는 않는 사상을 "보정"할 여지를 줍니다). 두 공간이 같은지를 판별하는 흔한 방법 하나는 공간에 연관된 대수적 불변량을 계산하는 것인데, 여기에는 그 공간의 호모토피 군과 호몰로지 군 및 코호몰로지 군이 포함됩니다. 동치인 공간은 동형인 호모토피/(코)호몰로지 군을 가지므로, 두 공간이 서로 다른 군을 가진다면 그 두 공간은 동치가 아닙니다. 따라서 이러한 대수적 불변량은 공간에 대한 전역적인 정보를 제공하며, 이는 공간들을 구별하는 데 사용할 수 있고 연속성과 같은 개념이 제공하는 국소적인 정보를 보완합니다. 예를 들어 토러스는 국소적으로는 2-구면처럼 보이지만, 구멍이 하나 있기 때문에 전역적인 차이가 있으며, 이 차이는 두 공간의 호모토피 군에서 드러납니다.

호모토피 군의 가장 단순한 예는 공간의 기본군으로, $\pi_1(X, x_0)$로 씁니다. 공간 X와 그 안의 점 x_0가 주어지면, 호모토피를 무시하고 본 x_0에서의 루프(x_0에서 x_0로 가는 연속 경로)를 원소로 하는 군을 만들 수 있으며, 군 연산은 항등 경로(제자리에 머무르기), 경로 이어붙이기, 경로 뒤집기로 주어집니다. 예를 들어 2-구면의 기본군은 자명하지만 토러스의 기본군은 자명하지 않으며, 이는 구면과 토러스가 호모토피 동치가 아님을 보여 줍니다. 직관적으로 말하면, 구면 위의 모든 루프는 그 안쪽을 채울 수 있으므로 항등 경로와 호모토피 관계에 있습니다. 반면 토러스 위에서 도넛의 구멍을 통과하는 루프는 항등 경로와 호모토피 관계에 있지 않으므로, 기본군에는 자명하지 않은 원소가 존재합니다.

고차 호모토피 군은 공간에 대한 추가적인 정보를 제공합니다. X 안의 점 x_0를 고정하고 상수 경로 refl_{x_0}를 생각합시다. 그러면 refl_{x_0}와 그 자신 사이의 호모토피들의 호모토피 류는 군 $\pi_2(X, x_0)$를 이루며, 이 군은 공간의 2차원 구조에 대해 무언가를 알려 줍니다. 다음으로 $\pi_3(X, x_0)$는 호모토피들 사이의 호모토피들의 호모토피 류로 이루어진 군이며, 이런 식으로 계속됩니다. 대수적 위상수학의 기본적인 문제 중 하나는 공간 X의 호모토피 군을 계산하는 것인데, 이는 $\pi_k(X, x_0)$와 좀 더 직접적으로 기술된 어떤 군(예를 들어 곱셈표나 표시로 기술된 군) 사이의 군 동형사상을 제시하는 것을 뜻합니다. 다소 놀랍게도, 이는 구면처럼 단순한 공간에 대해서조차 매우 어려운 문제입니다. 표 8.1에서 볼 수 있듯이 구면의 고차 호모토피 군에는 몇 가지 패턴이 나타나지만 일반적인 공식은 없으며, 구면의 많은 호모토피 군이 현재까지도 알려져 있지 않습니다.

이러한 복잡성을 이해하는 한 가지 방법은 제2장에서 소개한 공간과 ∞-그루포이드 사이의 대응을 통하는 것입니다. §6.4에서 논의했듯이, 2-구면은 점 하나와 2차원 루프 하나를 가진 고차 귀납적

	$\mathbb{S}^0$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{S}^4$	$\mathbb{S}^5$	$\mathbb{S}^6$	$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{S}^8$
π_1	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
π_2	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
π_3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
π_4	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
π_5	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
π_6	0	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
π_7	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
π_8	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
π_9	0	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
π_{10}	0	0	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$
π_{11}	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_{24}$
π_{12}	0	0	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
π_{13}	0	0	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_2$	0

표 8.1: 구면의 호모토피 군 [Wik13]. n차원 구면 $\mathbb{S}^n$의 $k^{\text{번째}}$ 호모토피 군 π_k는 각 항목에 나열된 군과 동형입니다. 여기서 $\mathbb{Z}$는 정수의 덧셈군이고, $\mathbb{Z}_m$은 위수가 m인 순환군입니다.

타입으로 표시됩니다. 그러므로 타입 $\mathbb{S}^2$에 3차원 세포를 만들어 내는 생성자가 없는데 왜 $\pi_3(\mathbb{S}^2)$가 $\mathbb{Z}$인지 의아하게 여길 수 있습니다. 알고 보면 $\pi_3(\mathbb{S}^2)$의 생성 원소는 정리 2.1.6의 증명에서 설명한 교환 법칙을 사용하여 구성됩니다. ∞-그루포이드의 대수적 구조에는 단계들 사이의 자명하지 않은 상호작용이 포함되며, 이러한 상호작용이 고차 호모토피 군의 원소를 만들어 냅니다.

타입 이론은 고차 호모토피 군을 쉽게 정의할 수 있으므로 이 구조를 탐구하기 위한 자연스러운 환경을 제공합니다. 정의 2.1.8에서 $n : \mathbb{N}$에 대해 점을 가진 타입 (A, a)의 n겹 반복 루프 공간을 다음과 같이 재귀적으로 정의했음을 상기하십시오.

$$\Omega^0(A, a) = (A, a)$$
$$\Omega^{n+1}(A, a) = \Omega^n(\Omega(A, a)).$$

이는 n차원 루프들의 공간(즉, 타입)을 주며, 이 공간 자체도 고차 호모토피를 가집니다. 절단을 통해 n차원 루프들의 집합을 얻습니다(이는 §6.11에서도 예시로 정의한 바 있습니다).

정의 8.0.1 (호모토피 군). $n \geq 1$과 점을 가진 타입 (A, a)가 주어졌을 때, a에서의 A의 **호모토피 군**을 다음과 같이 정의합니다

$$\pi_n(A, a) :\equiv \left\| \Omega^n(A, a) \right\|_0$$

$n \geq 1$이므로, $\Omega^n(A)$ 위의 경로 이어붙이기 연산과 역 연산은 $\pi_n(A)$ 위의 연산을 유도하며, 이로써 $\pi_n(A)$는 자연스럽게 군이 됩니다. $n \geq 2$이면 Eckmann–Hilton 논증(정리 2.1.6)에 의해 군 $\pi_n(A)$는 아벨 군입니다. $\pi_0(A) :\equiv \|A\|_0$라고 쓰는 것도 편리하지만, 이 경우는 다소 다르게 동작합니다. 이것은 군이 아닐 뿐만 아니라, A의 어떤 기점도 참조하지 않고 정의됩니다.

이 정의가 호모토피 군을 탐구하는 데 적합한 이유는, 타입 X의 (고차) 귀납적 정의가 X를 자유 ∞-그루포이드와 유사한 자유 타입으로 표시하며, 이 표시가 X의 고차 동일성 타입을 결정하기는 하지만 명시적으로 기술하지는 않기 때문입니다. 동일성 타입에는 생성자(원의 경우 loop)와, 이 생성자들에 모든 그루포이드 연산(항등, 합성, 역, 결합, 교환, ⋯)을 적용한 결과가 모두 들어 있습니다. 따라서 공간의 고차 귀납적 표시는 "X의 동일성 타입은 실제로 무엇인가?"라는 질문을 던질 수 있게 해 주지만, 그 질문에 답하려면 상당한 수학이 필요할 수 있습니다. 이는 타입 이론에서 익숙한 사실을 고차원으로 일반화한 것입니다. 즉, X가 자연수나 불리언처럼 일반적인 귀납적 타입이라 하더라도 X의 동일성 타입을 특징짓는 데에는 어느 정도의 작업이 필요할 수 있습니다. 예를 들어 $0_{\mathbf{2}}$가 $1_{\mathbf{2}}$와 다르다는 정리는 정의로부터 곧바로 따라 나오지 않습니다. §2.12를 참고하십시오.

유니밸런스 공리는 호모토피 군을 계산하는 데 본질적인 역할을 합니다(유니밸런스가 없으면 타입 이론은 예를 들어 원 위의 루프를 포함한 모든 경로가 반사성인 해석과도 양립합니다). 이는 아래에서 원의 기본군을 계산할 때 확인할 수 있습니다. $\Omega(\mathbb{S}^1)$에서 $\mathbb{Z}$로 가는 사상은 원 위의 루프를 집합 $\mathbb{Z}$의 자기동형으로 보낸 다음, 그 자기동형을 0에 적용하는 방식으로 정의됩니다. 따라서 예를 들어 $\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}^{-1}$는 $\mathsf{successor} \cdot \mathsf{predecessor}$로 보내집니다(여기서 후속자 successor와 선행자 predecessor는 $\mathbb{Z}$의 자기동형이며, 유니밸런스에 의해 유니버스 안의 경로로 간주됩니다). 유니밸런스는 유니버스 안에 자명하지 않은 경로를 만들어 내며, 이를 이용하여 고차 귀납적 타입의 경로에서 정보를 추출합니다.

이 장에서는 먼저 구면의 몇몇 호모토피 군을 계산합니다. 여기에는 $\pi_k(\mathbb{S}^1)$(§8.1), $k < n$일 때의 $\pi_k(\mathbb{S}^n)$(§§8.2 및 8.3), 호프 올뭉치(§8.5)와 긴 완전열 논증(§8.4)을 통한 $\pi_2(\mathbb{S}^2)$와 $\pi_3(\mathbb{S}^2)$, 그리고 프로이덴탈 현수 정리(§8.6)를 통한 $\pi_n(\mathbb{S}^n)$이 포함됩니다. 다음으로 푸시아웃의 기본군을 특징짓는 판캄펀 정리(§8.7)와, 화이트헤드 원리(모든 호모토피 군에서 동치를 유도하는 사상은 언제 동치인가?)의 위상(§8.8)을 논의합니다. 마지막으로 $n \geq 3$일 때의 $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^n)$, 블레이커스–매시 정리, Eilenberg–Mac Lane 공간의 구성 등 이 책에 포함되지 않은 추가 결과들을 간략히 요약합니다(§8.10). 이 장의 선수 지식으로는 장 1, 2, 6 및 7와 제3장의 일부가 있습니다.

8.1 $\pi_1(S^1)$

이 절에서 우리의 목표는 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$임을 보이는 것입니다. 사실 우리는 루프 공간 $\Omega(\mathbb{S}^1)$이 $\mathbb{Z}$와 동치임을 보일 것입니다. 이는 더 강한 명제입니다. 정의에 의해 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \|\Omega(\mathbb{S}^1)\|_0$이므로, $\Omega(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$이면 합동에 의해 $\|\Omega(\mathbb{S}^1)\|_0 = \|\mathbb{Z}\|_0$이고, $\mathbb{Z}$는 정의에 의해 집합이므로(집합-몫이기 때문입니다. 주 6.10.7 및 6.10.11를 참고하십시오) $\|\mathbb{Z}\|_0 = \mathbb{Z}$이기 때문입니다. 게다가 $\Omega(\mathbb{S}^1)$이 집합임을 알면 $n > 1$일 때 $\pi_n(\mathbb{S}^1)$이 자명하다는 것이 따라 나오므로, 실제로는 $\mathbb{S}^1$의 모든 호모토피 군을 계산한 셈이 됩니다.

8.1.1 시작하기

$\Omega(\mathbb{S}^1)$와 $\mathbb{Z}$ 사이에서 양방향으로 함수를 정의하는 것은 그리 어렵지 않습니다. 따름정리 6.10.13를 $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$에 특수화하면, (대략적으로 말해) 다음과 같이 정의되는 함수 $\mathsf{loop}^{-} : \mathbb{Z} \to (\mathsf{base} =$

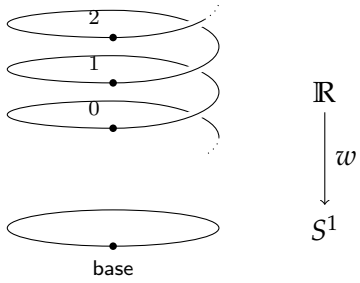


그림 8.1: 고전적 위상수학에서의 감기 사상

base)를 얻습니다.

$$\mathsf{loop}^n = \begin{cases} \underbrace{\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} \cdot \cdots \cdot \mathsf{loop}}_{n} & n > 0\text{인 경우,} \\ \underbrace{\mathsf{loop}^{-1} \cdot \mathsf{loop}^{-1} \cdot \cdots \cdot \mathsf{loop}^{-1}}_{-n} & n < 0\text{인 경우,} \\ \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} & n = 0\text{인 경우.} \end{cases}$$

반대 방향으로 함수 $g : \Omega(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$를 정의하는 것은 조금 더 까다롭습니다. 후속자 함수 $\mathsf{succ} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$는 동치이므로, 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의 경로 $\mathsf{ua}(\mathsf{succ}) : \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$를 유도한다는 점에 주목하십시오. 따라서 $\mathbb{S}^1$의 재귀 원리는 $c(\mathsf{base}) :\equiv \mathbb{Z}$와 $\mathsf{ap}_c(\mathsf{loop}) := \mathsf{ua}(\mathsf{succ})$로 사상 $c : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$을 유도합니다. 그러면 $\mathsf{ap}_c : (\mathsf{base} = \mathsf{base}) \to (\mathbb{Z} = \mathbb{Z})$를 얻으며, $g(p) :\equiv \mathsf{transport}^{X \mapsto X}(\mathsf{ap}_c(p), 0)$으로 정의할 수 있습니다.

이러한 정의를 사용하면 n에 대한 귀납 원리 보조정리 6.10.12를 이용하여 임의의 $n : \mathbb{Z}$에 대해 $g(\mathsf{loop}^n) = n$임을 증명할 수도 있습니다. (조금 뒤에 더 일반적인 것을 증명할 것입니다.) 그러나 다른 쪽 등식 $\mathsf{loop}^{g(p)} = p$는 훨씬 더 어렵습니다. 가장 먼저 시도해 볼 만한 것은 경로 귀납법이지만, 경로 귀납법은 $p : (\mathsf{base} = \mathsf{base})$처럼 양쪽 끝점이 모두 고정된 루프에는 적용되지 않습니다! 새로운 아이디어가 필요하며, 이 아이디어는 고전적 호모토피 이론의 관점과 타입 이론의 관점 모두에서 설명할 수 있습니다. 전자부터 시작하겠습니다.

8.1.2 고전적인 증명

고전적 호모토피 이론에는 보편 피복 공간을 사용한 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$의 표준적인 증명이 있습니다. 우리의 증명은 이 증명의 타입 이론적 버전으로 볼 수 있으며, 여기서 피복 공간은 섬유가 집합인 올뭉치로 나타납니다. 호모토피 이론에서 공간 B 위의 올뭉치는 타입 이론에서 타입 족 $B \to \mathcal{U}$에 대응한다는 것을 상기하십시오. 특히 점 $x_0 : B$에 대해 타입 족 $(x \mapsto (x_0 = x))$는 경로 올뭉치 $P_{x_0}B \to B$에 대응하는데, 여기서 $P_{x_0}B$의 점은 x_0에서 시작하는 B 안의 경로이고, B로 가는 사상은 그러한 경로의 다른 쪽 끝점을 선택합니다. 이 전체 공간 $P_{x_0}B$는 축약 가능한데, 임의의 경로를 그 시작 끝점 x_0로 "수축"할 수 있기 때문입니다. 이것의 타입 이론적 버전은 보조정리 3.11.8에서 이미 보았습니다. 게다가 x_0 위의 섬유는 루프 공간 $\Omega(B, x_0)$이며, 타입 이론에서 이는 루프 공간의 정의에 의해 자명합니다.

이제 $\mathbb{S}^1$을 위상 공간으로 간주하는 고전적 호모토피 이론에서는 다음과 같이 진행할 수 있습니다. 원 위로 투영되어 내려오는 나선처럼 생긴 "감기" 사상 $w : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$을 생각합시다(그림 8.1 참고).

이 사상 w는 나선 위의 각 점을 그 점이 "바로 위에 놓여 있는" 원 위의 점으로 보냅니다. 이 사상은 올뭉치이며, 각 점 위의 섬유는 정수와 동형입니다. 아래쪽 루프를 반시계 방향으로 도는 경로를 들어 올리면 나선에서 한 층 위로 올라가며, 섬유 안의 정수가 하나 증가합니다. 마찬가지로 아래쪽 루프를 시계 방향으로 도는 것은 나선에서 한 층 아래로 내려가는 것에 대응하며, 이 값이 하나 감소합니다. 이 올뭉치를 원의 보편 피복이라고 합니다.

이제 고전적 호모토피 이론의 기본적인 사실 하나는, B 위의 올뭉치들 사이의 사상 $E_1 \to E_2$가 E_1과 E_2 사이의 호모토피 동치이면 모든 섬유에서 호모토피 동치를 유도한다는 것입니다. (이것의 타입 이론적 버전도 정리 4.7.7에서 이미 보았습니다.) $\mathbb{R}$과 $P_{\mathsf{base}}S^1$은 둘 다 축약 가능한 위상 공간이므로 호모토피 동치이며, 따라서 기점 위의 섬유인 $\mathbb{Z}$와 $\Omega(\mathbb{S}^1)$ 역시 호모토피 동치입니다.

8.1.3 타입 이론에서의 보편 피복

앞의 증명을 타입 이론에서 어떻게 표현할 수 있을지 살펴봅시다. $\mathbb{S}^1$의 경로 올뭉치가 타입 족 $(x \mapsto (\mathsf{base} = x))$로 표현된다는 것은 이미 언급하였습니다. 또한 $\mathbb{S}^1$의 보편 피복에 대한 좋은 후보도 이미 보았습니다. 그것은 바로 §8.1.1에서 정의한 타입 족 $c : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$입니다! 정의에 의해 이 족의 base 위의 섬유는 $\mathbb{Z}$이며, loop을 따라 수송하는 효과는 1을 더하는 것입니다. 따라서 이 족은 그림 8.1에서 기대하는 대로 정확히 동작합니다.

그러나 이 족이 보편 피복에 기대되는 방식대로 동작한다는 것(예를 들어 그 전체 공간이 단순 연결이라는 것)을 아직 알지 못하므로, 이 족에는 다른 이름을 사용합니다. 따라서 참고를 위해 정의를 다시 적습니다.

정의 8.1.1 ($\mathbb{S}^1$의 보편 피복). 원 재귀를 이용하여 $\mathsf{code} : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathsf{code}(\mathsf{base}) :\equiv \mathbb{Z}$$
$$\mathsf{ap}_{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}) := \mathsf{ua}(\mathsf{succ}).$$

이 족의 정의는 고전적 호모토피 이론에서 피복 공간을 보통 정의하는 방식과 매우 다르므로, 이를 간략히 강조하겠습니다. 원 재귀로 함수를 정의하려면 공역에서 점 하나와 루프 하나를 찾아야 합니다. 이 경우 공역은 $\mathcal{U}$이고, 우리가 선택하는 점은 $\mathbb{Z}$인데, 이는 보편 피복의 섬유가 정수여야 한다는 우리의 기대에 대응합니다. 우리가 선택하는 루프는 $\mathbb{Z}$ 위의 후속자/선행자 동형사상이며, 이는 밑공간에서 루프를 한 바퀴 도는 것이 나선에서 한 층 올라가는 것에 대응한다는 사실에 해당합니다. 증명의 이 부분에는 유니밸런스가 필요한데, $\mathbb{Z}$ 위의 자명하지 않은 동치를 동일시로 변환해야 하기 때문입니다.

이것을 "코드"의 올뭉치라고 부르는데, 그 원소들이 원 위의 경로에 대한 코드 역할을 하는 조합적 데이터이기 때문입니다. 정수 n은 원을 n번 도는 루프를 이루는 경로를 나타내는 코드입니다.

이 정의로부터, code를 따라 수송하면 loop은 후속자 함수로, loop^{-1}은 선행자 함수로 옮겨진다는 것을 간단히 계산할 수 있습니다.

보조정리 8.1.2. $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, x) = x + 1$ 및 $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^{-1}, x) = x - 1$.

증명. 첫 번째 등식은 다음과 같이 계산합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, x) &= \mathsf{transport}^{A \mapsto A}((\mathsf{code}(\mathsf{loop})), x) && \text{(보조정리 2.3.10에 의해)} \\
&= \mathsf{transport}^{A \mapsto A}(\mathsf{ua}(\mathsf{succ}), x) && (\mathsf{rec}_{\mathbb{S}^1} \text{의 계산 규칙에 의해}) \\
&= x + 1. && (\mathsf{ua} \text{의 계산 규칙에 의해})
\end{aligned}$$

두 번째 등식은 첫 번째 등식으로부터 따라 나옵니다. $\mathsf{transport}^B(p,-)$와 $\mathsf{transport}^B(p^{-1},-)$는 항상 서로의 역이므로, $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^{-1},-)$는 succ의 역이어야 하기 때문입니다. □

이제 첫 번째 접근 방식에서 무엇이 잘못되었는지 알 수 있습니다. 우리는 $\mathbb{S}^1$ 위의 올뭉치 사이의 사상 전체를 정의했어야 했는데, f와 g를 섬유 $\Omega(\mathbb{S}^1)$과 $\mathbb{Z}$ 위에서만 정의하였습니다. 타입 이론에서 이는 다음 타입을 갖는 함수들을 정의했어야 한다는 뜻입니다.

$$\prod_{x:\mathbb{S}^1}((\mathsf{base}=x)\to\mathsf{code}(x)) \qquad \text{및/또는} \tag{8.1.3}$$

$$\prod_{x:\mathbb{S}^1}(\mathsf{code}(x)\to(\mathsf{base}=x)) \tag{8.1.4}$$

즉 x가 base 인 특수한 경우만 정의해서는 안 되었습니다. 이것은 또한 타입 이론에서 흔히 볼 수 있는 관찰의 한 예입니다. 어떤 귀납적 타입의 특정한 원소에 대해 무언가를 증명하려 할 때는, 그 타입의 모든 원소를 다루도록 명제를 일반화하는 편이 더 쉬운 경우가 많으며, 그렇게 일반화한 명제는 귀납법으로 증명할 수 있습니다. 이렇게 보면 $\Omega(\mathbb{S}^1)=\mathbb{Z}$의 증명은 §§2.12 및 2.13에서 다룬 쌍대곱과 자연수의 동일성 타입의 특성화와 같은 패턴에 들어맞습니다.

이 시점에서 증명을 마무리하는 방법은 두 가지입니다. 고전적인 논증을 계속 모방하여, (8.1.3) 또는 (8.1.4)(어느 쪽이든 상관없습니다)를 구성하고, 전체 공간 사이의 호모토피 동치가 섬유 위의 동치를 유도한다는 것을 증명한 다음, 보편 피복의 전체 공간이 축약 가능하다는 것을 증명할 수 있습니다. $\Omega(\mathbb{S}^1)=\mathbb{Z}$의 최초의 타입 이론적 증명은 이 패턴을 따랐으며, 우리는 이를 호모토피 이론적 증명이라고 부릅니다.

그러나 이후에 우리는 다른 증명이 있다는 것을 발견했습니다. 이 증명은 좀 더 타입 이론적인 느낌을 주며 §§2.12 및 2.13의 증명들을 더 가깝게 따릅니다. 이 증명에서는 (8.1.3)와 (8.1.4)를 모두 직접 구성하고, 계산을 통해 이들이 서로 역임을 증명합니다. 함수 (8.1.3)와 (8.1.4)를 각각 인코드와 디코드라고 부르므로, 이 증명을 인코드-디코드 증명이라고 부르겠습니다. 두 증명 모두 위에서 제시한 덮개의 구성을 동일하게 사용합니다. 고전적 증명이 전체 공간 사이의 동치로부터 섬유 위의 동치를 유도하는 반면, 인코드-디코드 증명은 역사상(디코드)을 섬유 사이의 사상으로서 명시적으로 구성합니다. 그리고 고전적 증명이 축약 가능성을 사용하는 반면, 인코드-디코드 증명은 경로 귀납법, 원 귀납, 정수 귀납을 사용합니다. 이들은 축약 가능성을 증명하는 데 쓰이는 것과 같은 도구들이지만 (실제로 경로 귀납법은 본질적으로 경로 올뭉치의 축약 가능성에 transport(수송)를 합성한 것입니다), 다른 방식으로 적용됩니다.

이 책은 호모토피 타입 이론에 관한 책이므로, 인코드-디코드 증명을 먼저 제시합니다. 길을 잃은 호모토피 이론가는 호모토피 이론적 증명(§8.1.5)으로 건너뛰기를 권합니다.

8.1.4 인코드-디코드 증명

경로를 코드로 사상하는 함수 (8.1.3)부터 시작합니다.

정의 8.1.5. $\mathsf{encode}:\prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(\mathsf{base}=x)\to\mathsf{code}(x)$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathsf{encode}\,p :\equiv \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(p,0)$$

(인자 x는 암묵적으로 둡니다.)

인코드는 경로를 보편 피복으로 들어 올려 동치를 결정한 다음, 그 결과로 얻은 동치를 0에 적용하는 방식으로 정의됩니다. 이 함수에서 흥미로운 점은, 원 위의 루프가 호모토피 타입 이론의 추상적인 그루포이드적 틀로 표현되어 있을 때 그 루프로부터 구체적인 수를 계산해 낸다는 것입니다. 이것이 어떻게 이루어지는지 직관을 얻기 위해, 위의 보조정리들에 의해 $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, x)$가 후속자 사상이고 $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^{-1}, x)$가 선행자 사상임을 관찰하십시오. 또한 transport(수송)는 함자적이므로 (제2장), $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}, -)$는 다음과 같습니다.

$$(\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, -)) \circ (\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, -))$$

나머지도 마찬가지입니다. 따라서 p가 다음과 같은 합성일 때,

$$\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}^{-1} \cdot \mathsf{loop} \cdot \cdots$$

$\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(p, -)$는 다음과 같은 함수들의 합성을 계산합니다.

$$\mathsf{succ} \circ \mathsf{pred} \circ \mathsf{succ} \circ \cdots$$

이 함수 합성을 0에 적용하면 경로의 감김수, 즉 역들이 상쇄된 후 경로가 원을 몇 번 도는지를 양수인지 음수인지로 방향을 표시하여 계산하게 됩니다. 따라서 encode의 계산적 동작은 고차 귀납적 타입과 유니밸런스에 대한 환원 규칙, 그리고 합성과 역에 대한 transport(수송)의 작용으로부터 따라 나옵니다.

인스턴스 $\mathsf{encode}' :\equiv \mathsf{encode}_{\mathsf{base}}$의 타입이 $(\mathsf{base} = \mathsf{base}) \to \mathbb{Z}$임에 주목하십시오. 이것이 우리가 원하는 동치의 한쪽 절반이 됩니다. 실제로 이는 §8.1.1에서 정의한 함수 g와 정확히 같습니다.

마찬가지로, 함수 (8.1.4)는 §8.1.1의 함수 loop^-를 일반화한 것입니다.

정의 8.1.6. $\mathsf{decode} : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x) \to (\mathsf{base} = x)$를 x에 대한 원 귀납법으로 정의합니다. 함수 $\mathsf{code}(\mathsf{base}) \to (\mathsf{base} = \mathsf{base})$를 제시하고(이를 위해 loop^-를 사용합니다) loop^-가 루프를 존중함을 보이면 충분합니다.

증명. loop^-가 루프를 존중함을 보이려면, loop 위에 놓인, loop^-에서 자기 자신으로 가는 경로를 제시하면 충분합니다. 의존 경로의 정의에 따르면, 이는 다음으로부터

$$\mathsf{transport}^{(x' \mapsto \mathsf{code}(x') \to (\mathsf{base} = x'))}(\mathsf{loop}, \mathsf{loop}^-)$$

loop^-로 가는 경로를 의미합니다. 그러한 경로를 다음과 같이 정의합니다:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{transport}^{(x' \mapsto \mathsf{code}(x') \to (\mathsf{base} = x'))}(\mathsf{loop}, \mathsf{loop}^-) \\
&\quad = \mathsf{transport}^{x' \mapsto (\mathsf{base} = x')}(\mathsf{loop}) \circ \mathsf{loop}^- \circ \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^{-1}) \\
&\quad = (- \cdot \mathsf{loop}) \circ (\mathsf{loop}^-) \circ \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^{-1}) \\
&\quad = (- \cdot \mathsf{loop}) \circ (\mathsf{loop}^-) \circ \mathsf{pred} \\
&\quad = (n \mapsto \mathsf{loop}^{n-1} \cdot \mathsf{loop}).
\end{aligned}$$

첫 번째 줄에서는 올뭉치의 바깥쪽 연결사가 $\to$일 때의 transport(수송)에 대한 특성화를 적용하는데, 이는 transport를 정의역 타입과 공역 타입에서의 transport와의 전합성 및 후합성으로 환원합니다. 두 번째 줄에서는 타입 족이 $x \mapsto \mathsf{base} = x$일 때의 transport에 대한 특성화를 적용하는데, 이는 경로의 후합성입니다. 세 번째 줄에서는 보조정리 8.1.2의 loop^{-1}에 대한 code의 작용을 사용합니다. 그리고 네 번째 줄에서는 단순히 함수 합성을 환원합니다. 따라서 모든 n에 대해 $\mathsf{loop}^{n-1} \cdot \mathsf{loop} = \mathsf{loop}^n$임을 보이는 것으로 충분합니다. 이는 그루포이드 법칙들을 사용하여 보조정리 6.10.12을 간단히 적용하면 됩니다. □

이제 encode와 decode가 준역원임을 보일 수 있습니다. 예전에는 어려웠던 방향이 이제는 쉽습니다!

보조정리 8.1.7. 모든 $x : \mathbb{S}^1$과 $p : \mathsf{base} = x$에 대해 $\mathsf{decode}_x(\mathsf{encode}_x(p)) = p$입니다.

증명. 경로 귀납법에 의해 $\mathsf{decode}_{\mathsf{base}}(\mathsf{encode}_{\mathsf{base}}(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}})) = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$.임을 보이면 충분합니다. 그런데 $\mathsf{encode}_{\mathsf{base}}(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}) \equiv \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}, 0) \equiv 0$,이고 $\mathsf{decode}_{\mathsf{base}}(0) \equiv \mathsf{loop}^0 \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$ 입니다. □

반대 방향도 그리 어렵지 않습니다.

보조정리 8.1.8. 모든 $x : \mathbb{S}^1$과 $c : \mathsf{code}(x)$에 대해 $\mathsf{encode}_x(\mathsf{decode}_x(c)) = c$가 성립합니다.

증명. 원 귀납법으로 증명합니다. base 에 대한 경우를 보이면 충분합니다. loop 에 대한 경우는 $\mathbb{Z}$ 안의 경로들 사이의 경로이며, $\mathbb{Z}$가 집합이므로 이는 즉시 성립하기 때문입니다.

따라서 모든 $n : \mathbb{Z}$에 대해 다음을 보이면 충분합니다.

$$\mathsf{encode}'(\mathsf{loop}^n) = n.$$

보조정리 6.10.12을 사용하여 귀납법으로 증명합니다.

- 0인 경우에는 정의에 의해 결과가 참입니다.
- $n+1$인 경우에는,

$$\begin{aligned}
\mathsf{encode}'(\mathsf{loop}^{n+1}) &= \mathsf{encode}'(\mathsf{loop}^n \cdot \mathsf{loop}) && (\mathsf{loop}^- \text{의 정의에 의해})\\
&= \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}((\mathsf{loop}^n \cdot \mathsf{loop}), 0) && (\mathsf{encode}\text{의 정의에 의해})\\
&= \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}, (\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^n, 0))) && (\text{함자성에 의해})\\
&= (\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^n, 0)) + 1 && (\text{보조정리 } 8.1.2\text{에 의해})\\
&= n + 1. && (\text{귀납 가설에 의해})
\end{aligned}$$

- 음수의 경우도 마찬가지입니다. □

마지막으로 정리의 결론을 얻습니다.

정리 8.1.9. 동치들의 족 $\prod_{(x:\mathbb{S}^1)}((\mathsf{base} = x) \simeq \mathsf{code}(x))$가 존재합니다.

증명. 보조정리 8.1.7 및 8.1.8에 의해 사상 encode와 decode는 준역원입니다. □

base에서 구체화하면 다음을 얻습니다.

따름정리 8.1.10. $\Omega(\mathbb{S}^1, \mathsf{base}) \simeq \mathbb{Z}$.

간단한 귀납법으로 이 동치가 덧셈을 합성으로 보낸다는 것을 보일 수 있으며, 따라서 군으로서 $\Omega(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$입니다.

따름정리 8.1.11. $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$인 반면, $n > 1$에 대해서는 $\pi_n(\mathbb{S}^1) = 0$입니다.

증명. $n = 1$인 경우는 위에서 따름정리 8.1.10로부터 증명의 개요를 제시했습니다. $n > 1$인 경우에는 $\|\Omega^n(\mathbb{S}^1)\|_0 = \|\Omega^{n-1}(\Omega\mathbb{S}^1)\|_0 = \|\Omega^{n-1}(\mathbb{Z})\|_0$ 입니다. 그리고 $\mathbb{Z}$는 집합이므로 $\Omega^{n-1}(\mathbb{Z})$는 축약 가능하며, 따라서 이는 자명합니다. □

8.1.5 호모토피 이론적 증명

§8.1.3에서는 보편 피복의 후보 $\mathsf{code} : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$를 타입 이론 안에서 정의했고, §8.1.4에서는 경로 올뭉치에서 보편 피복으로 가는 사상 $\mathsf{encode} : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(\mathsf{base} = x) \to \mathsf{code}(x)$를 정의했습니다. 고전적 증명에서 남은 일은 두 전체 공간이 모두 축약 가능하므로 이 사상이 전체 공간 사이의 동치를 유도함을 보이고, 이로부터 이 사상이 각 섬유에서도 동치여야 함을 도출하는 것입니다.

보조정리 3.11.8에서 전체 공간 $\sum_{(x:\mathbb{S}^1)}(\mathsf{base} = x)$가 축약 가능함을 보았습니다. 다른 하나에 대해서는 다음이 성립합니다.

보조정리 8.1.12. 타입 $\sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)$는 축약 가능합니다.

증명. 다음 값들로 평탄화 보조정리(보조정리 6.12.2)를 적용합니다.

- $A :\equiv \mathbf{1}$이고 $B :\equiv \mathbf{1}$이며, f와 g는 자명한 함수입니다. 따라서 평탄화 보조정리의 기저 고차 귀납적 타입 W는 $\mathbb{S}^1$과 동치입니다.
- $C : A \to \mathcal{U}$는 값이 $\mathbb{Z}$ 인 상수 함수입니다.
- $D : \prod_{(b:B)}(\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z})$는 값이 succ인 상수 함수입니다.

그러면 평탄화 보조정리에서 정의한 타입 족 $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$는 $\mathsf{code} : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$와 동치입니다. 따라서 평탄화 보조정리에 의해 $\sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)$는 다음 생성자들을 갖는 고차 귀납적 타입과 동치이며, 이 타입을 R로 나타냅니다.

- 함수 $\mathsf{c} : \mathbb{Z} \to R$.
- 각 $z : \mathbb{Z}$에 대해, 경로 $\mathsf{p}_z : \mathsf{c}(z) = \mathsf{c}(\mathsf{succ}(z))$.

이 타입을 **호모토피적 실수**라고 부를 수 있습니다. 이 타입은 고전적 증명에서 위상 공간 $\mathbb{R}$이 하는 것과 같은 역할을 합니다.

따라서 R이 축약 가능함을 보이는 일이 남습니다. 축약 중심으로 $\mathsf{c}(0)$을 선택합니다. 이제 모든 $x : R$에 대해 $x = \mathsf{c}(0)$임을 보여야 합니다. 이는 R에 대한 귀납으로 합니다. 먼저 x가 $\mathsf{c}(z)$일 때 경로 $q_z : \mathsf{c}(0) = \mathsf{c}(z)$를 제시해야 하는데, 이는 보조정리 6.10.12을 사용하여 $z : \mathbb{Z}$에 대한 귀납으로 할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} q_0 &:\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{c}(0)} \\ q_{n+1} &:\equiv q_n \cdot \mathsf{p}_n && n \geq 0\text{인 경우} \\ q_{n-1} &:\equiv q_n \cdot {\mathsf{p}_{n-1}}^{-1} && n \leq 0\text{인 경우.} \end{aligned}$$

둘째로, 임의의 $z : \mathbb{Z}$에 대해 경로 q_z가 p_z를 따라 q_{z+1}로 수송됨을 보여야 합니다. 경로의 수송에 의해, 이는 $q_z \cdot \mathsf{p}_z = q_{z+1}$을 보여야 한다는 뜻입니다. 이는 q_z의 정의를 이용하여 z에 대한 귀납법으로 쉽게 보일 수 있습니다. 이로써 R이 축약 가능하다는 증명이 완성되며, 따라서 $\sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)$도 축약 가능합니다. □

따름정리 8.1.13. encode가 유도하는 다음 사상은:

$$\sum_{(x:\mathbb{S}^1)}(\mathsf{base} = x) \to \sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)$$

동치입니다.

증명. 두 타입 모두 축약 가능합니다. □

정리 8.1.14. $\Omega(\mathbb{S}^1, \mathsf{base}) \simeq \mathbb{Z}$.

증명. 따름정리 8.1.13를 사용하여 encode에 정리 4.7.7를 적용하십시오. □

본질적으로 두 증명은 크게 다르지 않습니다. 인코드-디코드 증명은 호모토피 이론적 증명을 "환원"하거나 "풀어 놓은" 것으로 볼 수 있습니다. 두 증명은 각기 장점이 있으며, 두 관점 사이의 상호작용은 이 주제가 흥미로운 이유 중 하나입니다.

8.1.6 동일성 체계로서의 보편 피복

올뭉치 $\mathsf{code} : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$와 $0 : \mathsf{code}(\mathsf{base})$를 함께 묶은 것은 정의 5.8.1의 의미에서 점을 가진 술어라는 점에 주의하십시오. 이 관점에서 보면, §8.1.4의 인코드-디코드 증명은 code 가 정리 5.8.2(iii)을 만족함을 증명하는 것이고, §8.1.5의 호모토피 이론적 증명은 그것이 정리 5.8.2(iv)를 만족함을 증명하는 것임을 알 수 있습니다. 이는 세 번째 접근법을 시사합니다.

정리 8.1.15. 쌍 $(\mathsf{code}, 0)$은 정의 5.8.1의 의미에서 $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$에서의 동일성 체계입니다.

증명. $D : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x) \to \mathcal{U}$와 $d : D(\mathsf{base}, 0)$가 주어졌다고 합시다. 우리는 함수 $f : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} \prod_{(c:\mathsf{code}(x))} D(x, c)$를 정의하고자 합니다. 원 귀납법에 의해 $f(\mathsf{base}) : \prod_{(c:\mathsf{code}(\mathsf{base}))} D(\mathsf{base}, c)$를 지정하고 $\mathsf{loop}_*(f(\mathsf{base})) = f(\mathsf{base})$ 임을 확인하는 것으로 충분합니다.

물론 $\mathsf{code}(\mathsf{base}) \equiv \mathbb{Z}$입니다. 보조정리 8.1.2와 n에 대한 귀납법에 의해, 임의의 정수 n에 대해 경로 $p_n : \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{loop}^n, 0) = n$을 얻을 수 있습니다. 따라서 Σ-타입에서의 경로에 의해 $\sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)$ 안의 경로 $\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^n, p_n) : (\mathsf{base}, 0) = (\mathsf{base}, n)$을 얻습니다. D에 대응하는 올뭉치 $\widehat{D} : (\sum_{(x:\mathbb{S}^1)} \mathsf{code}(x)) \to \mathcal{U}$에서 이 경로를 따라 d를 수송하면, 임의의 $n : \mathbb{Z}$에 대해 $D(\mathsf{base}, n)$의 원소를 얻습니다. 이 원소를 $f(\mathsf{base})(n)$으로 정의합니다:

$$f(\mathsf{base})(n) :\equiv \mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^n, p_n), d).$$

이제 $\mathsf{transport}^{\lambda x.\, \prod_{(c:\mathsf{code}(x))} D(x,c)}(\mathsf{loop}, f(\mathsf{base})) = f(\mathsf{base})$가 필요합니다. 보조정리 2.9.7에 의해, 이는 임의의 $n : \mathbb{Z}$에 대해 다음을 보여야 한다는 뜻입니다.

$$\mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}_{\mathsf{loop}_*(n)}), f(\mathsf{base})(n)) =_{D(\mathsf{base}, \mathsf{loop}_*(n))} f(\mathsf{base})(\mathsf{loop}_*(n)).$$

이제 경로 $q : \mathsf{loop}_*(n) = n + 1$이 있으므로, 이를 따라 수송하면 다음을 보이는 것으로 충분합니다.

$$\mathsf{transport}^{D(\mathsf{base})}(q, \mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}_{\mathsf{loop}_*(n)}), f(\mathsf{base})(n))) \\ =_{D(\mathsf{base}, n+1)} \mathsf{transport}^{D(\mathsf{base})}(q, f(\mathsf{base})(\mathsf{loop}_*(n))).$$

수송과 의존 적용에 관한 몇 가지 보조정리에 의해, 이는 다음과 동치입니다.

$$\mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, q), f(\mathsf{base})(n)) =_{D(\mathsf{base}, n+1)} f(\mathsf{base})(n+1).$$

그런데 $f(\mathsf{base})$의 정의를 풀어 쓰면 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned}\mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop},q),f(\mathsf{base})(n)) &= \mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop},q),\mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^n,p_n),d))\\ &= \mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^n,p_n)\cdot\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop},q),d)\\ &= \mathsf{transport}^{\widehat{D}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^{n+1},p_{n+1}),d)\\ &= f(\mathsf{base})(n+1).\end{aligned}$$

여기서 우리는 수송의 함자성, Σ-타입에서의 합성에 대한 특성화(독자를 위한 연습문제였습니다), 그리고 p_n과 q를 p_{n+1}과 연결하는 보조정리를 사용했습니다. 이 보조정리를 서술하고 증명하는 것은 독자에게 맡깁니다.

이로써 $f:\prod_{(x:\mathbb{S}^1)}\prod_{(c:\mathsf{code}(x))}D(x,c)$의 구성이 완료됩니다. 다음이 성립하므로

$$f(\mathsf{base},0)\equiv\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}^0,p_0)_*(d)=\mathsf{refl}_{\mathsf{base}*}(d)=d,$$

$(\mathsf{code},0)$이 동일성 체계임을 보였습니다. □

따름정리 8.1.16. 임의의 $x:\mathbb{S}^1$에 대해 $(\mathsf{base}=x)\simeq\mathsf{code}(x)$가 성립합니다.

증명. 정리 5.8.2에 의해 성립합니다. □

물론 이 증명도 본질적으로 앞의 두 증명과 같은 구성 원소들을 담고 있습니다. 대략적으로 말하면, 이 증명은 정의 8.1.6 및 보조정리 8.1.8의 증명들을 통합하여, 필요한 귀납적 논증을 일반적인 경우에 대해 단 한 번만 수행한다고 할 수 있습니다.

주 8.1.17. $\pi_1(\mathbb{S}^1)\simeq\mathbb{Z}$임을 보인 위의 모든 증명은 유니발런스 공리를 본질적으로 사용한다는 점에 주의하십시오. 이는 피할 수 없습니다. $\pi_1(\mathbb{S}^1)\simeq\mathbb{Z}$를 증명하려면 유니발런스 또는 그와 비슷한 무언가가 반드시 필요합니다. 유니발런스가 없으면 "모든 타입은 집합임"이라는 명제(§7.2에서 논의한 바와 같이, 일명 "동일성 증명의 유일성" 또는 "공리 K")를 가정해도 모순이 생기지 않으며, 이 명제로부터는 오히려 $\pi_1(\mathbb{S}^1)\simeq\mathbf{1}$가 따라 나옵니다. 사실 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$의 (비)자명성은 모든 타입이 집합인지 여부를 정확히 판별합니다. 보조정리 6.4.1의 증명은 역으로 $\mathsf{loop}=\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$이면 모든 타입이 집합임을 보였습니다.

8.2 현수의 연결성

§7.5에서 $\|A\|_n$가 축약 가능할 때 타입 A를 **n-연결**이라고 부른다는 것을 상기하십시오. 이 절의 목적은 §6.5의 현수 연산이 연결성을 증가시킨다는 것을 증명하는 것입니다.

정리 8.2.1. A가 n-연결이면 A의 현수는 $(n+1)$-연결입니다.

증명. §6.8에서 A의 현수가 푸시아웃 $\mathbf{1}\sqcup^A\mathbf{1}$임을 언급하였으므로, 다음 타입이 축약 가능함을 증명해야 합니다.

$$\left\|\mathbf{1}\sqcup^A\mathbf{1}\right\|_{n+1}.$$

정리 7.4.12에 의해 $\left\|\mathbf{1} \sqcup^A \mathbf{1}\right\|_{n+1}$가 $(n+1)$-Type에서 다음 도식의 푸시아웃임을 압니다.

$$\begin{array}{ccc} \|A\|_{n+1} & \longrightarrow & \|\mathbf{1}\|_{n+1} \\ \downarrow & & \\ \|\mathbf{1}\|_{n+1} & & \end{array}.$$

$\|\mathbf{1}\|_{n+1} = \mathbf{1}$이므로, 타입 $\left\|\mathbf{1} \sqcup^A \mathbf{1}\right\|_{n+1}$은 $(n+1)$-Type에서 다음 다이어그램의 푸시아웃이기도 합니다(두 다이어그램이 같기 때문입니다).

$$\mathscr{D} = \begin{array}{ccc} \|A\|_{n+1} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \\ \mathbf{1} & & \end{array}.$$

이제 $\mathbf{1}$ 역시 $(n+1)$-Type에서 $\mathscr{D}$의 푸시아웃임을 증명하겠습니다. E를 $(n+1)$-절단된 타입이라 합시다. 다음 사상이 동치임을 증명해야 합니다.

$$\begin{cases} (\mathbf{1} \to E) & \longrightarrow & \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) \\ y & \longmapsto & (y, y, \lambda u.\, \mathsf{refl}_{y(\star)}) \end{cases}.$$

여기서 $\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E)$는 다음 타입이었음을 상기하십시오.

$$\sum_{(f:\mathbf{1}\to E)} \sum_{(g:\mathbf{1}\to E)} (\|A\|_{n+1} \to (f(\star) =_E g(\star))).$$

사상 $\begin{cases} (\mathbf{1} \to E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(\star) \end{cases}$ 는 동치이므로, 다음도 성립합니다.

$$\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) = \sum_{(x:E)} \sum_{(y:E)} (\|A\|_{n+1} \to (x =_E y)).$$

이제 A는 n-연결이고, $\left\|\|A\|_{n+1}\right\|_n = \|A\|_n = \mathbf{1}$이므로 $\|A\|_{n+1}$도 n-연결입니다. 또한 E가 $(n+1)$-절단되어 있으므로 $(x =_E y)$는 n-절단되어 있습니다. 따라서 따름정리 7.5.9에 의해 다음 사상은 동치입니다.

$$\begin{cases} (x =_E y) & \longrightarrow & (\|A\|_{n+1} \to (x =_E y)) \\ p & \longmapsto & \lambda z.\, p \end{cases}$$

따라서 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) = \sum_{(x:E)} \sum_{(y:E)} (x =_E y).$$

그런데 다음 사상은 동치입니다.

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & \sum_{(x:E)} \sum_{(y:E)} (x =_E y) \\ x & \longmapsto & (x, x, \mathsf{refl}_x) \end{cases}.$$

따라서 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E) = E.$$

마지막으로 다음 동치를 얻습니다.

$$(\mathbf{1} \to E) \simeq \mathsf{cocone}_{\mathscr{D}}(E)$$

이제 정의를 풀어 이 사상의 명시적인 표현을 얻을 수 있으며, 이것이 바로 처음에 주어진 사상임을 쉽게 알 수 있습니다.

따라서 $\mathbf{1}$이 $(n+1)$-Type에서 $\mathscr{D}$의 푸시아웃임을 증명하였습니다. 푸시아웃의 유일성을 이용하면 $\left\|\mathbf{1} \sqcup^A \mathbf{1}\right\|_{n+1} = \mathbf{1}$을 얻으며, 이로써 A의 현수가 $(n+1)$-연결임이 증명됩니다. □

따름정리 8.2.2. 모든 $n : \mathbb{N}$에 대해 구면 $\mathbb{S}^n$은 $(n-1)$-연결입니다.

증명. 이를 n에 대한 귀납법으로 증명합니다. $n = 0$일 때는 $\mathbb{S}^0$에 원소가 단지 존재함을 증명해야 하며, 이는 명백합니다. $\mathbb{S}^n$이 $(n-1)$-연결이 되는 $n : \mathbb{N}$을 생각합시다. 정의에 의해 $\mathbb{S}^{n+1}$은 $\mathbb{S}^n$의 현수이므로, 앞의 보조정리에 의해 $\mathbb{S}^{n+1}$은 n-연결입니다. □

8.3 n-연결 공간의 $\pi_{k\leq n}$과 $\pi_{k<n}(\mathbb{S}^n)$

(A, a)를 점을 가진 타입이라 하고 $n : \mathbb{N}$이라 합시다. 예 6.11.4에서 $n > 0$이면 집합 $\pi_n(A, a)$가 군 구조를 가지며, $n > 1$이면 그 군은 아벨 군이라는 것을 상기하십시오.

이제 n-절단된 타입과 n-연결 타입의 호모토피 군에 관해 몇 가지를 말할 수 있습니다.

보조정리 8.3.1. A가 n-절단되어 있고 $a : A$이면, 모든 $k > n$에 대해 $\pi_k(A, a) = \mathbf{1}$입니다.

증명. n-타입의 루프 공간은 $(n-1)$-타입이므로 $\Omega^k(A, a)$는 $(n-k)$-타입이며, $(n-k) \leq -1$이므로 $\Omega^k(A, a)$는 단순 명제입니다. 그런데 $\Omega^k(A, a)$에는 원소가 존재하므로 실제로는 축약 가능하며, $\pi_k(A, a) = \left\|\Omega^k(A, a)\right\|_0 = \|\mathbf{1}\|_0 = \mathbf{1}$입니다. □

보조정리 8.3.2. A가 n-연결이고 $a : A$이면, 모든 $k \leq n$에 대해 $\pi_k(A, a) = \mathbf{1}$입니다.

증명. 다음과 같은 일련의 등식이 성립합니다:

$$\pi_k(A, a) = \left\|\Omega^k(A, a)\right\|_0 = \Omega^k(\|(A, a)\|_k) = \Omega^k(\|\|(A, a)\|_n\|_k) = \Omega^k(\|\mathbf{1}\|_k) = \Omega^k(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

세 번째 등식에서는 $\|-\|_k \circ \|-\|_n = \|-\|_k$를 이용하기 위해 $k \leq n$이라는 사실을 사용하며, 네 번째 등식에서는 A가 n-연결이라는 사실을 사용합니다. □

따름정리 8.3.3. $k < n$이면 $\pi_k(\mathbb{S}^n) = \mathbf{1}$입니다.

증명. 따름정리 8.2.2에 의해 구면 $\mathbb{S}^n$은 $(n-1)$-연결이므로 보조정리 8.3.2를 적용할 수 있습니다. □

8.4 섬유열과 긴 완전열

함수 $f : X \to Y$의 공역에 기점 $y_0 : Y$가 주어져 있으면, y_0 위에서의 f의 섬유 $F :\equiv \mathsf{fib}_f(y_0)$를 **$f$의 섬유**라고 부릅니다. ($Y$가 연결이면 F는 단순 동치를 무시하면 유일하게 결정됩니다. 연습문제 8.5를 참고하십시오.) 이제 X도 점을 가진 타입이고 f가 기점을 보존하면 F, X, Y의 호모토피 군 사이에 긴 완전열의 형태로 관계가 있음을 보입니다. 이는 그러한 f에 연관된 섬유열을 통해 유도합니다.

정의 8.4.1. 점을 가진 타입 (X, x_0)와 (Y, y_0) 사이의 **점을 가진 사상** 은 사상 $f : X \to Y$와 경로 $f_0 : f(x_0) = y_0$의 쌍입니다.

임의의 점을 가진 타입 (X, x_0)와 (Y, y_0)에 대해, 기점에서 상수인 점을 가진 사상 $(\lambda x.\, y_0) : X \to Y$가 존재합니다. 이를 **영 사상**이라고 부르며, 때로는 $0 : X \to Y$로 씁니다.

모든 점을 가진 타입 (X, x_0)에는 루프 공간 $\Omega(X, x_0)$가 있음을 상기하십시오. 이제 이 연산이 점을 가진 사상에 대해 함자적임을 짚어 둡니다.

정의 8.4.2. 점을 가진 타입 사이의 점을 가진 사상 $f : X \to Y$가 주어지면, 점을 가진 사상 $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$를 다음과 같이 정의합니다.

$$(\Omega f)(p) :\equiv {f_0}^{-1} \cdot f(p) \cdot f_0.$$

Ωf를 점을 가진 사상으로 만들어 주는 경로 $(\Omega f)_0 : (\Omega f)(\mathsf{refl}_{x_0}) = \mathsf{refl}_{y_0}$는 다음 타입의 자명한 경로입니다.

$${f_0}^{-1} \cdot f(\mathsf{refl}_{x_0}) \cdot f_0 = \mathsf{refl}_{y_0}.$$

점을 가진 사상에 대한 또 다른 함자가 있으며, 이 함자는 $f : X \to Y$를 $\mathsf{pr}_1 : \mathsf{fib}_f(y_0) \to X$로 보냅니다. f가 점을 가진 사상이면 $\mathsf{fib}_f(y_0)$는 항상 기점 (x_0, f_0)를 가진 것으로 간주하며, 이 경우 pr_1도 증거 $(\mathsf{pr}_1)_0 :\equiv \mathsf{refl}_{x_0}$를 갖는 점을 가진 사상입니다. 따라서 이 연산은 반복할 수 있습니다.

정의 8.4.3. 점을 가진 사상 $f : X \to Y$의 **섬유열** 은 점을 가진 타입과 점을 가진 사상으로 이루어진 다음 무한열입니다.

$$\ldots \xrightarrow{f^{(n+1)}} X^{(n+1)} \xrightarrow{f^{(n)}} X^{(n)} \xrightarrow{f^{(n-1)}} \ldots \longrightarrow X^{(2)} \xrightarrow{f^{(1)}} X^{(1)} \xrightarrow{f^{(0)}} X^{(0)}$$

이는 다음과 같이 재귀적으로 정의됩니다.

$$X^{(0)} :\equiv Y \qquad X^{(1)} :\equiv X \qquad f^{(0)} :\equiv f$$

그리고

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &:\equiv \mathsf{fib}_{f^{(n-1)}}(x_0^{(n-1)}) \\ f^{(n)} &:\equiv \mathsf{pr}_1 \qquad\qquad\qquad : X^{(n+1)} \to X^{(n)}. \end{aligned}$$

여기서 $x_0^{(n)}$는 위와 같이 재귀적으로 선택한 $X^{(n)}$의 기점을 나타냅니다.

따라서 이 섬유열에서 서로 인접한 임의의 두 사상은 다음 형태입니다.

$$X^{(n+1)} \equiv \mathsf{fib}_{f^{(n-1)}}(x_0^{(n-1)}) \xrightarrow{f^{(n)} \equiv \mathsf{pr}_1} X^{(n)} \xrightarrow{f^{(n-1)}} X^{(n-1)}.$$

특히 $f^{(n-1)} \circ f^{(n)} = 0$이 성립합니다. 이제 이 열에 나타나는 타입들이 밑공간 Y, 전체 공간 X, 섬유 $F :\equiv \mathsf{fib}_f(y_0)$의 반복 루프 공간이며, 사상들도 마찬가지임을 살펴봅니다.

보조정리 8.4.4. $f : X \to Y$를 점을 가진 공간 사이의 점을 가진 사상이라고 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

(i) $f^{(1)} :\equiv \mathsf{pr}_1 : \mathsf{fib}_f(y_0) \to X$의 섬유는 ΩY와 동치입니다.

(ii) 마찬가지로 $f^{(2)} : \Omega Y \to \mathsf{fib}_f(y_0)$의 섬유는 ΩX와 동치입니다.

(iii) 이 동치들 아래에서 점을 가진 사상 $f^{(3)} : \Omega X \to \Omega Y$는 점을 가진 사상 $\Omega f \circ (-)^{-1}$와 동일시됩니다.

증명. (i)의 경우, 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\mathsf{fib}_{f^{(1)}}(x_0) &:\equiv \sum_{z:\mathsf{fib}_f(y_0)} (\mathsf{pr}_1(z) = x_0) \\
&\simeq \sum_{(x:X)} \sum_{(p:f(x)=y_0)} (x = x_0) && \text{(연습문제 2.10에 의해)} \\
&\simeq (f(x_0) = y_0) && \text{($\textstyle\sum_{(x:X)}(x = x_0)$이 축약 가능하므로)} \\
&\simeq (y_0 = y_0) && \text{($(f_0 \cdot -)$에 의해)} \\
&\equiv \Omega Y.
\end{aligned}$$

구성을 따라가 보면, 이 동치는 $((x,p),q)$를 ${f_0}^{-1} \cdot f(q^{-1}) \cdot p$로 보내고, 그 역은 $r : y_0 = y_0$를 $((x_0, f_0 \cdot r), \mathsf{refl}_{x_0})$로 보냄을 알 수 있습니다. 특히 $\mathsf{fib}_{f^{(1)}}(x_0)$의 기점 $((x_0,f_0),\mathsf{refl}_{x_0})$는 ${f_0}^{-1} \cdot f\left({\mathsf{refl}_{x_0}}^{-1}\right) \cdot f_0$로 보내지며, 이는 refl_{y_0}와 같습니다. 따라서 이 동치는 점을 가진 사상입니다(연습문제 8.7를 참고하십시오). 또한 이 동치 아래에서 $f^{(2)}$는 $\lambda r.\,(x_0, f_0 \cdot r) : \Omega Y \to \mathsf{fib}_f(y_0)$와 동일시됩니다.

Item (ii)는 f 대신 $f^{(1)}$에 (i)을 적용하면 바로 따라 나옵니다. $(f^{(1)})_0 :\equiv \mathsf{refl}_{x_0}$이므로, 이 동치 아래에서 $f^{(3)}$는 $s \mapsto ((x_0,f_0),s)$로 정의되는 사상 $\Omega X \to \mathsf{fib}_{f^{(1)}}(x_0)$와 동일시됩니다. 따라서 앞의 동치 $\mathsf{fib}_{f^{(1)}}(x_0) \simeq \Omega Y$와 합성하면 s가 ${f_0}^{-1} \cdot f(s^{-1}) \cdot f_0$로 보내짐을 알 수 있으며, 이는 정의에 의해 $(\Omega f)(s^{-1})$입니다. 이것이 단순히 함수로서의 등식이 아니라 점을 가진 사상으로서의 등식이라는 증명은 생략합니다. □

따라서 $f : X \to Y$의 섬유열은 다음과 같이 나타낼 수 있습니다:

$$\ldots \longrightarrow \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega\partial} \Omega F \xrightarrow{-\Omega i} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y.$$

여기서 마이너스 부호는 경로 역 $(-)^{-1}$와의 합성을 나타냅니다. 연습문제 8.6에 의해 다음이 성립함에 유의하십시오.

$$\Omega\left(\Omega f \circ (-)^{-1}\right) \circ (-)^{-1} = \Omega^2 f \circ (-)^{-1} \circ (-)^{-1} = \Omega^2 f.$$

따라서 k가 홀수일 때마다 k겹 루프 사상에 마이너스 부호가 붙습니다.

이 섬유열로부터 점을 가진 집합의 완전열을 이끌어 낼 것입니다. A와 B를 집합이라 하고 $f : A \to B$를 함수라 합시다. 그리고 정의 7.6.3에서 상 $\mathsf{im}(f)$의 정의를 상기하십시오. 이는 B의 부분집합으로 볼 수 있습니다.

$$\mathsf{im}(f) :\equiv \{\, b : B \mid \exists (a : A).\, f(a) = b \,\}.$$

나아가 A와 B가 기점 a_0와 b_0을 가진 점을 가진 집합이고 f가 점을 가진 사상이라면, f의 **핵**을 A의 다음 부분집합으로 정의합니다.

$$\ker(f) :\equiv \{\, x : A \mid f(x) = b_0 \,\}.$$

물론 이것은 기점 b_0 위에서의 f의 섬유일 뿐이며, B가 집합이므로 A의 부분집합입니다.

모든 군은 단위 원소를 기점으로 하는 점을 가진 집합이며, 모든 군 준동형사상은 점을 가진 사상이라는 점에 유의하십시오. 이 경우 핵과 상은 군론의 일반적인 개념과 일치합니다.

정의 8.4.5. **점을 가진 집합의 완전열** 은 점을 가진 집합과 점을 가진 사상들로 이루어진 (유한할 수도 있는) 다음과 같은 열입니다.

$$\dots \longrightarrow A^{(n+1)} \xrightarrow{f^{(n)}} A^{(n)} \xrightarrow{f^{(n-1)}} A^{(n-1)} \longrightarrow \dots$$

모든 n에 대해 $f^{(n)}$의 상이 $A^{(n)}$의 부분집합으로서 $f^{(n-1)}$의 핵과 같은 것입니다. 다시 말해, 모든 $a : A^{(n)}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$(f^{(n-1)}(a) = a_0^{(n-1)}) \iff \exists (b : A^{(n+1)}).\, (f^{(n)}(b) = a).$$

여기서 $a_0^{(n)}$는 $A^{(n)}$의 기점을 나타냅니다.

보통 완전열에 있는 점을 가진 집합의 대부분 또는 전부는 군이며, 아벨 군인 경우도 많습니다. **군의 완전열**이라고 말할 때에는 나아가 사상들이 단순히 점을 가진 사상이 아니라 군 준동형사상이라고 가정합니다.

정리 8.4.6. $f : X \to Y$가 섬유 $F :\equiv \mathsf{fib}_f(y_0)$를 갖는, 점을 가진 공간 사이의 점을 가진 사상이라고 합시다. 그러면 다음과 같은 긴 완전열이 존재합니다. 이 완전열의 항은 마지막 세 항을 제외하면 모두 군이고, 마지막 여섯 항을 제외하면 모두 아벨 군입니다.

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\pi_k(F) & \longrightarrow & \pi_k(X) & \longrightarrow & \pi_k(Y) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\pi_2(F) & \longrightarrow & \pi_2(X) & \longrightarrow & \pi_2(Y) \\
\pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \\
\pi_0(F) & \longrightarrow & \pi_0(X) & \longrightarrow & \pi_0(Y)
\end{array}$$

증명. 먼저 섬유열의 0-절단이 점을 가진 집합의 완전열임을 보이겠습니다. 따라서 섬유열에서 인접한 임의의 사상 쌍에 대해 다음을 보여야 합니다:

$$\mathsf{fib}_f(z_0) \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} Z$$

에 대해, $g :\equiv \mathsf{pr}_1$ 일 때 다음 열이

$$\left\|\mathsf{fib}_f(z_0)\right\|_0 \xrightarrow{\|g\|_0} \|W\|_0 \xrightarrow{\|f\|_0} \|Z\|_0$$

완전하다는 것, 즉 $\mathsf{im}(\|g\|_0) \subseteq \ker(\|f\|_0)$이고 $\ker(\|f\|_0) \subseteq \mathsf{im}(\|g\|_0)$임을 보여야 합니다.

첫 번째 포함 관계는 $\|f\|_0 \circ \|g\|_0 = 0$과 동치이며, 이는 $\|-\|_0$의 함자성과 $f \circ g = 0$이라는 사실에 의해 성립합니다. 두 번째 포함 관계를 위해 $w' : \|W\|_0$와 $p' : \|f\|_0(w') = |z_0|_0$를 가정하고, $|g(t)|_0 = w'$를 만족하는 $t : \mathsf{fib}_f(z_0)$가 단지 존재함을 보이겠습니다. 목표가 단순 명제이므로, 어떤 $w : W$에 대해 w'가 $|w|_0$ 꼴이라고 가정할 수 있습니다. 이제 정리 7.3.12에 의해 $p' : |f(w)|_0 = |z_0|_0$로부터 $p'' : \|f(w) = z_0\|_{-1}$를 얻으므로, 절단 귀납법을 한 번 더 적용하여 어떤 $p : f(w) = z_0$를 가정할 수 있습니다. 그러면 이제 $|(w,p)|_0 : \left\|\mathsf{fib}_f(z_0)\right\|_0$를 얻으며, $\|g\|_0$에 의한 그 상은 원하던 대로 $|w|_0 \equiv w'$입니다.

따라서 f의 섬유열에 $\|-\|_0$를 적용하면, 점을 가진 집합 $\pi_k(F)$, $\pi_k(X)$, $\pi_k(Y)$를 원하는 순서로 포함하는 긴 완전열을 얻습니다. 물론 π_k는 루프 공간의 0-절단이므로 $k \geq 1$일 때 군이고, Eckmann–Hilton 논증 (정리 2.1.6)에 의해 $k \geq 2$일 때 아벨 군입니다. 또한 보조정리 8.4.4를 이용하면 이 완전열의 사상 $\pi_k(F) \to \pi_k(X)$와 $\pi_k(X) \to \pi_k(Y)$를 각각 $(-1)^k\pi_k(i)$와 $(-1)^k\pi_k(f)$로 동일시할 수 있습니다.

더 일반적으로, 이 긴 완전열에서 마지막 세 사상을 제외한 모든 사상은 어떤 h에 대해 $\|\Omega h\|_0$ 또는 $\|-\Omega h\|_0$ 꼴입니다. 전자의 경우 이는 군 준동형사상이고, 후자의 경우 군이 아벨 군이면 준동형사상이며 그렇지 않으면 "반준동형사상"입니다. 그러나 군 준동형사상을 그 음으로 바꾸어도 핵과 상은 변하지 않으므로, 이를 포함하는 임의의 열의 완전성도 변하지 않습니다. 따라서 긴 완전열을 수정하여 $\pi_k(i)$와 $\pi_k(f)$를 직접 포함하고 (마지막 세 사상을 제외한) 모든 사상이 군 준동형사상인 완전열을 얻을 수 있습니다. □

아벨 군의 완전열이 갖는 일반적인 성질들은 통상적인 방법으로 증명할 수 있습니다. 특히 다음이 성립합니다:

보조정리 8.4.7. 다음과 같은 아벨 군의 완전열이 주어졌다고 가정합시다:

$$K \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \longrightarrow Q.$$

(i) $K = 0$이면 f는 단사입니다.
(ii) $Q = 0$이면 f는 전사입니다.
(iii) $K = Q = 0$이면 f는 동형사상입니다.

증명. f의 핵은 $K \to G$의 상이므로, $K = 0$이면 f의 핵은 $\{0\}$입니다. f는 군 준동형사상이므로 단사입니다. 마찬가지로, f의 상은 $H \to Q$의 핵이므로, $Q = 0$이면 f의 상은 H 전체이고, 따라서 f는 전사입니다. 마지막으로, (iii)는 정리 4.6.3에 의해 (i)와 (ii)로부터 따라 나옵니다. □

이를 곧바로 응용하여, 이제 사상의 n-연결성이 n-절단 위에 동치를 유도하는 것보다 어떤 점에서 더 강한지를 정량적으로 나타낼 수 있습니다.

따름정리 8.4.8. $f : A \to B$가 n-연결이고 $a : A$라 하고, $b :\equiv f(a)$로 정의합시다. 그러면 다음이 성립합니다:

(i) $k \leq n$이면 $\pi_k(f) : \pi_k(A,a) \to \pi_k(B,b)$는 동형사상입니다.

(ii) $k = n+1$이면 $\pi_k(f) : \pi_k(A,a) \to \pi_k(B,b)$는 전사입니다.

증명. $k = 0$일 때, $\pi_0(f) \equiv \|f\|_0$임에 주목하면 부분 (i)은 보조정리 7.5.14에서 따라 나옵니다. $k = 0$일 때, 보조정리 7.5.2에 의해 함수가 전사인 것과 (-1)-연결인 것이 동치임에 주목하면 부분 (ii)는 연습문제 7.18에서 따라 나옵니다. $k > 0$일 때는 긴 완전열의 일부로서 다음 완전열을 얻습니다.

$$\pi_k(\mathsf{fib}_f(b)) \longrightarrow \pi_k(A,a) \xrightarrow{f} \pi_k(B,b) \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathsf{fib}_f(b)).$$

이제 f가 n-연결이므로 $\|\mathsf{fib}_f(b)\|_n$는 축약 가능합니다. 그러므로 $k \leq n$이면 $\pi_k(\mathsf{fib}_f(b)) = \|\Omega^k(\mathsf{fib}_f(b))\|_0 = \Omega^k(\|\mathsf{fib}_f(b)\|_k)$ 역시 축약 가능합니다. 따라서 보조정리 8.4.7(iii)에 의해 $k \leq n$일 때 $\pi_k(f)$는 동형사상이고, 보조정리 8.4.7(ii)에 의해 $k = n+1$일 때는 전사입니다. □

§8.8에서 따름정리 8.4.8의 역도 성립함을 보게 될 것입니다.

8.5 호프 올뭉치

이 절에서는 **호프 올뭉치**를 정의하겠습니다.

정리 8.5.1 (호프 올뭉치). $\mathbb{S}^2$ 위의 올뭉치 H로서, 기점 위의 섬유가 $\mathbb{S}^1$이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^3$인 것이 존재합니다.

호프 올뭉치를 이용하면 구면의 호모토피 군 몇 가지를 계산할 수 있습니다. 실제로 호프 올뭉치로부터 다음과 같은 호모토피 군의 긴 완전열 을 얻습니다(§8.4 참조):

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_k(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_k(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & \pi_k(\mathbb{S}^2) \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots \\
\pi_2(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{S}^2) \\
\pi_1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^2)
\end{array}$$

우리는 이미 모든 $\pi_n(\mathbb{S}^1)$과 $k < n$에 대한 $\pi_k(\mathbb{S}^n)$을 계산했으므로, 이는 다음과 같이 됩니다:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_k(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & \pi_k(\mathbb{S}^2) \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots \\
0 & \longrightarrow & \pi_3(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & \pi_3(\mathbb{S}^2) \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{S}^2) \\
\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

특히 다음 결과를 얻습니다:

따름정리 8.5.2. $\pi_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$이고, 모든 $k \geq 3$에 대해 $\pi_k(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_k(\mathbb{S}^2)$입니다(여기서 사상은 호프 올뭉치를 전체 공간 $\mathbb{S}^3$에서 밑공간 $\mathbb{S}^2$로 가는 사상으로 보았을 때 유도되는 사상입니다).

사실 더 많은 것을 말할 수 있습니다. 호프 올뭉치의 섬유열은 $\Omega^3(\mathbb{S}^3)$이 $\Omega^3(\mathbb{S}^2)$에서 $\Omega^2(\mathbb{S}^1)$로 가는 사상의 섬유임을 보여 줄 것입니다. $\Omega^2(\mathbb{S}^1)$은 축약 가능하므로 $\Omega^3(\mathbb{S}^3) \simeq \Omega^3(\mathbb{S}^2)$입니다. 고전적 호모토피 이론에서라면 이 사실은 따름정리 8.5.2와 화이트헤드 정리의 결과이겠지만, 화이트헤드 정리는 호모토피 타입 이론에서 반드시 성립하지는 않습니다(§8.8 참조). 다만 여기서는 이 더 정밀한 형태를 사용하지 않겠습니다.

8.5.1 푸시아웃 위의 올뭉치

먼저 푸시아웃 위의 올뭉치를 구성하는 방법을 설명하는 보조정리부터 시작하겠습니다.

보조정리 8.5.3. $\mathscr{D} = (Y \xleftarrow{j} X \xrightarrow{k} Z)$를 스팬이라 하고, 다음이 주어졌다고 가정합시다:

- 두 올뭉치 $E_Y : Y \to \mathcal{U}$와 $E_Z : Z \to \mathcal{U}$.
- $E_Y \circ j : X \to \mathcal{U}$와 $E_Z \circ k : X \to \mathcal{U}$ 사이의 동치 e_X, 즉

$$e_X : \prod_{x:X} E_Y(j(x)) \simeq E_Z(k(x)).$$

그러면 다음을 만족하는 올뭉치 $E : Y \sqcup^X Z \to \mathcal{U}$를 구성할 수 있습니다.

- 모든 $y : Y$에 대해 $E(\mathsf{inl}(y)) \equiv E_Y(y)$입니다.
- 모든 $z : Z$에 대해 $E(\mathsf{inr}(z)) \equiv E_Z(z)$입니다.
- 모든 $x : X$에 대해 $E(\mathsf{glue}(x)) = \mathsf{ua}(e_X(x))$입니다(등식의 양변은 모두 $\mathcal{U}$ 안에서 $E_Y(j(x))$에서 $E_Z(k(x))$로 가는 경로임에 유의하십시오).

또한 이 올뭉치의 전체 공간은 다음 푸시아웃 사각형에 들어맞습니다:

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{(x:X)} E_Y(j(x)) & \xrightarrow[\sim]{\mathsf{id}\times e_X} & \sum_{(x:X)} E_Z(k(x)) \xrightarrow{k\times\mathsf{id}} \sum_{(z:Z)} E_Z(z) \\
{\scriptstyle j\times\mathsf{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{inr}} \\
\sum_{(y:Y)} E_Y(y) & \xrightarrow[\mathsf{inl}]{} & \sum_{(t:Y\sqcup^X Z)} E(t)
\end{array}$$

증명. E는 푸시아웃 $Y \sqcup^X Z$의 재귀 원리로 정의합니다. 이를 위해서는 $\mathsf{inl}(y)$, $\mathsf{inr}(z)$ 꼴의 원소에서 E가 갖는 값과 경로 $\mathsf{glue}(x)$에 대한 E의 작용을 지정해야 하므로, 다음 값들을 택하면 됩니다:

$$E(\mathsf{inl}(y)) :\equiv E_Y(y),$$
$$E(\mathsf{inr}(z)) :\equiv E_Z(z),$$
$$E(\mathsf{glue}(x)) := \mathsf{ua}(e_X(x)).$$

이 올뭉치의 전체 공간이 푸시아웃임을 보이기 위해, 다음 값들로 평탄화 보조정리(보조정리 6.12.2)를 적용합니다:

- $A :\equiv Y + Z$, $B :\equiv X$이고, $f, g : B \to A$는 $f(x) :\equiv \mathsf{inl}(j(x))$, $g(x) :\equiv \mathsf{inr}(k(x))$로 정의되며,
- 타입 족 $C : A \to \mathcal{U}$은 다음과 같이 정의되고,

$$C(\mathsf{inl}(y)) :\equiv E_Y(y) \qquad \text{그리고} \qquad C(\mathsf{inr}(z)) :\equiv E_Z(z),$$

- 동치들의 족 $D : \prod_{(b:B)} C(f(b)) \simeq C(g(b))$는 e_X로 정의됩니다.

평탄화 보조정리에 나오는 기저 고차 귀납적 타입 W는 푸시아웃 $Y \sqcup^X Z$와 동치이고, 타입 족 $P : Y \sqcup^X Z \to \mathcal{U}$은 위에서 정의한 E와 동치입니다.

따라서 평탄화 보조정리에 의해 $\sum_{(t:Y \sqcup^X Z)} E(t)$는 다음 생성자들을 갖는 고차 귀납적 타입 $E^{\mathrm{tot}\prime}$와 동치입니다:

- 함수 $\mathsf{z} : \sum_{(a:Y+Z)} C(a) \to E^{\mathrm{tot}\prime}$,
- 각 $x : X$와 $t : E_Y(j(x))$에 대한 경로 $\mathsf{z}(\mathsf{inl}(j(x)), t) = \mathsf{z}(\mathsf{inr}(k(x)), e_X(t))$.

평탄화 보조정리를 다시 적용하거나 직접 계산하면 $\sum_{(a:Y+Z)} C(a) \simeq \sum_{(y:Y)} E_Y(y) + \sum_{(z:Z)} E_Z(z)$임을 쉽게 알 수 있으므로, $E^{\mathrm{tot}\prime}$는 다음 생성자들을 갖는 고차 귀납적 타입 E^{tot}와 동치입니다:

- 함수 $\mathsf{inl} : \sum_{(y:Y)} E_Y(y) \to E^{\mathrm{tot}}$,
- 함수 $\mathsf{inr} : \sum_{(z:Z)} E_Z(z) \to E^{\mathrm{tot}}$,
- 각 $(x, t) : \sum_{(x:X)} E_Y(j(x))$에 대한 경로 $\mathsf{glue}(x, t) : \mathsf{inl}(j(x), t) = \mathsf{inr}(k(x), e_X(t))$.

따라서 요구한 대로 E의 전체 공간은 E_Y와 E_Z의 전체 공간들의 푸시아웃입니다. □

8.5.2 호프 구성

정의 8.5.4. **H-공간** 은 다음으로 이루어집니다

- 타입 A,
- 기점 $e : A$,
- 이항 연산 $\mu : A \times A \to A$, 그리고
- 모든 $a : A$에 대한 등식 $\mu(e, a) = a$와 $\mu(a, e) = a$.

보조정리 8.5.5. A를 연결된 H-공간이라고 합시다. 그러면 모든 $a : A$에 대해 사상 $\mu(a, -) : A \to A$와 $\mu(-, a) : A \to A$는 동치입니다.

증명. 모든 $a : A$에 대하여 사상 $\mu(a, -)$가 동치임을 증명합시다. 다른 명제도 대칭적으로 증명됩니다. $\mu(a, -)$가 동치라는 명제는 타입 족 $P : A \to \mathsf{Prop}$에 대응하며, 이를 증명하는 것은 이 타입 족의 단면을 찾는 것에 대응합니다.

타입 Prop는 집합이므로(정리 7.1.11) $P'(|a|_0) :\equiv P(a)$로 새로운 타입 족 $P' : \|A\|_0 \to \mathsf{Prop}$를 정의할 수 있습니다. 그런데 가정에 의해 A는 연결되어 있으므로 $\|A\|_0$는 축약 가능합니다. 이는 P'의 단면을 찾으려면 $|e|_0$ 위에서 P'의 섬유에 속하는 점 하나를 찾는 것으로 충분하다는 것을 뜻합니다. 그런데 $P'(|e|_0) = P(e)$이며, H-공간의 정의에 의해 $\mu(e, -)$는 항등 사상과 같고 따라서 동치이므로 이 타입에는 원소가 존재합니다.

모든 $x : \|A\|_0$에 대하여 명제 $P'(x)$가 참임을 증명하였으므로, 특히 모든 $a : A$에 대하여 명제 $P(a)$가 참입니다. $P(a)$는 $P'(|a|_0)$이기 때문입니다. □

정의 8.5.6. A가 연결된 H-공간이라고 합시다. 보조정리 8.5.3를 이용하여 ΣA 위의 올뭉치를 정의합니다.

ΣA가 푸시아웃 $\mathbf{1} \sqcup^A \mathbf{1}$이므로, 다음을 지정하여 ΣA 위의 올뭉치를 정의할 수 있습니다.

- $\mathbf{1}$ 위의 두 올뭉치(즉, 두 타입 F_1과 F_2), 그리고
- A의 각 원소마다 하나씩 주어지는, F_1과 F_2 사이의 동치들의 족 $e : A \to (F_1 \simeq F_2)$.

F_1과 F_2로 A를 택하고, $a : A$에 대하여 $e(a)$로 동치 $\mu(a, -)$를 택합니다.

보조정리 8.5.3에 따르면 다음 도식을 얻습니다:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\mathsf{pr}_2} & A \times A & \xrightarrow{\mu} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}_1} & & \downarrow \\ 1 & \longleftarrow & A & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

그리고 방금 구성한 올뭉치는 ΣA 위의 올뭉치이며, 그 전체 공간은 윗줄의 푸시아웃입니다.

또한 $f(x, y) :\equiv (\mu(x, y), y)$로 두면 다음 도식을 얻습니다:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\mathsf{pr}_2} & A \times A & \xrightarrow{\mu} & A \\ {\scriptstyle \mathsf{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} \\ A & \xleftarrow[\mathsf{pr}_2]{} & A \times A & \xrightarrow[\mathsf{pr}_1]{} & A \end{array}$$

이 도식은 가환하며 세 수직 사상은 동치입니다. f의 역은 다음과 같이 정의되는 함수 g입니다.

$$g(u, v) :\equiv (\mu(-, v)^{-1}(u), v).$$

이로써 두 줄이 동치인(따라서 같은) 스팬임이 보여지므로, 우리가 구성한 올뭉치의 전체 공간은 아랫줄의 푸시아웃과 동치입니다. 그리고 정의에 의해 이 후자의 푸시아웃은 A와 자기 자신의 조인입니다(§6.8 참조). 다음을 증명하였습니다:

보조정리 8.5.7. 연결된 H-공간 A가 주어지면, ΣA 위의 올뭉치로서 섬유가 A이고 전체 공간이 $A * A$인 올뭉치가 존재하며, 이를 **호프 구성**이라고 부릅니다.

8.5.3 호프 올뭉치

먼저 원 $\mathbb{S}^1$ 위에 H-공간 구조를 구성할 것입니다. 그러면 보조정리 8.5.7에 의해 섬유가 $\mathbb{S}^1$ 이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^1 * \mathbb{S}^1$ 인 $\mathbb{S}^2$ 위의 올뭉치를 얻게 됩니다. 그런 다음 이 조인이 $\mathbb{S}^3$ 과 동치임을 증명하겠습니다.

보조정리 8.5.8. 원 $\mathbb{S}^1$ 위에는 H-공간 구조가 존재합니다.

증명. H-공간 구조의 기점으로 base를 택합니다. 이제 곱셈 연산 $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$을 정의해야 합니다. μ의 커리된 형태 $\widetilde{\mu} : \mathbb{S}^1 \to (\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1)$를 $\mathbb{S}^1$에 대한 재귀로 다음과 같이 정의합니다:

$$\widetilde{\mu}(\mathsf{base}) :\equiv \mathsf{id}_{\mathbb{S}^1}, \qquad \text{그리고} \qquad \widetilde{\mu}(\mathsf{loop}) := \mathsf{funext}(h).$$

여기서 $h : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)}(x = x)$는 보조정리 6.4.2에서 정의된 함수이며, $h(\mathsf{base}) :\equiv \mathsf{loop}$라는 성질을 가집니다.

이제 모든 $x : \mathbb{S}^1$에 대하여 $\mu(x, \mathsf{base}) = \mu(\mathsf{base}, x) = x$임을 증명하기만 하면 됩니다. 정의에 의해 $x : \mathbb{S}^1$이면 $\mu(\mathsf{base}, x) = \widetilde{\mu}(\mathsf{base})(x) = \mathsf{id}_{\mathbb{S}^1}(x) = x$입니다. 등식 $\mu(x, \mathsf{base}) = x$는 $x : \mathbb{S}^1$에 대한 귀납법으로 증명합니다:

- x가 base이면 정의에 의해 $\mu(\mathsf{base}, \mathsf{base}) = \mathsf{base}$이므로 $\mathsf{refl}_{\mathsf{base}} : \mu(\mathsf{base}, \mathsf{base}) = \mathsf{base}$를 얻습니다.
- x가 loop를 따라 변할 때, 다음을 증명해야 합니다.

$$\mathsf{refl}_{\mathsf{base}} \cdot \mathsf{ap}_{\lambda x.\, x}(\mathsf{loop}) = \mathsf{ap}_{\lambda x.\, \mu(x,\mathsf{base})}(\mathsf{loop}) \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}.$$

좌변은 loop와 같으며, 우변에 대해서는 다음이 성립합니다:

$$\begin{aligned}
\mathsf{ap}_{\lambda x.\, \mu(x,\mathsf{base})}(\mathsf{loop}) \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} &= \mathsf{ap}_{\lambda x.\, (\widetilde{\mu}(x))(\mathsf{base})}(\mathsf{loop}) \\
&= \mathsf{happly}(\mathsf{ap}_{\lambda x.\, (\widetilde{\mu}(x))}(\mathsf{loop}), \mathsf{base}) \\
&= \mathsf{happly}(\mathsf{funext}(h), \mathsf{base}) \\
&= h(\mathsf{base}) \\
&= \mathsf{loop}.
\end{aligned}$$

□

이제 §6.8에서 타입 A와 B의 조인 $A * B$가 다음 도표의 푸시아웃이었음을 상기하십시오.

$$A \xleftarrow{\mathsf{pr}_1} A \times B \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} B.$$

보조정리 8.5.9. 조인 연산은 결합법칙을 만족합니다. 즉, A, B, C가 세 타입이면 동치 $(A * B) * C \simeq A * (B * C)$가 존재합니다.

증명. 귀납법으로 사상 $f : (A * B) * C \to A * (B * C)$를 정의합니다. 먼저 귀납법으로 $f \circ \mathsf{inl} : A * B \to A * (B * C)$를 정의하고, 이어서 $f \circ \mathsf{inr} : C \to A * (B * C)$를 정의한 다음, t의 첫 번째

성분에 대한 귀납법으로 $\mathsf{ap}_f \circ \mathsf{glue} : \prod_{(t:(A*B)\times C)} f(\mathsf{inl}(\mathsf{pr}_1(t))) = f(\mathsf{inr}(\mathsf{pr}_2(t)))$를 정의해야 합니다:

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathsf{inl})(\mathsf{inl}(a)) &:\equiv \mathsf{inl}(a),\\
(f \circ \mathsf{inl})(\mathsf{inr}(b)) &:\equiv \mathsf{inr}(\mathsf{inl}(b)),\\
\mathsf{ap}_{f\circ\mathsf{inl}}(\mathsf{glue}(a,b)) &:= \mathsf{glue}(a,\mathsf{inl}(b)),\\
f(\mathsf{inr}(c)) &:\equiv \mathsf{inr}(\mathsf{inr}(c)),\\
\mathsf{ap}_f(\mathsf{glue}(\mathsf{inl}(a),c)) &:= \mathsf{glue}(a,\mathsf{inr}(c)),\\
\mathsf{ap}_f(\mathsf{glue}(\mathsf{inr}(b),c)) &:= \mathsf{ap}_{\mathsf{inr}}(\mathsf{glue}(b,c)),\\
\mathsf{apd}_{\lambda x.\,\mathsf{ap}_f(\mathsf{glue}(x,c))}(\mathsf{glue}(a,b)) &:= \text{“}\mathsf{apd}_{\lambda x.\,\mathsf{glue}(a,x)}(\mathsf{glue}(b,c))\text{”}.
\end{aligned}$$

마지막 등식에서 우변의 타입은 다음과 같다는 점에 주목하십시오.

$$\mathsf{transport}^{\lambda x.\,\mathsf{inl}(a)=\mathsf{inr}(x)}(\mathsf{glue}(b,c),\mathsf{glue}(a,\mathsf{inl}(b))) = \mathsf{glue}(a,\mathsf{inr}(c))$$

반면 요구되는 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{transport}^{\lambda x.\,f(\mathsf{inl}(x))=f(\mathsf{inr}(c))}(\mathsf{glue}(a,b),\mathsf{ap}_f(\mathsf{glue}(\mathsf{inl}(a),c))) = \mathsf{ap}_f(\mathsf{glue}(\mathsf{inr}(b),c)).$$

그러나 정의의 앞선 조항들에 의해 이 두 타입은 모두 다음 타입과 동치입니다:

$$\mathsf{glue}(a,\mathsf{inr}(c)) = \mathsf{glue}(a,\mathsf{inl}(b)) \cdot \mathsf{ap}_{\mathsf{inr}}(\mathsf{glue}(b,c)),$$

따라서 동치를 통해 강제 변환하여 필요한 원소를 얻을 수 있습니다. 마찬가지로 사상 $g : A*(B*C) \to (A*B)*C$를 정의할 수 있으며, f와 g가 서로의 역임을 확인하는 것은 길고 지루하지만 본질적으로는 간단한 계산입니다. □

보다 개념적인 증명의 개요는 다음과 같습니다.

증명. 사상들이 자명한 사영인 다음 도표를 생각해 봅시다:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longleftarrow & A\times C & \longrightarrow & A\times C\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\
A\times B & \longleftarrow & A\times B\times C & \longrightarrow & A\times C\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
B & \longleftarrow & B\times C & \longrightarrow & C
\end{array}$$

각 열의 쌍대극한을 취하면 다음 도표를 얻으며, 이 도표의 쌍대극한은 $(A*B)*C$입니다:

$$A*B \longleftarrow (A*B)\times C \longrightarrow C$$

한편, 각 행의 쌍대극한을 취하면 쌍대극한이 $A*(B*C)$인 도표를 얻습니다.

따라서 쌍대극한에 대한 푸비니 정리와 유사한 정리(여기서 증명하지는 않았습니다)를 이용하면 동치 $(A*B)*C \simeq A*(B*C)$를 얻습니다. 다만 쌍대극한에 대한 이 푸비니 정리 를 증명하는 데에도 여전히 길고 지루한 계산이 필요합니다. □

보조정리 8.5.10. 임의의 타입 A에 대해 동치 $\Sigma A \simeq \mathbf{2} * A$가 존재합니다.

증명. 양방향의 두 사상을 정의하고 이들이 서로의 역임을 증명하는 것은 쉽습니다. 자세한 내용은 독자의 연습 문제로 남겨 둡니다. □

이제 호프 올뭉치를 구성할 수 있습니다:

정리 8.5.11. 섬유가 $\mathbb{S}^1$이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^3$인 $\mathbb{S}^2$ 위의 올뭉치가 존재합니다.

증명. 우리는 $\mathbb{S}^1$이 H-공간 구조를 가짐을 증명했으므로(보조정리 8.5.8 참고) 보조정리 8.5.7에 의해 $\mathbb{S}^2$ 위에 섬유가 $\mathbb{S}^1$이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^1 * \mathbb{S}^1$인 올뭉치가 존재합니다. 그런데 앞의 두 결과와 보조정리 6.5.1에 의해 다음을 얻습니다:

$$\mathbb{S}^1 * \mathbb{S}^1 = (\Sigma\mathbf{2}) * \mathbb{S}^1 = (\mathbf{2} * \mathbf{2}) * \mathbb{S}^1 = \mathbf{2} * (\mathbf{2} * \mathbb{S}^1) = \Sigma(\Sigma\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^3. \qquad \square$$

8.6 프로이덴탈 현수 정리

프로이덴탈 현수 정리를 증명하기 전에 연결성에 관한 몇 가지 보조정리가 필요합니다. 제7장에서는 고정된 n에 대해 n-연결 사상과 n-타입에 관한 여러 사실을 증명했습니다. 이제 여기서는 n을 변화시킬 때 어떤 일이 일어나는지에 관심을 둡니다. 예를 들어, 보조정리 7.5.7에서는 n-연결 사상이 n-타입들의 족에 대한 "귀납 원리"로 특징지어짐을 보였습니다. $k > n$일 때 n-연결 사상을 "따라 귀납하여" k-타입들의 족으로 가고자 한다면, 그러한 귀납 원리에 의한 함수가 존재하는지 곧바로 알 수는 없습니다. 그러나 다음 보조정리는 적어도 우리가 모르는 정도를 정량화할 수 있음을 알려 줍니다.

보조정리 8.6.1. $f : A \to B$가 n-연결이고 $P : B \to k\text{-}\mathsf{Type}$가 $k \geq n$인 k-타입들의 족이면, 유도된 다음 함수는

$$(- \circ f) : \Big(\prod_{b:B} P(b)\Big) \to \Big(\prod_{a:A} P(f(a))\Big)$$

$(k - n - 2)$-절단되어 있습니다.

증명. 자연수 $k - n$에 대한 귀납법을 사용합니다. $k = n$일 때 이는 보조정리 7.5.7입니다. 귀납 단계에서는 f가 n-연결되어 있고 P가 $(k+1)$-타입들의 족이라고 가정합니다. $(- \circ f)$가 $(k - n - 1)$-절단되어 있음을 보이기 위해 $\ell : \prod_{(a:A)} P(f(a))$라고 합시다. 그러면 다음을 얻습니다.

$$\mathsf{fib}_{(- \circ f)}(\ell) \simeq \sum_{(g:\prod_{(b:B)} P(b))} \prod_{(a:A)} g(f(a)) = \ell(a).$$

(g, p)와 (h, q)가 이 타입에 속한다고 합시다. 그러면 $p : g \circ f \sim \ell$이고 $q : h \circ f \sim \ell$이며, 다음도 얻습니다.

$$\big((g, p) = (h, q)\big) \simeq \Big(\sum_{r:g \sim h} r \circ f = p \centerdot q^{-1}\Big).$$

그런데 여기서 우변은 다음 사상의 섬유입니다.

$$(- \circ f) : \Big(\prod_{b:B} Q(b)\Big) \to \Big(\prod_{a:A} Q(f(a))\Big)$$

여기서 $Q(b) :\equiv (g(b) = h(b))$ 입니다. P가 $(k+1)$-타입들의 족이므로 Q는 k-타입들의 족이고, 따라서 귀납 가설에 의해 이 섬유는 $(k-n-2)$-타입입니다. 그러므로 $\mathsf{fib}_{(-\circ f)}(\ell)$의 모든 경로 공간은 $(k-n-2)$-타입이고, 따라서 이것은 $(k-n-1)$-타입입니다. □

(A, a_0)와 (B, b_0)가 점을 가진 타입이면, 이들의 **쐐기합** $A \vee B$는 $A \xleftarrow{a_0} \mathbf{1} \xrightarrow{b_0} B$의 푸시아웃으로 정의됨을 상기하십시오. 두 사상 $\lambda a.\,(a, b_0)$와 $\lambda b.\,(a_0, b)$로 정의되는 표준적인 사상 $i : A \vee B \to A \times B$가 있습니다. 다음 보조정리는 본질적으로 A와 B가 고도로 연결되어 있으면 이 사상도 고도로 연결되어 있다는 것을 말합니다. 다만 보조정리 7.5.7에서 제시한 연결성의 특성화를 사용하고 (타입 족으로 일반화한) 쐐기합의 보편 성질을 대입하면, 증명하기에도 사용하기에도 조금 더 편리합니다.

보조정리 8.6.2 (쐐기합 연결성 보조정리). (A, a_0)와 (B, b_0)가 각각 n-연결 및 m-연결된 점을 가진 타입이고 $n, m \geq 0$이라고 가정하고, 다음과 같이 둡시다. $P : A \to B \to (n+m)\text{-Type}$. 그러면 $p : f(a_0) = g(b_0)$를 갖춘 임의의 $f : \prod_{(a:A)} P(a, b_0)$와 $g : \prod_{(b:B)} P(a_0, b)$에 대하여, 다음 호모토피들을 갖춘 $h : \prod_{(a:A)} \prod_{(b:B)} P(a, b)$가 존재합니다.

$$q : \prod_{a:A} h(a, b_0) = f(a) \qquad \text{그리고} \qquad r : \prod_{b:B} h(a_0, b) = g(b)$$

이때 $p = q(a_0)^{-1} \cdot r(b_0)$ 입니다.

증명. $Q : A \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$Q(a) :\equiv \sum_{k:\prod_{(b:B)} P(a,b)} (f(a) = k(b_0)).$$

그러면 $(g, p) : Q(a_0)$를 얻습니다. $a_0 : \mathbf{1} \to A$가 $(n-1)$-연결되어 있으므로, Q가 $(n-1)$-타입들의 족이면 $\ell(a_0) = (g, p)$를 만족하는 $\ell : \prod_{(a:A)} Q(a)$를 얻게 되며, 이 경우 $h(a, b) :\equiv \mathsf{pr}_1(\ell(a))(b)$로 정의할 수 있습니다. 그런데 고정된 a에 대하여 타입 $Q(a)$는 다음 사상의 $f(a)$ 위의 섬유입니다.

$$\left(\prod_{b:B} P(a, b)\right) \to P(a, b_0)$$

이 사상은 $b_0 : \mathbf{1} \to B$와의 선합성으로 주어집니다. $b_0 : \mathbf{1} \to B$가 $(m-1)$-연결되어 있으므로, 보조정리 8.6.1에 의해 이 섬유가 $(n-1)$-절단되어 있으려면 각 타입 $P(a, b)$가 $(n+m)$-타입이기만 하면 충분하며, 이는 우리가 이미 가정한 것입니다. □

(X, x_0)를 점을 가진 타입이라 하고, §6.5에서 생성자 $\mathsf{N}, \mathsf{S} : \Sigma X$와 $\mathsf{merid} : X \to (\mathsf{N} = \mathsf{S})$를 갖춘 현수 ΣX의 정의를 상기하십시오. ΣX를 기점 N를 가진 점을 가진 공간으로 간주하며, 따라서 $\Omega\Sigma X :\equiv (\mathsf{N} =_{\Sigma X} \mathsf{N})$ 입니다. 그러면 다음과 같은 표준적인 사상이 있습니다.

$$\sigma : X \to \Omega\Sigma X$$
$$\sigma(x) :\equiv \mathsf{merid}(x) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}.$$

주 8.6.3. 고전적인 대수적 위상수학에서는 축소 현수를 고려하는데, 여기서는 경로 $\mathsf{merid}(x_0)$를 한 점으로 붕괴시켜 N와 S를 동일시합니다. 축소 현수와 비축소 현수는 호모토피 동치이므로 순수하게 호모토피 이론적인 우리의 관점에서는 그 차이가 보이지 않으며 — 게다가 고차 귀납적 타입은 어차피 고차 경로를 통해서만 점들을 "동일시"할 수 있게 해 주므로, 호모토피 타입 이론에서 축소 현수를 고려할 이유는 없습니다. 그러나 σ의 정의에 (어쩌면 예상치 못하게) $\mathsf{merid}(x_0)^{-1}$가 나타나는 이유는 우리 현수의 "비축소성" 때문입니다.

이제 우리의 목표는 다음을 증명하는 것입니다.

정리 8.6.4 (프로이덴탈 현수 정리). X가 n-연결되어 있고 점을 가지며 $n \geq 0$이라고 가정합시다. 그러면 사상 $\sigma : X \to \Omega\Sigma(X)$는 $2n$-연결되어 있습니다.

인코드-디코드 방법을 사용하되, 약간 다른 방식으로 적용하겠습니다. 지금까지 대부분의 경우에는 $\mathsf{code}(a_0) :\equiv B$인 족 $\mathsf{code} : A \to \mathcal{U}$와 동치들의 족 $\mathsf{decode} : \prod_{(x:A)} \mathsf{code}(x) \simeq (a_0 = x)$를 구성함으로써, 어떤 타입의 루프 공간 $\Omega(A, a_0)$가 다른 어떤 타입 B와 동치임을 특성화하는 데 이 방법을 사용했습니다.

그러나 이 경우에는 $\sigma : X \to \Omega\Sigma X$가 $2n$-연결되어 있음을 보이고자 합니다. §8.7에서 보게 될 것처럼 앞의 방법의 절단된 버전을 사용하여 $\|X\|_{2n} \to \|\Omega\Sigma X\|_{2n}$가 동치임을 증명할 수도 있지만 — 이는 사상이 $2n$-연결되어 있다는 것보다 약간 약한 진술입니다(따름정리 8.4.8 및 8.8.5를 참조하십시오). 그러나 일반적인 경우에 $\mathsf{decode}(x)$가 동치임을 증명하려면 이와 동등하게 그 섬유들이 축약 가능함을 증명할 수도 있으며, 그렇게 하더라도 여전히 기저 타입에 대한 귀납법을 사용할 수 있다는 점에 주목하십시오. 이를 일반화하면 루프 공간으로 가는 사상의 연결성, 즉 그 섬유들의 절단이 축약 가능함을 증명할 수 있습니다. 게다가 code와 decode를 따로 구성하는 대신, 섬유들의 절단에 대한 코드의 족을 직접 구성할 수 있습니다.

정의 8.6.5. X가 n-연결되어 있고 점을 가지며 $n \geq 0$이면, 다음과 같은 족이 존재합니다.

$$\mathsf{code} : \prod_{y:\Sigma X} (\mathsf{N} = y) \to \mathcal{U} \tag{8.6.6}$$

이 족은 다음을 만족합니다.

$$\mathsf{code}(\mathsf{N}, p) :\equiv \|\mathsf{fib}_\sigma(p)\|_{2n} \equiv \left\|\textstyle\sum_{(x:X)} (\mathsf{merid}(x) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = p)\right\|_{2n} \tag{8.6.7}$$

$$\mathsf{code}(\mathsf{S}, q) :\equiv \|\mathsf{fib}_{\mathsf{merid}}(q)\|_{2n} \equiv \left\|\textstyle\sum_{(x:X)} (\mathsf{merid}(x) = q)\right\|_{2n}. \tag{8.6.8}$$

우리의 최종 목표는 모든 $y : \Sigma X$와 $p : \mathsf{N} = y$에 대하여 $\mathsf{code}(y, p)$가 축약 가능함을 증명하는 것입니다. 이를 $y :\equiv \mathsf{N}$에 적용하면 σ의 모든 섬유가 $2n$-연결되어 있음을 보이게 되고, 따라서 σ는 $2n$-연결되어 있습니다.

정의 8.6.5의 증명. $y : \Sigma X$에 대한 귀납법으로 $\mathsf{code}(y, p)$를 정의하며, 처음 두 경우는 (8.6.7)과 (8.6.8)입니다. 이제 각 $x_1 : X$에 대하여 다음 의존 경로를 구성하는 일이 남아 있습니다.

$$\mathsf{code}(\mathsf{N}) =^{\lambda y.\,(\mathsf{N}=y)\to\mathcal{U}}_{\mathsf{merid}(x_1)} \mathsf{code}(\mathsf{S}).$$

보조정리 2.9.6에 의해, 이는 다음 경로족을 제시하는 것과 동치입니다.

$$\prod_{q:\mathsf{N}=\mathsf{S}} \mathsf{code}(\mathsf{N})(\mathsf{transport}^{\lambda y.\,(\mathsf{N}=y)}(\mathsf{merid}(x_1)^{-1}, q)) = \mathsf{code}(\mathsf{S})(q).$$

그리고 유니밸런스와 경로 타입에서의 수송에 의해, 이는 다음 동치족을 제시하는 것과 동치입니다.

$$\prod_{q:\mathsf{N}=\mathsf{S}} \mathsf{code}(\mathsf{N}, q \cdot \mathsf{merid}(x_1)^{-1}) \simeq \mathsf{code}(\mathsf{S}, q).$$

다음 사상족을 정의하겠습니다.

$$\prod_{q:\mathsf{N}=\mathsf{S}} \mathsf{code}(\mathsf{N}, q \cdot \mathsf{merid}(x_1)^{-1}) \to \mathsf{code}(\mathsf{S}, q). \tag{8.6.9}$$

그런 다음 이들이 모두 동치임을 보이겠습니다. 따라서 $q : \mathsf{N} = \mathsf{S}$라 합시다. 절단의 보편 성질과 $\mathsf{code}(\mathsf{N}, -)$ 및 $\mathsf{code}(\mathsf{S}, -)$의 정의에 의해, 각 $x_2 : X$에 대하여 다음 사상을 정의하면 충분합니다.

$$\left(\mathsf{merid}(x_2) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = q \cdot \mathsf{merid}(x_1)^{-1}\right) \to \left\| \textstyle\sum_{(x:X)} (\mathsf{merid}(x) = q) \right\|_{2n}.$$

이제 각 $x_1, x_2 : X$에 대하여 이 타입은 $2n$-절단되어 있는 반면, X는 n-연결되어 있습니다. 따라서 보조정리 8.6.2에 의해, x_1이 x_0인 경우와 x_2가 x_0인 경우에 이 사상을 정의하고, 둘 다 x_0일 때 두 정의가 일치함을 확인하면 충분합니다.

x_1이 x_0일 때 가정은 $r : \mathsf{merid}(x_2) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = q \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}$입니다. 따라서 r에서 $\mathsf{merid}(x_0)^{-1}$를 소거하여 $r' : \mathsf{merid}(x_2) = q$를 얻으므로, 상을 $|(x_2, r')|_{2n}$로 정의할 수 있습니다.

x_2가 x_0일 때 가정은 $r : \mathsf{merid}(x_0) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = q \cdot \mathsf{merid}(x_1)^{-1}$입니다. 이를 재배열하면 $r'' : \mathsf{merid}(x_1) = q$를 얻으며, 상을 $|(x_1, r'')|_{2n}$로 정의할 수 있습니다.

마지막으로 x_1과 x_2가 모두 x_0일 때에는 그 결과로 얻은 r'과 r''이 일치함을 보이면 충분하며, 이는 경로 합성에 관한 쉬운 보조정리입니다. 이로써 (8.6.9)의 정의가 완성됩니다. 이것이 동치족임을 보이려면, 동치라는 성질은 단순 명제이고 $x_0 : \mathbf{1} \to X$는 (적어도) (-1)-연결되어 있으므로, x_1이 x_0이라고 가정하면 충분합니다. 이 경우 위의 구성을 살펴보면, 이는 본질적으로 $\mathsf{merid}(x_0)^{-1}$를 소거하는 함수의 $2n$-절단이며, 그 함수는 동치임을 알 수 있습니다. □

(8.6.7)과 (8.6.8)에 더하여, code의 구성으로부터 그것이 경로에 어떻게 작용하는지에 관한 정보를 추출해야 합니다. 이를 위해 다음 보조정리를 사용합니다.

보조정리 8.6.10. $A : \mathcal{U}$, $B : A \to \mathcal{U}$, $C : \prod_{(a:A)} B(a) \to \mathcal{U}$라 하고, 또한 $m : a_1 = a_2$인 $a_1, a_2 : A$와 $b : B(a_2)$가 주어졌다고 합시다. 그러면 다음 함수는

$$\mathsf{transport}^{\widehat{C}}(\mathsf{pair}^{=}(m, t), -) : C(a_1, \mathsf{transport}^{B}(m^{-1}, b)) \to C(a_2, b),$$

(여기서 $t : \mathsf{transport}^{B}(m, \mathsf{transport}^{B}(m^{-1}, b)) = b$는 자명한 정합성 경로이고 $\widehat{C} : (\sum_{(a:A)} B(a)) \to \mathcal{U}$는 C를 언커리한 형태입니다) 다음 합성으로부터 유니밸런스에 의해 얻어지는 동치와 같습니다.

$$\begin{aligned} C(a_1, \mathsf{transport}^{B}(m^{-1}, b)) &= \mathsf{transport}^{\lambda a.\, B(a) \to \mathcal{U}}(m, C(a_1))(b) && (\text{(2.9.4)에 의해}) \\ &= C(a_2, b). && (\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_C(m), b)\text{에 의해}) \end{aligned}$$

증명. 경로 귀납법에 의해 a_2가 a_1이고 m이 refl_{a_1}이라고 가정할 수 있으며, 이 경우 두 함수 모두 항등함수입니다. □

이 보조정리를 $A :\equiv \Sigma X$, $B :\equiv \lambda y.\, (\mathsf{N} = y)$, $C :\equiv \mathsf{code}$로 두고, 어떤 $x_1 : X$에 대하여 $a_1 :\equiv \mathsf{N}$, $a_2 :\equiv \mathsf{S}$, $m :\equiv \mathsf{merid}(x_1)$로 두며, 마지막으로 $b :\equiv q$를 어떤 경로 $\mathsf{N} = \mathsf{S}$로 두어 적용합니다. ΣX에 대한 귀납법의 계산 규칙은 $\mathsf{apd}_C(m)$을 유니밸런스와 함수 외연성으로부터 특정한 방식으로 구성한 경로와 동일시합니다. 보조정리 8.6.10에 기술된 두 번째 함수는 본질적으로 이러한 유니밸런스와 함수 외연성의 적용을 되돌리는 것으로 이루어지며, 이를 통해 보조정리 8.6.2를 사용하여 정의한 특정 함수들 (8.6.9)로 다시 환원됩니다. 따라서 보조정리 8.6.10는 $\mathsf{pair}^{=}(q, t)$를 따라 수송하면 본질적으로 이 함수들이 복원된다는 것을 말해 줍니다.

마지막으로, 구성에 의해 x_1 또는 x_2가 x_0과 일치하고 입력이 $|-|_{2n}$의 상에 속할 때에는 이 함수들이 무엇인지 더 명시적으로 알 수 있습니다. 따라서 임의의 $x_2 : X$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_0), t), |(x_2, r)|_{2n}) = \left|(x_1, r')\right|_{2n} \tag{8.6.11}$$

여기서 $r : \mathsf{merid}(x_2) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = \mathsf{transport}^B(\mathsf{merid}(x_0)^{-1}, q)$는 앞에서와 마찬가지로 임의의 경로이며, $r' : \mathsf{merid}(x_2) = q$는 r의 끝점을 $q \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}$와 동일시하고 $\mathsf{merid}(x_0)^{-1}$를 소거하여 r로부터 얻습니다. 마찬가지로 임의의 $x_1 : X$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_1), t), |(x_0, r)|_{2n}) = \left|(x_1, r'')\right|_{2n} \tag{8.6.12}$$

여기서 $r : \mathsf{merid}(x_0) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = \mathsf{transport}^B(\mathsf{merid}(x_1)^{-1}, q)$이고, $r'' : \mathsf{merid}(x_1) = q$는 그 끝점을 동일시하고 경로들을 재배열하여 얻습니다.

정리 8.6.4의 증명. 남은 것은 각 $y : \Sigma X$와 $p : \mathsf{N} = y$에 대해 $\mathsf{code}(y, p)$가 축약 가능함을 보이는 것입니다. 먼저 축약 중심 $c(y, p) : \mathsf{code}(y, p)$를 선택해야 합니다. 이는 앞선 증명들에서 함수 encode를 정의한 것에 해당하므로, 수송으로 정의합니다. y가 N이고 p가 $\mathsf{refl}_{\mathsf{N}}$인 특수한 경우에는 다음이 성립함에 유의하십시오.

$$\mathsf{code}(\mathsf{N}, \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}) \equiv \left\| \textstyle\sum_{(x:X)} (\mathsf{merid}(x) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}) \right\|_{2n}.$$

따라서 $c(\mathsf{N}, \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}) :\equiv \left|(x_0, \mathsf{rinv}_{\mathsf{merid}(x_0)})\right|_{2n}$로 선택할 수 있으며, 여기서 rinv_q는 임의의 q에 대한 자명한 경로 $q \cdot q^{-1} = \mathsf{refl}$입니다. 이제 p에 대한 경로 귀납법으로 $c : \prod_{(y:\Sigma X)} \prod_{(p:\mathsf{N}=y)} \mathsf{code}(y, p)$를 얻을 수 있지만, 수송을 이용하여 다음과 같이 구체적으로 정의할 수도 있다는 점이 아래에서 중요합니다:

$$c(y, p) :\equiv \mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}(\mathsf{pair}^{=}(p, \mathsf{tid}_p), c(\mathsf{N}, \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}))$$

여기서 $\hat{\mathsf{code}} : \left(\sum_{(y:\Sigma X)} (\mathsf{N} = y)\right) \to \mathcal{U}$는 code 를 언커리한 버전이며, $\mathsf{tid}_p : p_*(\mathsf{refl}) = p$는 표준적인 보조정리입니다.

다음으로 $\mathsf{code}(y, p)$의 모든 원소가 $c(y, p)$와 같음을 보여야 합니다. 이번에도 경로 귀납법에 의해 y가 N이고 p가 $\mathsf{refl}_{\mathsf{N}}$라고 가정하면 충분합니다. 실제로는 y가 N이고 p가 임의인 더 일반적인 경우에 이를 증명하겠습니다. 즉, 임의의 $p : \mathsf{N} = \mathsf{N}$와 $d : \mathsf{code}(\mathsf{N}, p)$에 대하여 $d = c(\mathsf{N}, p)$임을 보이겠습니다. 이 등식은 $(2n-1)$-타입이므로, 어떤 $x_1 : X$와 $r : \mathsf{merid}(x_1) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1} = p$에 대하여 d가 $|(x_1, r)|_{2n}$ 꼴이라고 가정할 수 있습니다.

이제 경로 귀납법을 한 번 더 적용하여 r이 반사성이고 p가 $\mathsf{merid}(x_1) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}$라고 가정할 수 있습니다. (앞에서 임의의 p로 일반화한 것은 이 때문입니다.) 따라서 다음을 증명해야 합니다.

$$\left|(x_1, \mathsf{refl}_{\mathsf{merid}(x_1) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}})\right|_{2n} \;=\; c\left(\mathsf{N}, \mathsf{refl}_{\mathsf{merid}(x_1) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}}\right). \tag{8.6.13}$$

정의에 따라 이 등식의 우변은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_1) \cdot \mathsf{merid}(x_0)^{-1}, _), |(x_0, _)|_{2n}\right) \\
&\qquad = \mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_0)^{-1}, _), \\
&\qquad\qquad \mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_1), _), |(x_0, _)|_{2n}\right)\Big) \\
&\qquad\qquad = \mathsf{transport}^{\hat{\mathsf{code}}}\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{merid}(x_0)^{-1}, _), |(x_1, _)|_{2n}\right) = |(x_1, _)|_{2n}
\end{aligned}$$

여기서 밑줄 _ 에는 적절한 정합성 경로를 채워 넣어야 합니다. 첫 번째 단계는 수송의 함자성이고, 두 번째 단계는 (8.6.12)를 사용하며, 세 번째 단계는 (수송을 반대편으로 옮긴 뒤) (8.6.11)을 사용합니다. 따라서 첫 번째 성분은 (8.6.13)의 좌변과 같습니다. 정합성 경로가 모두 상쇄되어 두 번째 성분이 반사성이 된다는 것은 독자가 확인하도록 남겨 둡니다. □

따름정리 8.6.14 (프로이덴탈 동치). X가 기점을 갖는 n-연결 타입이고 $n \geq 0$이라고 가정합시다. 그러면 $\|X\|_{2n} \simeq \|\Omega\Sigma(X)\|_{2n}$입니다.

증명. 정리 8.6.4에 의해 σ는 $2n$-연결입니다. 따라서 보조정리 7.5.14에 의해 σ는 $2n$-절단 사이의 동치입니다. □

프로이덴탈 현수 정리의 중요한 따름정리 하나는 구면의 호모토피 군이 특정 범위에서 안정적이라는 것입니다(이는 표 8.1에서 북동쪽에서 남서쪽으로 향하는 대각선들입니다).

따름정리 8.6.15 (구면의 안정성). $k \leq 2n-2$이면 $\pi_{k+1}(S^{n+1}) = \pi_k(S^n)$입니다.

증명. $k \leq 2n-2$라고 가정합시다. 따름정리 8.2.2에 의해 $\mathbb{S}^n$은 $(n-1)$-연결입니다. 따라서 따름정리 8.6.14에 의해 다음이 성립합니다.

$$\|\Omega(\Sigma(\mathbb{S}^n))\|_{2(n-1)} = \|\mathbb{S}^n\|_{2(n-1)}.$$

$k \leq 2(n-1)$이므로, 보조정리 7.3.15에 의해 양변에 $\|-\|_k$를 적용하면 이 등식이 k에 대해서도 성립함을 알 수 있습니다.

$$\|\Omega(\Sigma(\mathbb{S}^n))\|_k = \|\mathbb{S}^n\|_k. \tag{8.6.16}$$

그러면 증명의 핵심 아이디어는 다음과 같습니다. 이 동치들이 해당 공간들의 기점에 적절히 작용한다는 것과 $k > 0$일 때 이 동치들이 곱셈을 보존한다는 것을 확인하는 과정은 생략합니다.

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}) &\equiv \left\|\Omega^{k+1}(\mathbb{S}^{n+1})\right\|_0 \\
&\equiv \left\|\Omega^k(\Omega(\mathbb{S}^{n+1}))\right\|_0 \\
&\equiv \left\|\Omega^k(\Omega(\Sigma(\mathbb{S}^n)))\right\|_0 \\
&= \Omega^k(\|(\Omega(\Sigma(\mathbb{S}^n)))\|_k) && \text{(정리 7.3.12에 의해)} \\
&= \Omega^k(\|\mathbb{S}^n\|_k) && \text{((8.6.16)에 의해)} \\
&= \left\|\Omega^k(\mathbb{S}^n)\right\|_0 && \text{(정리 7.3.12에 의해)} \\
&\equiv \pi_k(\mathbb{S}^n). && \square
\end{aligned}$$

이는 이러한 안정적인 대각선 중 하나에서 항목 하나만 계산하면 그 대각선의 모든 항목을 알 수 있다는 뜻입니다. 예를 들면 다음과 같습니다.

정리 8.6.17. 모든 $n \geq 1$에 대해 $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$입니다.

증명. 증명은 n에 대한 귀납으로 합니다. 이미 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$(따름정리 8.1.11)와 $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$(따름정리 8.5.2)를 얻었습니다. $n \geq 2$일 때 $n \leq (2n-2)$입니다. 따라서 따름정리 8.6.15에 의해 $\pi_{n+1}(S^{n+1}) = \pi_n(S^n)$이며, 이 동치를 귀납 가설과 결합하면 결과를 얻습니다. □

따름정리 8.6.18. 어떤 $n \geq -1$에 대해서도 $\mathbb{S}^{n+1}$은 n-타입이 아닙니다.

따름정리 8.6.19. $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$.

증명. 따름정리 8.5.2에 의해 $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \pi_3(\mathbb{S}^3)$입니다. 그런데 정리 8.6.17에 의해 $\pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$입니다. □

8.7 판 캄펀 정리

판 캄펀 정리는 공간들의 (호모토피) 푸시아웃의 기본군 π_1을 계산합니다. 이 정리는 전통적으로 두 열린 부분공간 U와 V의 합집합인 위상 공간 X에 대해 서술되지만, 호모토피 이론의 관점에서 이는 X가 U와 V의 교집합 위에서 U와 V의 푸시아웃이 되도록 보장하는 편리한 방법일 뿐입니다. 따라서 우리는 임의의 푸시아웃에 대해 판 캄펀 정리의 한 형태를 증명하겠습니다.

이 절에서는 §8.1에서 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$에 사용한 것과 같은 인코드-디코드 방법을 사용하는 판 캄펀 정리의 증명을 설명하겠습니다. 좀 더 호모토피 이론적인 접근법도 있습니다. 연습문제 9.11을 참고하십시오.

인코드-디코드 방법을 좀 더 정교하게 다듬은 형태가 필요합니다. §8.1에서(그리고 §§2.12 및 2.13에서도) 우리는 이 방법을 사용하여 (고차) 귀납적 타입 W의 경로 공간을 특징지었고 — 그 결과로 루프 공간 $\Omega(W)$의 특징과, 이를 통해 그 0-절단인 $\pi_1(W)$의 특징도 얻었습니다. 판 캄펀 정리에서 우리의 목표는 기본군 $\pi_1(W)$를 특징짓는 것뿐이며, 사용할 수 있는 루프 공간이나 경로 공간의 명시적인 서술도 없습니다.

같은 기법을 경로 올뭉치의 절단된 형태에 직접 적용할 수 있으며, 이를 통해 기본 군 $\pi_1(W)$뿐만 아니라 기본 그루포이드 전체를 특징지을 수 있습니다. 구체적으로, 타입 X에 대해 그 동일성 타입의 0-절단을 $\Pi_1 X : X \to X \to \mathcal{U}$로 표기합니다. 즉, $\Pi_1 X(x,y) :\equiv \|x = y\|_0$입니다. 다음과 같이 유도된 그루포이드 연산이 있다는 점에 유의하십시오.

$$\begin{aligned}
(- \cdot -) &: \Pi_1 X(x,y) \to \Pi_1 X(y,z) \to \Pi_1 X(x,z) \\
(-)^{-1} &: \Pi_1 X(x,y) \to \Pi_1 X(y,x) \\
\mathsf{refl}_x &: \Pi_1 X(x,x) \\
\mathsf{ap}_f &: \Pi_1 X(x,y) \to \Pi_1 Y(fx,fy)
\end{aligned}$$

이 연산들에는 경로에 대한 대응 연산과 같은 표기법을 사용합니다.

8.7.1 소박한 판 캄펀 정리

판 캄펀 정리의 "소박한" 버전부터 시작합니다. 이 버전은 유용하지만 고전적인 버전만큼 유용하지는 않습니다. §8.7.2에서 이를 더 유용한 버전으로 개선할 것입니다.

타입 A, B, C와 함수 $f : A \to B$ 및 $g : A \to C$가 주어졌을 때, P를 이들의 푸시아웃 $B \sqcup^A C$라 합시다. §6.8에서 보았듯이, P는 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입입니다.

- $i : B \to P$,
- $j : C \to P$, 그리고
- 모든 $x : A$에 대하여, 경로 $kx : if x = jgx$입니다.

P에 대한 이중 귀납법으로 $\mathsf{code} : P \to P \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 정의합니다.

- $\mathsf{code}(ib, ib')$는 다음과 같은 수열들의 타입의 집합-몫(§6.10 참조)입니다.

$$(b, p_0, x_1, q_1, y_1, p_1, x_2, q_2, y_2, p_2, \dots, y_n, p_n, b')$$

  여기서

  - $n : \mathbb{N}$
  - $0 < k \leq n$에 대하여 $x_k : A$이고 $y_k : A$입니다.
  - $n > 0$일 때 $p_0 : \Pi_1 B(b, fx_1)$이고 $p_n : \Pi_1 B(fy_n, b')$이며, $n = 0$일 때 $p_0 : \Pi_1 B(b, b')$입니다.
  - $1 \leq k < n$에 대하여 $p_k : \Pi_1 B(fy_k, fx_{k+1})$입니다.
  - $1 \leq k \leq n$에 대하여 $q_k : \Pi_1 C(gx_k, gy_k)$입니다.

  이 몫은 다음 등식들로 생성됩니다.

$$(\dots, q_k, y_k, \mathsf{refl}_{fy_k}, y_k, q_{k+1}, \dots) = (\dots, q_k \cdot q_{k+1}, \dots)$$
$$(\dots, p_k, x_k, \mathsf{refl}_{gx_k}, x_k, p_{k+1}, \dots) = (\dots, p_k \cdot p_{k+1}, \dots)$$

  (아래의 주 8.7.3를 참조하십시오). 이러한 수열들의 타입을 귀납적 타입으로 정확히 정의하는 일은 독자에게 맡깁니다.
- $\mathsf{code}(jc, jc')$는 B와 C의 역할이 뒤바뀐다는 점을 제외하면 동일합니다. 마찬가지로 표기상으로도 x와 y의 역할, 그리고 p와 q의 역할을 뒤바꿉니다.
- $\mathsf{code}(ib, jc)$와 $\mathsf{code}(jc, ib)$도 비슷하지만, 한 타입에서 시작하여 다른 타입에서 끝나도록 홀짝성을 바꿉니다.
- $a : A$와 $b : B$에 대하여, 다음 동치가 필요합니다.

$$\mathsf{code}(ib, ifa) \simeq \mathsf{code}(ib, jga). \tag{8.7.1}$$

  이 동치는 수열 위에서 다음과 같이 정의되는 두 함수로 이루어지도록 정의합니다.

$$(\dots, y_n, p_n, fa) \mapsto (\dots, y_n, p_n, a, \mathsf{refl}_{ga}, ga),$$
$$(\dots, x_n, p_n, a, \mathsf{refl}_{fa}, fa) \mapsto (\dots, x_n, p_n, ga).$$

  이 두 함수가 모두 동치 관계를 보존하며, 따라서 코드들의 타입 위의 함수를 정의한다는 것은 쉽게 알 수 있습니다. 왼쪽에서 오른쪽으로 갔다가 다시 왼쪽으로 돌아오는 합성은 다음과 같습니다.

$$(\dots, y_n, p_n, fa) \mapsto (\dots, y_n, p_n, a, \mathsf{refl}_{ga}, a, \mathsf{refl}_{fa}, fa)$$

  이는 몫의 생성 등식에 의해 항등 함수와 같습니다. 다른 합성도 마찬가지입니다. 이로써 동치 (8.7.1)를 정의하였습니다.
- 마찬가지로, 다음 동치들이 필요합니다.

$$\mathsf{code}(jc, ifa) \simeq \mathsf{code}(jc, jga)$$
$$\mathsf{code}(ifa, ib) \simeq (jga, ib)$$
$$\mathsf{code}(ifa, jc) \simeq (jga, jc)$$

  이들은 모두 정확히 같은 방식으로 정의됩니다(뒤의 두 동치는 반사성 항을 끝이 아니라 처음에 추가하여 정의합니다).

- 마지막으로, $a, a' : A$에 대하여 다음 도식이 가환함을 알아야 합니다.

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{code}(ifa, ifa') & \longrightarrow & \mathsf{code}(ifa, jga') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{code}(jga, ifa') & \longrightarrow & \mathsf{code}(jga, jga') \end{array} \tag{8.7.2}$$

  이는 수열의 처음에 무언가를 추가한 다음 끝에 무언가를 추가하든, 그 반대 순서로 하든 결과가 같다는 뜻입니다.

주 8.7.3. code 의 정의에 집합-몫을 생성하는 추가적인 등식들, 예컨대 다음과 같은 것들이 있으리라고 예상할 수도 있습니다.

$$(\dots, p_{k-1} \blacksquare fw, x'_k, q_k, \dots) = (\dots, p_{k-1}, x_k, gw \blacksquare q_k, \dots) \qquad (w : \Pi_1 A(x_k, x'_k) \text{에 대해})$$
$$(\dots, q_k \blacksquare gw, y'_k, p_k, \dots) = (\dots, q_k, y_k, fw \blacksquare p_k, \dots). \qquad (w : \Pi_1 A(y_k, y'_k) \text{에 대해})$$

하지만 이것들은 필요하지 않습니다! 사실 이것들은 w에 대한 경로 귀납법에 의해 자동으로 따라 나옵니다. 이것이 "소박한" 판 캄펀 정리와 다음 소절에서 살펴볼 더 정교한 정리 사이의 주요 차이점입니다.

계속해서, 올뭉치 code에서의 수송을 다음과 같이 특징지을 수 있습니다:

- $p : b =_B b'$와 $u : P$에 대해 다음이 성립합니다

$$\mathsf{transport}^{b \mapsto \mathsf{code}(u,ib)}(p, (\dots, y_n, p_n, b)) = (\dots, y_n, p_n \blacksquare p, b').$$

- $q : c =_C c'$와 $u : P$에 대해 다음이 성립합니다

$$\mathsf{transport}^{c \mapsto \mathsf{code}(u,jc)}(q, (\dots, x_n, q_n, c)) = (\dots, x_n, q_n \blacksquare q, c').$$

여기서는 X의 경로와 $\Pi_1 X$에서의 그 상에 같은 이름을 사용하여 표기법을 남용하고 있습니다. $\Pi_1 X$에서의 수송 역시 경로(의 상)와의 이어붙이기로 주어진다는 점에 유의하십시오. 이로부터 위의 명제들을 u에 대한 귀납으로 증명할 수 있습니다. 또한 다음도 성립합니다:

- $a : A$와 $u : P$에 대해 다음이 성립합니다

$$\mathsf{transport}^{v \mapsto \mathsf{code}(u,v)}(ha, (\dots, y_n, p_n, fa)) = (\dots, y_n, p_n, a, \mathsf{refl}_{ga}, ga).$$

이는 본질적으로 code의 정의로부터 따라 나옵니다.

또한 다음 함수를 구성합니다

$$r : \prod_{u:P} \mathsf{code}(u, u)$$

이 함수는 u에 대한 귀납법으로 다음과 같이 구성합니다:

$$rib :\equiv (b, \mathsf{refl}_b, b)$$
$$rjc :\equiv (c, \mathsf{refl}_c, c)$$

그리고 rka에 대해서는 다음 합성 등식을 취합니다

$$\begin{aligned}(ka, ka)_*(fa, \mathsf{refl}_{fa}, fa) &= (ga, \mathsf{refl}_{ga}, a, \mathsf{refl}_{fa}, a, \mathsf{refl}_{ga}, ga)\\ &= (ga, \mathsf{refl}_{ga}, ga)\end{aligned}$$

여기서 첫 번째 등식은 code에서의 수송에 관한 위의 관찰에 의한 것이고, 두 번째 등식은 code를 정의하는 데 사용된 집합 몫 관계의 한 사례입니다.

이제 다음을 증명하겠습니다:

정리 8.7.4 (소박한 판 캄펀 정리). 모든 $u, v : P$에 대해 다음 동치가 존재합니다

$$\Pi_1 P(u, v) \simeq \mathsf{code}(u, v).$$

증명. 다음 함수를 정의하려 합니다

$$\mathsf{encode} : \Pi_1 P(u, v) \to \mathsf{code}(u, v)$$

$\mathsf{code}(u, v)$가 집합이므로 함수 $(u =_P v) \to \mathsf{code}(u, v)$를 정의하는 것으로 충분합니다. 이는 수송으로 정의합니다:

$$\mathsf{encode}(p) :\equiv \mathsf{transport}^{v \mapsto \mathsf{code}(u,v)}(p, r(u)).$$

이제 다음을 정의하려 합니다

$$\mathsf{decode} : \mathsf{code}(u, v) \to \Pi_1 P(u, v)$$

평소와 같이 $u, v : P$에 대한 귀납법으로 진행합니다. u와 v의 각 경우에서 모든 등식 p_k와 q_k에 i 또는 j를 적절히 적용하고, h를 사용해 끝점들을 동일시하여 그 결과들을 P에서 이어 붙입니다. 예를 들어 $u \equiv ib$이고 $v \equiv ib'$일 때, 다음과 같이 정의합니다

$$\mathsf{decode}(b, p_0, x_1, q_1, y_1, p_1, \ldots, y_n, p_n, b') :\equiv (p_0) \cdot h(x_1) \cdot j(q_1) \cdot h(y_1)^{-1} \cdot i(p_1) \cdot \cdots \cdot h(y_n)^{-1} \cdot i(p_n). \tag{8.7.5}$$

$h : fi \sim gj$가 자연적이고 f와 g가 함자적이므로, 이는 집합 몫 동치 관계와 (8.7.1) 같은 동치들을 존중합니다.

평소와 같이, 다음 합성이 항등 함수임을 보이려 합니다

$$\Pi_1 P(u, v) \xrightarrow{\mathsf{encode}} \mathsf{code}(u, v) \xrightarrow{\mathsf{decode}} \Pi_1 P(u, v)$$

이를 위해 먼저 (공역이 집합이므로) 0-절단을 벗겨 낸 다음 경로 귀납법을 적용합니다. 입력 refl_u는 ru로 가고, 이는 다시 refl_u로 돌아갑니다($\mathsf{decode}(ru)$를 분해하기 위해 u에 대한 귀납법을 추가로 적용합니다).

마지막으로, 다음 합성을 생각해 봅시다

$$\mathsf{code}(u, v) \xrightarrow{\mathsf{decode}} \Pi_1 P(u, v) \xrightarrow{\mathsf{encode}} \mathsf{code}(u, v).$$

$u, v : P$에 대한 귀납법으로 진행합니다. $u \equiv ib$이고 $v \equiv ib'$일 때, 이 합성은 다음과 같습니다

$$\begin{aligned}(b, p_0, x_1, q_1, y_1, p_1, \dots, y_n, p_n, b') &\mapsto \left(ip_0 \cdot hx_1 \cdot jq_1 \cdot hy_1{}^{-1} \cdot ip_1 \cdot \dots \cdot hy_n{}^{-1} \cdot ip_n\right)_* (rib) \\ &= (ip_n)_* \cdots (jq_1)_* (hx_1)_* (ip_0)_* (b, \mathsf{refl}_b, b) \\ &= (ip_n)_* \cdots (jq_1)_* (hx_1)_* (b, p_0, if x_1) \\ &= (ip_n)_* \cdots (jq_1)_* (b, p_0, x_1, \mathsf{refl}_{gx_1}, jgx_1) \\ &= (ip_n)_* \cdots (b, p_0, x_1, q_1, jgy_1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (b, p_0, x_1, q_1, y_1, p_1, \dots, y_n, p_n, b').\end{aligned}$$

즉, 항등 함수입니다. (정확히 말하면, 여기에는 암묵적인 귀납적 논증이 필요합니다.) 나머지 세 점 경우도 유사하며, 모든 타입이 집합이므로 경로 경우들은 자명합니다. □

A가 집합이면 정리 8.7.4을 이용하여 많은 타입의 기본군을 계산할 수 있습니다. 이 경우 각 $\mathsf{code}(u, v)$는 정의에 따라 집합을 관계로 나눈 집합-몫이기 때문입니다.

예 8.7.6. $A :\equiv \mathbf{2}$, $B :\equiv \mathbf{1}$, $C :\equiv \mathbf{1}$이라고 합시다. 그러면 $P \simeq S^1$입니다. 예를 들어 $\mathsf{code}(i(\star), i(\star))$의 정의를 살펴보면 모든 경로를 자명하다고 보아도 무방하므로, 정보는 원소들의 수열 $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n : \mathbf{2}$에만 담겨 있음을 알 수 있습니다. 또한 어떤 k에 대해 $x_k = y_k$ 또는 $y_k = x_{k+1}$이면, 집합-몫 관계에 의해 그 두 원소를 모두 제거할 수 있습니다. 따라서 이러한 수열은 모두 인접한 두 원소가 같지 않은 표준적인 기약 수열과 같습니다. 이러한 기약 수열은 그 길이(자연수 n)와, $n > 1$인 경우 x_1이 $\mathbf{0_2}$인지 $\mathbf{1_2}$인지에 대한 정보에 의해 유일하게 결정됨이 분명합니다. 그 정보가 수열의 나머지를 유일하게 결정하기 때문입니다. 그리고 물론 이 데이터는 n을 절댓값으로 하고 x_1이 부호를 나타내는 정수와 동일시할 수 있습니다. 따라서 $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$를 다시 얻습니다.

정리 8.7.4은 집합족 사이의 전단사만을 주장하므로, 이 동형사상 $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ 역시 집합 사이의 전단사일 뿐입니다. 그러나 code 위에 (수열을 이어붙여서) 이어붙이기 연산을 정의하고, encode와 decode가 이 구조를 보존하는 동형사상을 이룬다는 것을 보일 수 있습니다. (제9장의 용어로 말하면 이들은 "준그루포이드"가 됩니다.) 자세한 내용은 독자에게 맡깁니다.

예 8.7.7. 더 일반적으로, $B :\equiv \mathbf{1}$, $C :\equiv \mathbf{1}$이고 A는 임의라고 합시다. 그러면 P는 A의 현수입니다. 이 경우에도 경로 p_k와 q_k는 자명하므로, 경로 코드에 담긴 정보는 원소들의 수열 $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n : A$ 뿐입니다. 처음 두 생성 등식은 인접한 같은 원소들을 소거할 수 있음을 말해 주므로, 이 수열을 다음 꼴의 단어로 생각하는 것이 자연스럽습니다.

$$x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^{-1} \cdots x_n y_n^{-1}$$

이때 이 단어는 군 안의 단어입니다. 실제로 이것은 A 위의(또는 동치로 $\|A\|_0$ 위의; 주 6.11.8 참조) 자유군과 비슷해 보이지만, 여기서는 역원을 취하지 않은 원소로 시작하고, 역원을 취한 원소와 취하지 않은 원소가 번갈아 나타나며, 역원을 취한 원소로 끝나는 단어만을 고려합니다. 이는 사실상 생성 집합의 크기를 하나 줄입니다. 예를 들어 A가 점 $a : A$를 가지면, $\pi_1(\Sigma A)$를 $\|A\|_0$를 생성원으로 하고 관계 $|a|_0 = e$를 갖는 표시로 주어지는 군과 동일시할 수 있습니다. 자세한 내용은 연습문제 8.10 및 8.11를 참조하십시오.

예 8.7.8. $A :\equiv \mathbf{1}$이고 B와 C는 임의라고 하면, f와 g는 단순히 B와 C에 각각 기점 b와 c를 부여합니다. 그러면 P는 B와 C의 쐐기합 $B \vee C$(기점을 가진 공간의 범주에서의 쌍대곱)입니다. 이

경우 자명한 것은 원소 x_k와 y_k이므로, 유일한 정보는 $p_k : \pi_1(B,b)$와 $q_k : \pi_1(C,c)$로 이루어진 루프의 수열 $(p_0, q_1, p_1, \dots, p_n)$입니다. 이러한 수열을 우리가 부과한 동치 관계로 나눈 것은 §6.11에서 구성한 군 $\pi_1(B,b)$와 $\pi_1(C,c)$의 자유곱을 명시적으로 기술한 것과 쉽게 동일시됩니다. 따라서 $\pi_1(B \vee C) \cong \pi_1(B) * \pi_1(C)$를 얻습니다.

그러나 정리 8.7.4은 완전한 고전적 판 캄펀 정리에 조금 못 미칩니다. 고전적 정리는 A가 반드시 집합은 아닌 경우를 다루며, (A에서 오는 기점에 대해) $\pi_1(B \sqcup^A C) \cong \pi_1(B) *_{\pi_1(A)} \pi_1(C)$임을 말합니다. 실제로 정리 8.7.4의 결론은 $\pi_1(A)$에 대해 아무것도 말해 주지 않습니다. A의 경로들은 타입 이론적인 방식으로 "몫을 취하는 과정에 내장"되어 있어 명시적인 정보를 추출하기 어렵습니다. 즉 $\mathsf{code}(u,v)$는 집합이 아닌 것을 관계로 나눈 집합-몫입니다. 이러한 이유로 다음 소절에서는 판 캄펀 정리의 더 나은 버전을 살펴봅니다.

8.7.2 기점들의 집합을 가진 판 캄펀 정리

이제 제시할 판 캄펀 정리의 개선은 고전적 대수적 위상수학에서의 비슷한 개선과 매우 유사합니다. 고전적 대수적 위상수학에서는 A에 기점들의 집합 S가 갖추어집니다. 사실 우리의 증명에서는 "기점들의 집합"이 집합이라고 가정할 필요가 없음이 밝혀집니다. 그것은 임의의 타입이어도 무방합니다. S가 집합이라는 가정의 유용성은 나중에 정리를 적용하여 계산을 얻을 때 드러납니다. 중요한 것은 S가 A의 각 연결 성분에 적어도 하나의 점을 포함한다는 점입니다. 타입 이론에서는 이를 타입 S와 전사인, 즉 (-1)-연결인 함수 $k : S \to A$가 있다고 말함으로써 표현합니다. $S \equiv A$이고 k가 항등함수이면 단순한 판 캄펀 정리를 다시 얻게 됩니다. 염두에 둘 또 다른 예는 A가 점을 가지고 (0-)연결이며 $k : \mathbf{1} \to A$가 그 점인 경우입니다. 보조정리 7.5.2 및 7.5.11에 의해 이 사상은 A가 0-연결일 때 정확히 전사입니다.

$A, B, C, f, g, P, i, j, h$는 앞 절에서와 같다고 합시다. 이제 전사 사상 $k : S \to A$가 주어졌을 때, k의 연결성을 개선하는 보조 타입을 정의합니다. T를 다음에 의해 생성되는 고차 귀납적 타입이라고 합시다.

- 함수 $\ell : S \to T$, 그리고
- 각 $s, s' : S$에 대해 함수 $m : (ks =_A ks') \to (\ell s =_T \ell s')$.

$\bar{k}\ell = k$를 만족하는 자명하게 유도되는 함수 $\bar{k} : T \to A$가 있으며, 임의의 $p : ks = ks'$는 합성 $ks = \bar{k}\ell s \overset{\bar{k}mp}{=} \bar{k}\ell s' = ks'$과 같습니다.

보조정리 8.7.9. $\bar{k}$는 0-연결입니다.

증명. 모든 $a : A$에 대해 타입 $\sum_{(t:T)}(\bar{k}t = a)$의 0-절단이 축약 가능함을 보여야 합니다. 축약 가능성은 단순 명제이고 k는 (-1)-연결이므로, 어떤 $s : S$에 대해 $a = ks$라고 가정할 수 있습니다. 이제 축약 중심을 $|(\ell s, q)|_0$로 잡을 수 있습니다. 여기서 q는 등식 $\bar{k}\ell s = ks$입니다.

남은 것은 임의의 $\phi : \left\| \sum_{(t:T)}(\bar{k}t = ks) \right\|_0$에 대해 $\phi = |(\ell s, q)|_0$임을 보이는 것입니다. 후자는 단순 명제이고 특히 집합이므로, $t : T$와 $p : \bar{k}t = ks$에 대해 $\phi = |(t,p)|_0$라고 가정할 수 있습니다.

이제 $t : T$에 대한 귀납법을 사용할 수 있습니다. $t \equiv \ell s'$이면, $ks' = \bar{k}\ell s' \overset{p}{=} ks$는 m을 통해 등식 $\ell s = \ell s'$을 줍니다. 따라서 $\bar{k}$의 정의와 호모토피 섬유에서의 등식의 정의에 의해 등식 $(ks', p) = (ks, q)$를 얻으며, 그러므로 $|(ks', p)|_0 = |(ks, q)|_0$입니다. 다음으로 t가 m을 따라 변할 때 이 등식들이 일치함을 보여야 합니다. 그러나 이들은 집합(즉 $\left\| \sum_{(t:T)}(\bar{k}t = ks) \right\|_0$) 안의 등식이므로, 이는 자동으로 성립합니다. □

주 8.7.10. T는 k의 "핵 쌍"의 (호모토피) 쌍대동등자로 볼 수 있습니다. S와 A가 집합이라면, k의 (-1)-연결성은 A가 이 쌍대동등자의 0-절단임을 함의할 것입니다(제10장 참조). 일반적인 타입에 대해서는, 고차 토포스 이론에 따르면 k의 (-1)-연결성이 그 대신 A가 k의 "단체 핵"의 쌍대극한(다른 이름으로 "기하학적 실현")임을 함의할 것으로 보입니다. 타입 T는 이 단체 핵의 "1-뼈대"의 쌍대극한이므로, T가 k의 연결성을 1만큼 향상시킨다는 것은 이치에 맞습니다. 더 일반적으로, n-뼈대의 쌍대극한은 연결성을 n만큼 향상시킬 것으로 기대할 수 있습니다.

이제 $\mathsf{code} : P \to P \to \mathcal{U}$를 다음과 같이 이중 귀납법으로 정의합니다.

- 이제 $\mathsf{code}(ib, ib')$는 다음 수열들의 타입의 집합-몫입니다.

$$(b, p_0, x_1, q_1, y_1, p_1, x_2, q_2, y_2, p_2, \dots, y_n, p_n, b')$$

  여기서

  - $n : \mathbb{N}$,
  - $0 < k \leq n$에 대해 $x_k : S$이고 $y_k : S$이며,
  - $n > 0$에 대해 $p_0 : \Pi_1 B(b, fkx_1)$이고 $p_n : \Pi_1 B(fky_n, b')$이며, $n = 0$에 대해 $p_0 : \Pi_1 B(b, b')$이고,
  - $1 \leq k < n$에 대해 $p_k : \Pi_1 B(fky_k, fkx_{k+1})$이며,
  - $1 \leq k \leq n$에 대해 $q_k : \Pi_1 C(gkx_k, gky_k)$입니다.

  이 몫은 다음 등식들로 생성됩니다(주 8.7.3 참조):

$$\begin{aligned}
(\dots, q_k, y_k, \mathsf{refl}_{fy_k}, y_k, q_{k+1}, \dots) &= (\dots, q_k \centerdot q_{k+1}, \dots) \\
(\dots, p_k, x_k, \mathsf{refl}_{gx_k}, x_k, p_{k+1}, \dots) &= (\dots, p_k \centerdot p_{k+1}, \dots) \\
(\dots, p_{k-1} \centerdot fw, x'_k, q_k, \dots) &= (\dots, p_{k-1}, x_k, gw \centerdot q_k, \dots) \quad (w : \Pi_1 A(kx_k, kx'_k) \text{에 대해}) \\
(\dots, q_k \centerdot gw, y'_k, p_k, \dots) &= (\dots, q_k, y_k, fw \centerdot p_k, \dots). \quad (w : \Pi_1 A(ky_k, ky'_k) \text{에 대해})
\end{aligned}$$

  아래에서는 이러한 열에 대한 decode의 경우의 정의가 필요합니다. 이 정의는 이전과 마찬가지로 모든 경로 p_k와 q_k를 h의 사례들과 함께 이어 붙여 $\Pi_1 P(ifb, ifb')$의 원소를 얻습니다(참조: (8.7.5)). 이전과 마찬가지로 나머지 세 가지 점의 경우도 거의 동일합니다.
- $a : A$와 $b : B$에 대해 다음 동치가 필요합니다

$$\mathsf{code}(ib, ifa) \simeq \mathsf{code}(ib, jga). \tag{8.7.11}$$

  code는 집합에 값을 가지므로, 보조정리 8.7.9에 의해 어떤 $t : T$에 대해 $a = \bar{k}t$라고 가정할 수 있습니다. 다음으로 t에 대한 귀납법을 수행할 수 있습니다. $s : S$에 대해 $t \equiv \ell s$이면, §8.7.1에서와 같이 (8.7.11)를 정의합니다:

$$\begin{aligned}
(\dots, y_n, p_n, fks) &\mapsto (\dots, y_n, p_n, s, \mathsf{refl}_{gks}, gks), \\
(\dots, x_n, p_n, s, \mathsf{refl}_{fks}, fks) &\leftarrow\!\shortmid (\dots, x_n, p_n, gks).
\end{aligned}$$

  이들은 동치 관계를 보존하며, 이전과 똑같이 준역원을 정의합니다. 이제 어떤 $w : ks = ks'$에 대해 t가 $m_{s,s'}(w)$를 따라 변한다고 가정합시다. 그러면 (8.7.11)가 $\bar{k}mw$를 따른 수송을 보존함을

보여야 합니다. $\bar{k}$의 정의에 의해, 이는 본질적으로 w 자체를 따른 수송으로 귀결됩니다. 경로 타입에서의 수송에 대한 특성화에 의해, 우리가 보여야 하는 것은

$$w_*(\dots, y_n, p_n, fks) = (\dots, y_n, p_n \cdot fw, fks')$$

이 (8.7.11)에 의해 다음으로 사상된다는 것입니다

$$w_*(\dots, y_n, p_n, s, \mathsf{refl}_{gks}, gks) = (\dots, y_n, p_n, s, \mathsf{refl}_{gks} \cdot gw, gks')$$

그러나 이는 code 를 정의하는 집합 몫 관계에 우리가 부과한 새로운 생성자들로부터 곧바로 따라 나옵니다.

- 필요한 나머지 세 동치도 비슷하게 정의됩니다.
- 마지막으로, 가환성 (8.7.2)은 단순 명제이므로, k의 (-1)-연결성에 의해 $a = ks$이고 $a' = ks'$라고 가정할 수 있으며, 이 경우에는 이전과 정확히 같은 방식으로 따라 나옵니다.

정리 8.7.12 (기점들의 집합을 갖는 판 캄펀 정리). 모든 $u, v : P$에 대해 다음 동치가 존재합니다

$$\Pi_1 P(u, v) \simeq \mathsf{code}(u, v).$$

여기서 code 는 이 절에서 정의한 것과 같습니다.

증명. 기본적으로 이전과 똑같습니다. decode가 몫 관계의 새로운 생성자들을 보존함을 보이기 위해서는 h의 자연성을 사용합니다. 그리고 decode가 (8.7.11)와 같은 동치들을 보존함을 보이기 위해서는, 그 동치들을 정의로 분해하도록 $\bar{k}$와 T에 대한 귀납법을 수행해야 하지만, 그렇게 하고 나면 이는 다시 단순히 f와 g의 함자성 문제가 됩니다. 나머지는 쉽습니다. 특히 $\mathsf{encode} \circ \mathsf{decode}$에 대해서는 추가적인 논증이 필요하지 않습니다. 목표가 집합 안에서 등식을 증명하는 것이므로 h의 경우는 자명하기 때문입니다. □

정리 8.7.12을 사용하면 S가 집합이기만 하면 A가 집합이 아닐 때에도 공간 A의 기본군을 계산할 수 있습니다. 그 경우 각 $\mathsf{code}(u, v)$는 정의에 의해 집합을 어떤 관계로 나눈 집합 몫이기 때문입니다. 그러한 점에서 이는 정리 8.7.4보다 개선된 결과입니다.

예 8.7.13. $S :\equiv \mathbf{1}$이라고 하면, A는 기점 $a :\equiv k(\star)$를 가지며 연결되어 있습니다. 그러면 푸시아웃의 루프에 대한 코드는 $\pi_1(B, f(a))$와 $\pi_1(C, g(a))$의 루프들이 번갈아 나타나는 수열을, (각각 f와 g를 적용한 뒤) $\pi_1(A, a)$의 원소들을 그 사이로 옮길 수 있게 해 주는 동치 관계로 나눈 것과 동일시할 수 있습니다. 따라서 $\pi_1(P)$는 §6.11에서 구성한 융합 자유곱 $\pi_1(B) *_{\pi_1(A)} \pi_1(C)$(군의 범주에서의 푸시아웃)와 동일시할 수 있습니다. 이것은 (B와 C가 P의 열린 부분공간이고 A가 그 교집합인 경우) 아마도 판 캄펀 정리의 가장 고전적인 버전일 것입니다.

예 8.7.14. 예 8.7.13의 특수한 경우로서, 추가로 $C :\equiv \mathbf{1}$이라고 하면 P는 쌍대 섬유 B/A입니다. 그러면 C의 모든 루프는 반사성과 같으므로, 경로 코드에 대한 관계들을 이용해 모든 수열을 B의 단일 루프로 축소할 수 있습니다. 추가 관계들은 $\pi_1(A)$의 상에 속하는 원소를 왼쪽, 오른쪽, 또는 중간에 곱하는 것이 항등이 될 것을 요구합니다. 따라서 $\pi_1(B/A)$를 군 $\pi_1(B)$를 $\pi_1(A)$의 상으로 생성된 정규 부분군으로 나눈 몫과 동일시할 수 있습니다.

예 8.7.15. 예 8.7.14의 더 특수한 경우로서, $B :\equiv S^1 \vee S^1$, $A :\equiv S^1$이라 하고, $f : A \to B$가 합성 루프 $p \cdot q \cdot p^{-1} \cdot q^{-1}$를 고르도록 합시다. 여기서 p와 q는 B를 이루는 두 S^1 사본의 생성 루프입니다. 그러면 P는 토러스 T^2의 표시입니다. 실제로 특정 루프 위의 원뿔을 사용하여 P를 §6.7에서 기술한

T^2의 표시와 동일시하는 것은 어렵지 않습니다. 따라서 $\pi_1(T^2)$는 두 생성원 위의 자유군(즉 $\pi_1(B)$)을 관계 $p \cdot q \cdot p^{-1} \cdot q^{-1} = 1$로 나눈 몫입니다. 이는 분명히 두 생성원 위의 자유 아벨 군, 즉 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$를 줍니다.

예 8.7.16. 더 일반적으로, 모든 CW 복합체는 §6.7에서 설명한 것처럼 구면들을 반복적으로 "원뿔로 막음"으로써 얻을 수 있습니다. 즉, CW 복합체의 "0-뼈대"인 점("0-세포")들의 집합 X_0에서 시작합니다. 다음 푸시아웃을 취합니다

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times \mathbb{S}^0 & \xrightarrow{f_1} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

여기서 S_1은 어떤 1-세포들의 집합이고 f_1은 어떤 "부착 사상"들의 족이며, 이로써 "1-뼈대" X_1을 얻습니다. 그런 다음 다음 푸시아웃을 취합니다

$$\begin{array}{ccc} S_2 \times \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_2} & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & X_2 \end{array}$$

여기서 S_2는 어떤 2-세포들의 집합이고 f_2는 어떤 부착 사상들의 족이며, 이로써 2-뼈대 X_2를 얻고, 이와 같이 계속합니다. 각 푸시아웃의 기본군은 판 캄펀 정리로 계산할 수 있습니다. 즉, 1-뼈대에서 유도된 생성원들과 S_2 및 f_2에서 유도된 관계들로 표시되는 군을 얻습니다. $n > 1$에 대해 $\pi_1(\mathbb{S}^n)$은 자명하므로(§8.3 참조), 이 단계 이후의 푸시아웃들은 기본군을 바꾸지 않습니다.

예 8.7.17. 특히 (집합-)군 $G = \langle X \mid R \rangle$의 임의의 표시가 주어졌다고 합시다. 여기서 X는 생성원들의 집합이고 R은 이 생성원들로 이루어진 단어들의 집합입니다. $B :\equiv \bigvee_X S^1$, $A :\equiv \bigvee_R S^1$이라 하고, $f : A \to B$는 S^1의 각 사본을 B의 생성 루프들로 이루어진 대응하는 단어로 보낸다고 합시다. 그러면 $\pi_1(P) \cong G$가 따라 나오며, 따라서 기본군이 G인 연결 타입을 구성한 것입니다. 모든 군은 표시를 가지므로, 모든 군은 어떤 타입의 기본군입니다. 이러한 타입을 1-절단하면 자명하지 않은 호모토피 군이 G뿐인 타입을 얻으며, 이를 Eilenberg–Mac Lane **공간** $K(G,1)$이라고 합니다.

8.8 화이트헤드 정리와 화이트헤드 원리

고전적 호모토피 이론에서, A의 모든 점 a에 대해 동형사상 $\pi_n(A,a) \cong \pi_n(B,f(a))$를 (그리고 동형사상 $\pi_0(A) \cong \pi_0(B)$도) 유도하는 사상 $f : A \to B$는, 공간 A와 B가 잘 행동하기만 하면(예를 들어 CW 복합체의 호모토피 타입을 가지면) 반드시 호모토피 동치입니다. 이를 화이트헤드 정리라고 합니다. 사실 화이트헤드 정리가 성립하지 않는 "잘 행동하지 않는" 공간들은 타입 이론에서는 보이지 않습니다. 대략적으로 말하면, 잘 행동하는 위상 공간만으로도 ∞-그루포이드를 표현하기에 충분하며, 호모토피 타입 이론은 실제 위상 공간이 아니라 ∞-그루포이드를 직접 다룹니다. 따라서 화이트헤드 정리가 유니밸런트 기초에서 참일 것이라고 기대할 수도 있습니다.

그러나 실제로는 그렇지 않습니다. 화이트헤드 정리는 증명할 수 없습니다. 사실 화이트헤드 정리가 성립하지 않는 타입 이론의 모형들이 알려져 있습니다. 다만 그 이유는 잘 행동하지 않는 위상 공간에서 이 정리가 성립하지 않는 이유와는 전혀 다릅니다. 이 모형들은 "초완비가 아닌 ∞-토포스"

입니다 (참조: [Lur09]). 대략적으로 말하면, 이 모형들은 ∞-차원 밑공간 위의 ∞-그루포이드들의 층으로 이루어져 있습니다.

따라서 기초론적 관점에서는 화이트헤드 원리를 LEM 및 AC 와 비슷한 "고전성 공리"라고 부를 수 있습니다. 이 원리를 무모순적으로 가정할 수는 있지만, 이 원리는 계산적 동기를 가진 타입 이론의 일부가 아니며 모든 자연스러운 모델에서 성립하지도 않습니다. 그러나 집합론적 기초 위에서 작업할 때는 이 원리가 드러나지 않습니다. (위상 공간, 단체 집합 또는 그 밖의 어떤 모델을 사용하든) ∞-그루포이드를 집합으로부터 구성하는 세계에서는 이 원리가 거짓일 수 없기 때문입니다.

이상하게 보일 수 있지만, 사실 놀랄 일은 아닙니다. 호모토피 타입 이론은 호모토피 타입에 대한 추상적인 이론인 반면, 집합론에서 위상 공간이나 단체 집합의 호모토피 이론은 이 이론의 구체적인 모형입니다. 이는 정수가 환에 대한 추상적인 이론의 구체적인 모형인 것과 같은 방식입니다. 어떤 구체적인 모형이든 대응하는 추상적 이론에 본질적이지 않은 특수한 성질을 가지리라고 예상할 수 있습니다. 그러나 그런 성질을 때로는 추가 공리로 가정하고 싶을 수도 있습니다(예를 들어 정수는 주 아이디얼 정의역이지만, 모든 환이 그런 것은 아닙니다).

타입 이론의 모형을 기술하는 것은 이 책의 범위를 벗어나므로, 화이트헤드 원리가 그중 일부에서 어떻게 성립하지 않을 수 있는지는 설명하지 않겠습니다. 그러나 관련된 타입들이 어떤 유한한 n에 대해 n-절단되어 있을 때는 언제나 이 원리가 성립함을 n에 대한 "하향" 귀납으로 증명할 수 있습니다. 이 결과는 그 자체로도 흥미로우며(예를 들어 Eilenberg–Mac Lane 공간의 본질적 유일성을 함의합니다), 그 증명은 절단 가정 없이 유사한 정리를 증명하기를 기대할 수 없는 이유에 대해 어느 정도 직관적인 설명을 제공해 줄 것입니다.

먼저 정리 4.6.3를 다음과 같이 변형하는 것으로 시작합니다. 이 변형은 결국 절단된 화이트헤드 원리의 증명에서 귀납 단계를 제공하게 됩니다. 이것은 완전충실하고 본질적으로 전사인 함자가 범주의 동치라는 고전적 진술의 타입 이론적이며 ∞-그루포이드적인(즉 고차 군 구조의) 버전으로 볼 수 있습니다.

정리 8.8.1. $f : A \to B$가 다음을 만족하는 함수라고 합시다.

(i) $\|f\|_0 : \|A\|_0 \to \|B\|_0$는 전사이고,
(ii) 임의의 $x, y : A$에 대해 함수 $\mathsf{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$는 동치입니다.

그러면 f는 동치입니다.

증명. (ii)는 정확히 f가 매장이라는 진술임에 유의하십시오(§4.6 참조). 따라서 정리 4.6.3에 의해 f가 전사임을, 즉 임의의 $b : B$에 대해 $\|\mathsf{fib}_f(b)\|_{-1}$임을 보이면 충분합니다. b가 주어졌다고 합시다. 그러면 $\|f\|_0$가 전사이므로 $\|f\|_0(|a|_0) = |b|_0$를 만족하는 $a : A$가 단순히 존재합니다. 그리고 우리의 목표가 단순 명제이므로, 그러한 a가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그러면 $|f(a)|_0 = \|f\|_0(|a|_0) = |b|_0$이므로 $\|f(a) = b\|_{-1}$입니다. 다시, 우리의 목표는 여전히 단순 명제이므로 $f(a) = b$라고 가정할 수 있습니다. 따라서 $\mathsf{fib}_f(b)$에는 원소가 존재하며, 그러므로 단순히 원소가 존재합니다. □

호모토피 군은 경로 공간이 아니라 루프 공간의 절단이므로, 이 정리를 루프 공간에 관한 정리로 수정해야 합니다. 정의 8.4.2의 사상 Ωf를 상기하십시오.

따름정리 8.8.2. $f : A \to B$가 다음을 만족하는 함수라고 합시다.

(i) $\|f\|_0 : \|A\|_0 \to \|B\|_0$는 전단사이고,
(ii) 임의의 $x : A$에 대해 함수 $\Omega f : \Omega(A, x) \to \Omega(B, f(x))$는 동치입니다.

그러면 f는 동치입니다.

증명. 정리 8.8.1에 의해, 임의의 $x, y : A$에 대해 $\mathsf{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$가 동치임을 보이면 충분합니다. 그리고 따름정리 4.4.6에 의해 $f(x) =_B f(y)$라고 가정할 수 있습니다. 특히 $|f(x)|_0 = |f(y)|_0$이고, $\|f\|_0$가 동치이므로 $|x|_0 = |y|_0$이며, 따라서 $|x = y|_{-1}$입니다. 우리는 단순 명제(ap_f가 동치라는 명제)를 증명하려 하고 있으므로, $p : x = y$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그런데 이제 다음 사각형은 호모토피 수준에서 가환합니다:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(A,x) & \xrightarrow{-\cdot p} & (x =_A y) \\ {\scriptstyle \Omega f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{ap}_f} \\ \Omega(B,f(x)) & \xrightarrow[-\cdot f(p)]{} & (f(x) =_B f(y)). \end{array}$$

위쪽과 아래쪽 사상은 동치이고, 왼쪽 사상은 가정에 의해 동치입니다. 따라서 2-out-of-3 성질에 의해 오른쪽 사상도 동치입니다. □

이제 절단된 화이트헤드 원리를 증명할 수 있습니다.

정리 8.8.3. A와 B가 n-타입이고 $f : A \to B$가 다음을 만족한다고 합시다.

(i) $\|f\|_0 : \|A\|_0 \to \|B\|_0$는 전단사이고,
(ii) 모든 $k \geq 1$과 모든 $x : A$에 대해 $\pi_k(f) : \pi_k(A,x) \to \pi_k(B, f(x))$는 전단사입니다.

그러면 f는 동치입니다.

조건 (i)은 기점 $x : A$를 전혀 언급하지 않는다는 점을 제외하면, 조건 (ii)에서 $k = 0$인 경우와 거의 같습니다.

증명. n에 대한 귀납법으로 진행합니다. $n = -2$일 때 이 명제는 자명합니다. 따라서 n-타입 사이의 모든 함수에 대해 이 명제가 참이라고 가정하고, A와 B를 $(n+1)$-타입, $f : A \to B$를 위와 같은 함수라고 합시다. 따름정리 8.8.2의 첫 번째 조건은 가정에 의해 성립하므로, 임의의 $x : A$에 대해 함수 $\Omega f : \Omega(A,x) \to \Omega(B, f(x))$가 동치임을 보이면 충분합니다.

$\Omega(A,x)$와 $\Omega(B,f(x))$는 n-타입이므로 귀납 가설을 적용할 수 있습니다. $\|\Omega f\|_0$가 전단사이고, 모든 $k \geq 1$과 $p : x = x$에 대해 사상 $\pi_k(\Omega f) : \pi_k(x = x, p) \to \pi_k(f(x) = f(x), \Omega f(p))$가 전단사임을 확인해야 합니다. $\|\Omega f\|_0 \equiv \pi_1(f)$이므로 첫 번째 명제는 가정에 의해 성립합니다. 두 번째 명제를 증명하기 위해 먼저 이를 일반화합니다. 즉, 모든 $y : A$와 $q : x = y$에 대해 $\pi_k(\mathsf{ap}_f) : \pi_k(x = y, q) \to \pi_k(f(x) = f(y), \mathsf{ap}_f(q))$가 전단사임을 보입니다. $y :\equiv x$일 때 두 기점 $\Omega f(p) = \mathsf{ap}_f(p)$를 동일시하면 $\pi_k(\Omega f) = \pi_k(\mathsf{ap}_f)$이므로, 이로부터 원하는 명제가 따라 나옵니다. 경로 귀납법에 의해, 이 일반화는 q가 refl_a인 경우에 증명하는 것으로 충분합니다. 이 경우 $\pi_k(\mathsf{ap}_f) = \pi_k(\Omega f) = \pi_{k+1}(f)$이고, 원래의 가정에 의해 $\pi_{k+1}(f)$는 전단사입니다. □

A와 B가 어떤 유한한 n에 대해서도 n-타입이 아니라면, 귀납을 시작할 방법이 없다는 점에 유의하십시오.

따름정리 8.8.4. A가 0-연결 n-타입이고 모든 k와 $a : A$에 대해 $\pi_k(A,a) = 0$이면, A는 축약 가능합니다.

증명. 사상 $A \to \mathbf{1}$에 정리 8.8.3을 적용하십시오. □

그 응용으로서 따름정리 8.4.8의 역을 유도할 수 있습니다.

따름정리 8.8.5. $n \geq 0$에 대해, 사상 $f : A \to B$가 n-연결인 것은 다음이 모두 성립하는 것과 동치입니다.

(i) $\|f\|_0 : \|A\|_0 \to \|B\|_0$는 동형사상입니다.
(ii) 임의의 $a : A$와 $k \leq n$에 대해, 사상 $\pi_k(f) : \pi_k(A, a) \to \pi_k(B, f(a))$는 동형사상입니다.
(iii) 임의의 $a : A$에 대해, 사상 $\pi_{n+1}(f) : \pi_{n+1}(A, a) \to \pi_{n+1}(B, f(a))$는 전사입니다.

증명. "오직 그럴 때만" 방향은 따름정리 8.4.8입니다. 역으로, 올뭉치의 긴 완전열(정리 8.4.6)에 의해 가정들로부터 모든 $k \leq n$과 $a : A$에 대해 $\pi_k(\mathsf{fib}_f(f(a))) = 0$이고 $\|\mathsf{fib}_f(f(a))\|_0$가 축약 가능하다는 것이 따라 나옵니다. $k \leq n$에 대해 $\pi_k(\mathsf{fib}_f(f(a))) = \pi_k(\|\mathsf{fib}_f(f(a))\|_n)$이고 $\|\mathsf{fib}_f(f(a))\|_n$는 n-연결이므로, 따름정리 8.8.4에 의해 이는 임의의 a에 대해 축약 가능합니다.

남은 것은 반드시 $f(a)$ 꼴일 필요는 없는 $b : B$에 대해 $\|\mathsf{fib}_f(b)\|_n$가 축약 가능함을 보이는 것입니다. 그런데 가정에 의해 $|b|_0 = \|f\|_0(x)$인 $x : \|A\|_0$가 존재합니다. 축약 가능성은 단순 명제이므로 x가 어떤 $a : A$에 대해 $|a|_0$ 꼴이라고 가정할 수 있고, 이 경우 $|b|_0 = \|f\|_0(|a|_0) = |f(a)|_0$이므로 $\|b = f(a)\|_{-1}$입니다. 다시 축약 가능성은 단순 명제이므로 $b = f(a)$라고 가정할 수 있으며, 이로부터 결과가 따라 나옵니다. □

$\|f\|_0$가 전단사이고 모든 k에 대해 $\pi_k(f)$가 전단사인 사상 f를 **∞-연결** 사상 또는 **약한 동치**라고 부릅니다. 이는 모든 n에 대해 f가 n-연결이기를 요구하는 것과 동치입니다. 타입 Z를 **∞-절단된** 타입 또는 **초완비** 타입이라고 부르는 것은, 다음 유도된 사상

$$(- \circ f) : (B \to Z) \to (A \to Z)$$

이 f가 ∞-연결일 때마다 동치인 경우입니다 — 즉, Z가 보기에 모든 ∞-연결 사상이 동치인 경우입니다. 그러면 화이트헤드 원리를 공리로 가정하고자 할 때, 다음의 동치인 두 형태 중 어느 것을 사용해도 됩니다.

- 모든 ∞-연결 함수는 동치입니다.
- 모든 타입은 ∞-절단되어 있습니다.

고차 토포스 모형에서는 ∞-절단된 타입들이 §7.7의 의미에서 반영적 부분유니버스(즉 $(\infty, 1)$-토포스의 "초완비화")를 이루지만, 이것이 일반적으로 참인지는 알려져 있지 않습니다.

어떤 n에 대해서도 n-타입이 아닌 타입이 존재한다는 것이 자명하지 않을 수도 있지만, 실제로 그러한 타입이 존재합니다. 실제로 고전적 호모토피 이론에서는 임의의 $n \geq 2$에 대해 $\mathbb{S}^n$이 이 성질을 가집니다. 아직 호모토피 타입 이론에서 이 사실을 증명하지는 못했지만, "무한 절단 수준"을 가짐을 증명할 수 있는 다른 타입들이 있습니다.

예 8.8.6. 각 n에 대해 타입 $B(n)$이 n겹 반사성과 같지 않은 n-루프를 포함하는 $B : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$이 있다고 가정합시다. 이를테면 $p_n \neq \mathsf{refl}^n_{b_n}$인 $p_n : \Omega^n(B(n), b_n)$이 있다고 합시다. (예를 들어 $B(n) :\equiv \mathbb{S}^n$으로 정의하고, p_n을 동형사상 $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$에 의한 $1 : \mathbb{Z}$의 상으로 둘 수 있습니다.) $c(n) :\equiv b_n$으로 정의된 점 $c : C$를 갖는 $C :\equiv \prod_{(n:\mathbb{N})} B(n)$을 생각하십시오. 루프 공간은 곱과 교환하므로, 임의의 m에 대해 다음이 성립합니다.

$$\Omega^m(C, c) \;\simeq\; \prod_{n:\mathbb{N}} \Omega^m(B(n), b_n).$$

이 동치 아래에서 refl_c^m은 함수 $(n \mapsto \mathsf{refl}_{b_n}^m)$에 대응합니다. 이제 우변의 타입에서 q_m을 다음과 같이 정의합니다.

$$q_m(n) :\equiv \begin{cases} p_n & m = n \\ \mathsf{refl}_{b_n}^m & m \neq n. \end{cases}$$

만약 $q_m = (n \mapsto \mathsf{refl}_{b_n}^m)$이라면 $p_n = \mathsf{refl}_{b_n}^n$이 될 것인데, 이는 사실이 아닙니다. 따라서 $q_m \neq (n \mapsto \mathsf{refl}_{b_n}^m)$이고, 그러므로 refl_c^m과 같지 않은 $\Omega^m(C, c)$의 점이 존재합니다. 그러므로 C는 어떤 $m : \mathbb{N}$에 대해서도 m-타입이 아닙니다.

유니버스 $\mathcal{U}$가 모든 n에 대해 $\mathbb{S}^n$과 같은 고차 귀납적 타입을 포함한다는 사실을 이용하여, $\mathcal{U}$ 자체도 어떤 n에 대해서도 n-타입이 아님을 보이는 것 역시 가능할 것으로 예상합니다. 그러나 이는 아직 이루어지지 않았습니다.

8.9 인코드-디코드 방법의 일반적 서술

우리는 인코드-디코드 방법을 사용하여 쌍대곱(정리 2.12.5), 자연수(정리 2.13.1), 절단(정리 7.3.12), 원(따름정리 8.1.10), 현수(정리 8.6.4), 푸시아웃(정리 8.7.12)을 비롯한 여러 타입의 경로 공간을 특징지었습니다. 이 기법의 변형들은 $\pi_n(\mathbb{S}^n)$의 직접적인 증명, 블레이커스–매시 정리, Eilenberg–Mac Lane 공간의 구성 등 이 장의 도입부에서 언급한 다른 많은 정리의 증명에 사용됩니다. 이 방법을 하나의 보조정리로 추상화하고 싶은 유혹이 들지만, 문제마다 조금씩 다른 변형이 필요하기 때문에 이는 어렵습니다. 예를 들어, 같은 방법의 서로 다른 변형을 사용하여 루프 공간을 특징짓거나(정리 2.12.5 및 따름정리 8.1.10에서처럼) 경로 공간 전체를 특징지을 수 있고(정리 2.13.1에서처럼), 루프 공간을 완전히 특징짓거나(예: $\Omega^1(\mathbb{S}^1)$) 그 절단의 일부만을 특징지을 수 있으며(예: 판 캄펀), 호모토피 군을 계산하거나 어떤 사상이 n-연결임을 증명할 수도 있습니다(예: 프로이덴탈과 Blakers–Massey).

그러나 이 방법의 특정 변형들에 대해서는 보조정리를 서술할 수 있습니다. 이 보조정리들의 증명은 거의 자명하며, 핵심은 이들을 일반적인 형태로 서술함으로써 방법을 명확히 하는 데 있습니다. 가장 간단한 경우는 정리 2.12.5와 따름정리 8.1.10에서처럼 인코드-디코드 방법을 사용하여 타입의 루프 공간을 특징짓는 것입니다.

보조정리 8.9.1 (루프 공간에 대한 인코드-디코드). 점을 가진 타입 (A, a_0)와 올뭉치 $\mathsf{code} : A \to \mathcal{U}$가 주어졌을 때, 만약

(i) $c_0 : \mathsf{code}(a_0)$,
(ii) $\mathsf{decode} : \prod_{(x:A)} \mathsf{code}(x) \to (a_0 = x)$,
(iii) 모든 $c : \mathsf{code}(a_0)$에 대해 $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\mathsf{decode}(c), c_0) = c$ 가 성립하고,
(iv) $\mathsf{decode}(c_0) = \mathsf{refl}$,

그러면 $(a_0 = a_0)$는 $\mathsf{code}(a_0)$와 동치입니다.

증명. $\mathsf{encode} : \prod_{(x:A)}(a_0 = x) \to \mathsf{code}(x)$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathsf{encode}_x(\alpha) = \mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\alpha, c_0).$$

encode_{a_0}와 decode_{a_0}가 서로 준역원임을 보입니다. 합성 $\mathsf{encode}_{a_0} \circ \mathsf{decode}_{a_0}$는 가정 (iii)에 의해 바로 성립합니다. 다른 합성에 대해서는 다음을 보입니다.

$$\prod_{(x:A)} \prod_{(p:a_0=x)} \mathsf{decode}_x(\mathsf{encode}_x p) = p.$$

경로 귀납법에 의해 $\mathsf{decode}_{a_0}(\mathsf{encode}_{a_0}\mathsf{refl}) = \mathsf{refl}$ 임을 보이는 것으로 충분합니다. transport 수송을 환원하고 나면 $\mathsf{decode}_{a_0}(c_0) = \mathsf{refl}$ 임을 보이는 것으로 충분하며, 이는 가정 (iv)입니다. □

$(a_0 = -)$와 code 사이의 섬유별 동치가 필요하다면, 조건 (iii)을 다음과 같이 강화하면 충분합니다.

$$\prod_{(x:A)} \prod_{(c:\mathsf{code}(x))} \mathsf{encode}_x(\mathsf{decode}_x(c)) = c.$$

그러나 루프 공간(예: $\Omega(\mathbb{S}^1)$)을 계산하는 데에는 이 더 강한 가정이 필요하지 않습니다.

호모토피 군을 계산할 때 자주 등장하는 또 다른 변형은 루프 공간의 절단을 특징짓습니다:

보조정리 8.9.2 (루프 공간의 절단에 대한 인코드-디코드). 점을 가진 타입 (A, a_0)와 올뭉치 $\mathsf{code} : A \to \mathcal{U}$가 있고, 모든 x에 대해 $\mathsf{code}(x)$가 k-타입이라고 가정합니다. 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathsf{encode} : \prod_{x:A} \|a_0 = x\|_k \to \mathsf{code}(x)$$

절단 재귀로($\mathsf{code}(x)$가 k-타입이라는 사실을 이용하여) 정의하며, 이 함수는 $\alpha : a_0 = x$를 $\mathsf{transport}^{\mathsf{code}}(\alpha, c_0)$로 보냅니다. 다음을 가정합시다:

(i) $c_0 : \mathsf{code}(a_0)$,
(ii) $\mathsf{decode} : \prod_{(x:A)} \mathsf{code}(x) \to \|a_0 = x\|_k$,
(iii) 모든 $c : \mathsf{code}(a_0)$에 대해 $\mathsf{encode}_{a_0}(\mathsf{decode}_{a_0}(c)) = c$이고,
(iv) $\mathsf{decode}(c_0) = |\mathsf{refl}|$.

그러면 $\|a_0 = a_0\|_k$는 $\mathsf{code}(a_0)$와 동치입니다.

증명. $\mathsf{decode} \circ \mathsf{encode}$가 항등 함수라는 것은 (iii)에 의해 바로 얻어집니다. $\mathsf{encode} \circ \mathsf{decode}$에 대한 결과를 증명하기 위해 먼저 절단 귀납법을 적용하며, 이에 따라 다음을 보이면 충분합니다.

$$\prod_{(x:A)} \prod_{(p:a_0=x)} \mathsf{decode}_x(\mathsf{encode}_x(|p|_k)) = |p|_k.$$

k-타입 안의 경로들은 k-타입이므로 절단 귀납법을 적용할 수 있습니다. 이 타입을 보이기 위해 경로 귀납법을 적용하고, encode 를 환원한 뒤 가정 (iv)를 사용합니다. □

8.10 추가 결과

이 장에서 증명을 제시하지는 않지만, 다음 결과들도 호모토피 타입 이론에서 확립되었습니다.

정리 8.10.1. 모든 $n \geq 3$에 대해 $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}_k$를 만족하는 k가 존재합니다.

증명에 관한 참고 사항. 이 증명은 $\pi_4(\mathbb{S}^3)$의 계산과 안정성(따름정리 8.6.15)의 적용으로 이루어집니다. 이 결과의 고전적인 서술에서 k는 2입니다. k가 실제로 2인지는 아직 확인하지 않았지만, 우리의 $\pi_4(\mathbb{S}^3)$ 계산은 이 장의 나머지 모든 증명과 마찬가지로 구성적입니다. (더 정확히 말하면, 이 계산은 LEM 이나 AC 같은 추가 공리를 전혀 사용하지 않으므로 유니밸런스 및 고차 귀납적 타입과 같은 정도로 구성적입니다.) 따라서 호모토피 타입 이론의 계산적 해석이 주어진다면, 컴퓨터에서 이 증명을 실행하여 k가 2임을 검증할 수 있습니다. 이 예는 답을 미리 알 필요가 없었던 최초의 호모토피 군 계산이라는 점에서 매우 흥미롭습니다. □

정리 8.10.2 (블레이커스–매시 정리). 사상 $f : C \to X$와 $g : C \to Y$가 주어졌다고 합시다. 먼저 f와 g의 푸시아웃 $X \sqcup^C Y$를 취하고, 이어서 그 포함 사상 $\mathsf{inl} : X \to X \sqcup^C Y \leftarrow Y : \mathsf{inr}$의 당김을 취하면, 유도된 사상 $C \to X \times_{(X \sqcup^C Y)} Y$를 얻습니다.

f가 i-연결이고 g가 j-연결이면, 이 유도된 사상은 $(i + j)$-연결입니다. 다시 말해, 임의의 점 $x : X$, $y : Y$에 대해 $(f, g) : C \to X \times Y$의 대응하는 섬유 $C_{x,y}$는 푸시아웃에서의 경로 공간 $\mathsf{inl}(x) =_{X \sqcup^C Y} \mathsf{inr}(y)$에 대한 근사를 제공합니다.

고전적인 대수적 위상수학에서는 블레이커스–매시 정리가 흔히 다소 다른 형태로 서술된다는 점에 유의해야 합니다. 그 형태에서는 사상 f와 g가 CW 복합체의 부분복합체의 포함으로 대체되고, 호모토피 푸시아웃과 호모토피 당김이 각각 합집합과 교집합으로 대체됩니다. 이 정리를 호모토피 타입 이론에서 표현하려면 이런 종류의 개념들을 호모토피 불변인 개념들로 대체해야 합니다. 우리는 판 캄펀 정리(§8.7)에서 이에 대한 또 다른 예를 보았는데, 거기서는 열린 부분집합들의 합집합을 호모토피 푸시아웃으로 대체해야 했습니다.

정리 8.10.3 (Eilenberg–Mac Lane 공간). 임의의 아벨 군 G와 양의 정수 n에 대해, $\pi_n(K(G, n)) = G$이고 $k \neq n$일 때 $\pi_k(K(G, n)) = 0$인 n-타입 $K(G, n)$이 존재합니다.

정리 8.10.4 (피복 공간). 연결 공간 A에 대해, A 위의 피복 공간들과 $\pi_1(A)$의 작용을 갖는 집합들 사이에는 동치가 존재합니다.

주

정리	상태
$\pi_1(\mathbb{S}^1)$	✔✔
$\pi_{k<n}(\mathbb{S}^n)$	✔✔
호모토피 군의 긴 완전열	✔✔
호프 올뭉치의 전체 공간은 $\mathbb{S}^3$입니다	✔
$\pi_2(\mathbb{S}^2)$	✔✔
$\pi_3(\mathbb{S}^2)$	✔
$\pi_n(\mathbb{S}^n)$	✔✔
$\pi_4(\mathbb{S}^3)$	✔
프로이덴탈 현수 정리	✔✔
블레이커스–매시 정리	✔✔
Eilenberg–Mac Lane 공간 $K(G, n)$	✔✔
판 캄펀 정리	✔✔
피복 공간	✔✔
n-타입에 대한 화이트헤드 원리	✔✔

표 8.2: 손으로(✔), 그리고 컴퓨터로(✔✔) 증명된 호모토피 이론의 정리들.

이 장에서 설명한 정리들은 고전적 호모토피 이론의 표준적인 결과이며, 그중 다수는 [Hat02]에 설명되어 있습니다. 이 주석에서는 호모토피 타입 이론에서 이 정리들에 대한 새로운 종합적 증명이 어떻게 개발되었는지 살펴봅니다. 표 8.2는 호모토피 타입 이론에서 증명된 호모토피 이론의 정리들과

각 정리의 컴퓨터 검증 여부를 나열합니다. 이 결과들은 거의 모두 2013년 IAS의 봄 학기 동안 대규모 공동 작업의 일환으로 개발되었습니다. 많은 사람이 이 결과들에 기여했습니다. 예를 들어 증명의 주 저자가 되거나, 연구할 문제를 제안하거나, 이 문제들에 관한 여러 토론과 세미나에 참여하거나, 결과에 대한 피드백을 주는 방식으로 기여했습니다. 다음 사람들은 위 정리들에 대한 최초의 호모토피 타입 이론 증명의 주 저자들입니다. 달리 명시하지 않는 한, 컴퓨터로 검증된 정리들의 경우 주 저자들은 컴퓨터 증명 보조기를 사용하여 그 증명을 처음으로 형식화한 사람들이기도 합니다.

- Shulman은 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$에 대한 호모토피 이론적 계산을 제시했습니다. 이후 Licata가 인코드-디코드 증명과 인코드-디코드 방법을 발견했습니다.
- Brunerie는 $\pi_{k<n}(\mathbb{S}^n)$을 계산했습니다. 이후 Licata가 인코드-디코드 버전을 제시했습니다.
- Voevodsky는 호모토피 군의 긴 완전열을 구성했습니다.
- Lumsdaine은 호프 올뭉치를 구성했습니다. Brunerie는 그 전체 공간이 $\mathbb{S}^3$임을 증명하여 $\pi_2(\mathbb{S}^2)$와 $\pi_3(\mathbb{S}^3)$를 계산했습니다.
- Licata와 Brunerie는 $\pi_n(\mathbb{S}^n)$에 대한 직접적인 계산을 제시했습니다.
- Lumsdaine은 프로이덴탈 현수 정리를 증명했고, Licata와 Lumsdaine은 이 증명을 형식화했습니다.
- Lumsdaine, Finster, Licata는 블레이커스–매시 정리를 증명했고, Lumsdaine, Brunerie, Licata, Hou는 이를 형식화했습니다.
- Licata는 $\pi_2(\mathbb{S}^2)$의 인코드-디코드 계산과, 프로이덴탈 현수 정리를 사용한 $\pi_n(\mathbb{S}^n)$의 계산을 제시했습니다. 그는 비슷한 기법을 사용하여 $K(G,n)$을 구성했습니다.
- Shulman은 판 캄펀 정리를 증명했고, Hou는 이 증명을 형식화했습니다.
- Licata는 n-타입에 대한 화이트헤드 정리를 증명했습니다.
- Brunerie는 $\pi_4(\mathbb{S}^3)$을 계산했습니다.
- Hou는 피복 공간 이론을 확립하고 이를 형식화했습니다.

호모토피 이론과 타입 이론 사이의 상호작용은 이러한 결과들의 발전에 결정적이었습니다. 예를 들어, $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$의 첫 번째 증명은 §8.1.5에서 제시한 증명으로, 고전적인 호모토피 이론적 증명을 따른 것입니다. 이 증명을 타입 이론적으로 분석한 결과 인코드-디코드 방법이 개발되었습니다. $\pi_2(\mathbb{S}^2)$의 첫 번째 계산 역시 고전적인 방법을 따랐지만, 이는 곧 그 결과의 인코드-디코드 증명으로 이어졌습니다. 인코드-디코드 계산은 $\pi_n(\mathbb{S}^n)$으로 일반화되었고, 이는 다시 인코드-디코드 논증과 연결성에 관한 고전적인 호모토피 이론적 추론을 결합함으로써 프로이덴탈 현수 정리의 증명으로 이어졌으며, 이는 다시 블레이커스–매시 정리와 Eilenberg–Mac Lane 공간으로 이어졌습니다. 이 일련의 결과들이 빠르게 발전했다는 사실은 두 분야 사이의 연관성에 대한 우리의 새로운 이해가 얼마나 유망한지를 보여 줍니다.

연습문제

연습문제 8.1. 호모토피 군이 곱을 보존함을, 즉 $\pi_n(A \times B) \simeq \pi_n(A) \times \pi_n(B)$임을 증명하십시오.

연습문제 8.2. A가 결정 가능한 상등을 갖는 집합이면(정의 3.4.3 참조) 그 현수 ΣA가 1-타입임을 증명하십시오. (결정 가능한 상등이라는 가정 없이 이것이 증명 가능한지는 미해결 문제입니다.)

연습문제 8.3. $\mathbb{S}^\infty$를 열 $\mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \to \cdots$의 쌍대극한으로 정의하십시오. $\mathbb{S}^\infty$가 축약 가능함을 증명하십시오.

연습문제 8.4. $\mathbb{S}^\infty$를 다음으로 생성되는 고차 귀납적 타입으로 정의하십시오.

- 두 점 $\mathsf{N} : \mathbb{S}^\infty$와 $\mathsf{S} : \mathbb{S}^\infty$, 그리고
- 각 $x : \mathbb{S}^\infty$에 대한 경로 $\mathsf{merid}(x) : \mathsf{N} = \mathsf{S}$.

다시 말해, $\mathbb{S}^\infty$는 자기 자신의 현수입니다. $\mathbb{S}^\infty$가 축약 가능함을 증명하십시오.

연습문제 8.5. $f : X \to Y$가 함수이고 Y가 연결되어 있다고 가정합시다. 임의의 $y_1, y_2 : Y$에 대하여 $\left\|\mathsf{fib}_f(y_1) \simeq \mathsf{fib}_f(y_2)\right\|$가 성립함을 보이십시오.

연습문제 8.6. 임의의 점을 가진 타입 A에 대해, $i_A : \Omega A \to \Omega A$가 루프의 역을 나타낸다고 합시다. 즉 $i_A :\equiv \lambda p.\, p^{-1}$입니다. $i_{\Omega A} : \Omega^2 A \to \Omega^2 A$가 $\Omega(i_A)$와 같음을 보이십시오.

연습문제 8.7. **점을 가진 동치**를 바탕 함수가 동치인 점을 가진 사상으로 정의하십시오.

(i) 점을 가진 타입 (X, x_0)와 (Y, y_0) 사이의 점을 가진 동치들의 타입이 $(X, x_0) =_{\mathcal{U}_\bullet} (Y, y_0)$와 동치임을 보이십시오.

(ii) 점을 가진 동치의 개념을 제4장의 정합적인 방식 중 하나를 따라 점을 가진 준역원과 점을 가진 호모토피를 사용하여 다시 정식화하십시오.

연습문제 8.8. §8.5의 호프 올뭉치의 예를 따라, **주니어 호프 올뭉치** 를 기점 위의 섬유가 $\mathbb{S}^0$이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^1$인 $\mathbb{S}^1$ 위의 올뭉치(즉 타입 족)로 정의하십시오. 이는 원 $\mathbb{S}^1$의 "꼬인 이중 피복"이라고도 불립니다.

연습문제 8.9. 다시 §8.5의 호프 올뭉치의 예를 따라, 기점 위의 섬유가 $\mathbb{S}^3$이고 전체 공간이 $\mathbb{S}^7$인 $\mathbb{S}^4$ 위의 유사한 올뭉치를 정의하십시오. 이는 호모토피 타입 이론에서 미해결 문제입니다(고전적 호모토피 이론에서는 그러한 올뭉치가 존재한다고 알려져 있습니다).

연습문제 8.10. 예 8.7.7에 이어서, A가 점 $a : A$를 가지면 $\pi_1(\Sigma A)$를 $\|A\|_0$를 생성원으로 하고 관계 $|a|_0 = e$로 표시되는 군과 동일시할 수 있음을 증명하십시오. 그다음, 배중률을 가정하면 이것이 $\|A\|_0 \setminus \{|a|_0\}$ 위의 자유군이기도 함을 보이십시오.

연습문제 8.11. 다시 예 8.7.7에 이어서, 이번에는 A에 점이 지정되어 있다고 가정하지 않고, $\pi_1(\Sigma A)$를 생성원 $\|A\|_0 \times \|A\|_0$와 다음 관계로 표시되는 군과 동일시할 수 있음을 보이십시오.

$$(a, b) = (b, a)^{-1}, \qquad (a, c) = (a, b) \cdot (b, c), \qquad \text{그리고} \qquad (a, a) = e.$$

제9장

범주론

수학의 여러 분야 가운데 범주론은 아마도 집합론적 기초와 가장 잘 맞지 않는 분야일 것입니다. 한 가지 문제는 범주론의 대부분이 범주 안의 동형사상이나 범주의 동치처럼 상등보다 약한 "같음"의 개념에 대해 불변이라는 점이며, 집합론은 이러한 불변성을 포착하지 못합니다. 그러나 이는 유니밸런스 공리가 상등을 동치와 동일시함으로써 타입에 대해 해결하는 문제와 같은 종류의 문제입니다. 따라서 유니밸런트 기초에서는 이와 비슷한 방식으로 대상의 상등을 동형사상과 동일시하는 "범주" 개념을 고려하는 것이 타당합니다.

크기 문제를 무시하면, 집합 기반 수학에서 범주는 대상들의 집합 A_0과, 각 $x, y \in A_0$에 대해 사상들의 집합 $\hom_A(x,y)$로 이루어집니다. 유니밸런트 기초에서 범주의 "소박한" 정의는 단순히 이를 흉내 내어 대상들의 타입과 사상들의 타입을 사용할 것입니다. 이러한 타입들이 임의의 고차 호모토피를 포함하도록 허용한다면 고차 정합성 조건을 부과해야 하며, 이는 어떤 형태의 $(\infty,1)$-범주 개념으로 이어집니다. 그러나 현재 우리의 목표는 그보다 소박합니다. 우리는 1-범주만을 고려하며, 따라서 타입 $\hom_A(x,y)$가 집합, 즉 0-타입이 되도록 제한합니다. 더 이상의 조건을 부과하지 않는다면, 이 개념을 준범주라고 부르겠습니다.

대상들의 타입 A_0이 집합이라는 요구 조건을 추가하면, 전통적인 집합론적 정의와 매우 비슷하게 동작하는 정의를 얻게 됩니다. Toby Bartels를 따라, 우리는 이 개념을 엄격한 범주라고 부릅니다. 또는, $(x =_{A_0} y)$를 x에서 y로 가는 동형사상들의 타입 $\mathsf{iso}(x,y)$와 동일시하는, 유니밸런스 공리의 일반화된 형태를 요구할 수도 있습니다. 우리는 대개 후자의 선택을 "올바른" 정의로 여기므로, 이를 간단히 범주라고 부르겠습니다.

세 가지 범주 개념 사이의 차이를 잘 보여 주는 예는 "모든 충실충만하고 본질적으로 전사인 함자는 범주의 동치"라는 명제이며, 고전적인 집합 기반 범주론에서 이 명제는 선택 공리와 동치입니다.

(i) 엄격한 범주에 대해서는 이것이 여전히 선택 공리와 동치입니다.
(ii) 준범주에 대해서는 이를 참으로 만들 수 있는 무모순적인 선택 공리가 존재하지 않습니다.
(iii) 범주에 대해서는 이 명제를 어떠한 선택 공리 없이도 증명할 수 있습니다.

이 장에서 우리는 후자의 명제와 함께 범주의 다른 좋은 성질들, 예를 들어 동치인 범주들이 (범주들의 타입의 원소로서) 같다는 것을 증명할 것입니다. 또한 준범주 A를 범주 $\widehat{A}$로 "포화"시키는 보편적인 방법을 설명할 것인데, 우리는 이를 A의 Rezk 완비화라고 부릅니다. 다만 이는 스택 완비화라고 불러도 무방합니다(주석을 참고하십시오).

Rezk 완비화는 범주의 동치 개념에 대해서도 더 깊은 이해를 제공합니다. 예를 들어 함자 $A \to \widehat{A}$는 항상 충실충만하고 본질적으로 전사이며, 따라서 "약한 동치"입니다. 이로부터 전범주가 범주일

필요충분조건은 그것이 모든 충실충만하고 본질적으로 전사인 함자를 동치로 "보는" 것임이 따라 나옵니다. 따라서 우리의 "범주" 개념은 이미 "충실충만하고 본질적으로 전사인 함자"라는 개념 안에 내재되어 있습니다.

독자가 고전적인 범주론에 기본적으로 익숙하다고 가정합니다. $\mathcal{U}$ 이라고 쓸 때마다 이는 타입들의 어떤 유니버스를 나타내지만, 경우에 따라 서로 다른 유니버스일 수 있다는 점을 기억하십시오. 우리가 말하는 모든 내용은 유니버스 레벨을 어떻게 일관되게 선택하더라도 참으로 유지됩니다. 장 1 및 2의 호모토피 타입 이론의 기본 개념들과 제3장의 명제 절단을 사용하겠지만, Rezk 완비화의 두 번째 구성에서 고차 귀납적 타입을 사용한다는 점을 제외하면 부 I의 다른 내용은 거의 사용하지 않습니다.

9.1 범주와 준범주

고전 수학에는 범주에 대한 동치인 정의가 많이 있습니다. 우리의 경우에는 의존 타입이 있으므로, 화살표를 대상들로 색인된 타입 족으로 선택하는 것이 자연스럽습니다. 이는 범주론에서 hom-타입이 항상 사용되는 방식과 일치합니다. 즉, 우리는 두 화살표의 정의역과 공역이 일치한다는 것을 알지 못하는 한, 그 두 화살표를 비교하는 것조차 고려하지 않습니다. 더 나아가, 1-범주의 이론이라면 hom-타입이 모두 집합이어야 한다는 것은 분명해 보입니다. 이로부터 다음 정의에 이르게 됩니다.

정의 9.1.1. **준범주** A는 다음으로 이루어집니다.

(i) 타입 A_0. 그 원소들을 **대상**이라고 부릅니다. $a : A_0$을 $a : A$로 씁니다.

(ii) 각 $a, b : A$에 대해, 집합 $\hom_A(a, b)$. 그 원소들을 **화살표** 또는 **사상**이라고 부릅니다.

(iii) 각 $a : A$에 대해, **항등 사상**이라고 부르는 사상 $1_a : \hom_A(a, a)$.

(iv) 각 $a, b, c : A$에 대해, 함수

$$\hom_A(b, c) \to \hom_A(a, b) \to \hom_A(a, c)$$

이를 **합성**이라고 부르며, 중위 표기로 $g \mapsto f \mapsto g \circ f$와 같이 나타내거나 때로는 간단히 gf로 나타냅니다.

(v) 각 $a, b : A$와 $f : \hom_A(a, b)$에 대해 $f = 1_b \circ f$와 $f = f \circ 1_a$가 성립합니다.

(vi) 각 $a, b, c, d : A$와

$$f : \hom_A(a, b), \qquad g : \hom_A(b, c), \qquad h : \hom_A(c, d),$$

에 대해 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$가 성립합니다.

준범주 개념의 문제점은 대상 $a, b : A$에 대해 서로 다를 수 있는 두 가지 "같음"의 개념이 있다는 것입니다. 한편으로는 타입 $(a =_{A_0} b)$가 있습니다. 그러나 다른 한편으로는 표준적인 범주론적 개념인 동형사상이 있습니다.

정의 9.1.2. $g \circ f = 1_a$이고 $f \circ g = 1_b$인 사상 $g : \hom_A(b, a)$가 존재하면 사상 $f : \hom_A(a, b)$를 **동형사상** 이라고 합니다. 이러한 동형사상들의 타입을 $a \cong b$로 씁니다.

보조정리 9.1.3. 임의의 $f : \hom_A(a, b)$에 대하여, "f가 동형사상임"이라는 타입은 단순 명제입니다. 따라서 임의의 $a, b : A$에 대하여 타입 $a \cong b$는 집합입니다.

증명. $g : \hom_A(b,a)$와 $\eta : (1_a = g \circ f)$ 및 $\epsilon : (f \circ g = 1_b)$가 주어졌고, 마찬가지로 g', η', ϵ'도 주어졌다고 합시다. $(g,\eta,\epsilon) = (g',\eta',\epsilon')$임을 보여야 합니다. 그런데 모든 hom-집합은 집합이므로 그 동일성 타입은 단순 명제이고, 따라서 $g = g'$임을 보이는 것으로 충분합니다. 이를 위해 다음을 얻습니다.

$$g' = 1_a \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ 1_b = g$$

여기서 η와 ϵ'을 사용하였습니다. □

$f : a \cong b$이면 그 역을 f^{-1}로 쓰며, 이는 보조정리 9.1.3에 의해 유일하게 결정됩니다.
준범주에서 이 두 가지 같음의 개념 사이에 성립하는 유일한 관계는 다음과 같습니다.

보조정리 9.1.4 (idtoiso). A가 준범주이고 $a,b : A$이면,

$$(a = b) \to (a \cong b).$$

증명. 동일성에 대한 귀납법에 의해 a와 b가 같다고 가정할 수 있습니다. 그러면 $1_a : \hom_A(a,a)$가 있으며, 이는 명백히 동형사상입니다. □

분명히 이 상황은 우리가 유니밸런스 공리를 도입하게 된 동기가 된 문제와 유사합니다. 실제로 다음이 성립합니다.

예 9.1.5. 대상들의 타입이 Set 이고 $\hom_{\mathcal{S}et}(A,B) :\equiv (A \to B)$인 준범주 $\mathcal{S}et$ 이 있습니다. 항등사상은 항등 함수이고 합성은 함수 합성입니다. 이 준범주에 대해 보조정리 9.1.4는 §2.10의 사상 idtoeqv(를 집합으로 제한한 것)와 같습니다.

물론 더 정확히 말하자면 이 범주를 $\mathcal{S}et_{\mathcal{U}}$라고 불러야 합니다. 그 대상들은 유니버스 $\mathcal{U}$ 에 상대적인 작은 집합 뿐이기 때문입니다.

따라서 다음과 같이 정의하는 것이 자연스럽습니다.

정의 9.1.6. **범주** 란 모든 $a,b : A$에 대해 보조정리 9.1.4의 함수 $\mathsf{idtoiso}_{a,b}$가 동치인 준범주입니다.

특히 범주에서는 $a \cong b$이면 $a = b$입니다.

예 9.1.7. 유니밸런스 공리로부터 $\mathcal{S}et$ 이 범주라는 것이 바로 따라옵니다. 또한 유니밸런스를 이용하여 군, 환, 위상 공간 등과 같은 집합 수준 구조들의 임의의 준범주가 범주임을 보일 수 있습니다. §9.8를 참고하십시오.

다음 사실도 짚어 둡니다.

보조정리 9.1.8. 범주에서 대상들의 타입은 1-타입입니다.

증명. 임의의 $a,b : A$에 대하여 타입 $a = b$가 집합임을 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 $a = b$는 $a \cong b$와 동치이며, 이는 집합입니다. □

보조정리 9.1.4의 사상 idtoiso의 역 $(a \cong b) \to (a = b)$를 isotoid로 씁니다. 둘 사이의 다음 관계가 중요합니다.

보조정리 9.1.9. $p : a = a'$와 $q : b = b'$ 및 $f : \hom_A(a,b)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$(p,q)_*(f) = \mathsf{idtoiso}(q) \circ f \circ \mathsf{idtoiso}(p)^{-1}. \tag{9.1.10}$$

증명. 귀납법에 의해 p와 q가 각각 refl_a와 refl_b라고 가정할 수 있습니다. 그러면 (9.1.10)의 좌변은 단순히 f입니다. 그런데 정의에 의해 $\mathsf{idtoiso}(\mathsf{refl}_a)$는 1_a이고 $\mathsf{idtoiso}(\mathsf{refl}_b)$는 1_b이므로, (9.1.10)의 우변은 $1_b \circ f \circ 1_a$이며, 이는 f와 같습니다. □

마찬가지로 다음을 보일 수 있습니다.

$$\mathsf{idtoiso}(p^{-1}) = (\mathsf{idtoiso}(p))^{-1} \tag{9.1.11}$$

$$\mathsf{idtoiso}(p \cdot q) = \mathsf{idtoiso}(q) \circ \mathsf{idtoiso}(p) \tag{9.1.12}$$

$$\mathsf{isotoid}(f \circ e) = \mathsf{isotoid}(e) \cdot \mathsf{isotoid}(f) \tag{9.1.13}$$

나머지도 마찬가지입니다.

예 9.1.14. 각 집합 $\hom_A(a,b)$가 단순 명제인 준범주는, 반사적이고($a \leq a$) 추이적인($a \leq b$이고 $b \leq c$이면 $a \leq c$) 단순 관계 "$\leq$"를 갖춘 타입 A_0과 동치입니다. 우리는 이것을 **준순서**라고 부릅니다.

준순서에서 증거 $f : a \leq b$가 동형사상인 것은 정확히 어떤 증거 $g : b \leq a$가 존재할 때입니다. 따라서 $a \cong b$는 $a \leq b$이고 $b \leq a$라는 단순 명제입니다. 그러므로 준순서 A가 범주인 것은 정확히 (1) 각 타입 $a = b$가 단순 명제이고, (2) 임의의 $a, b : A_0$에 대해 함수 $(a \cong b) \to (a = b)$가 존재할 때입니다. 다시 말해, A_0는 집합이어야 하고 $\leq$는 반대칭적이어야 합니다($a \leq b$이고 $b \leq a$이면 $a = b$입니다). 이를 **(부분) 순서** 또는 **부분 순서 집합**이라고 부릅니다.

예 9.1.15. A가 범주이면, A_0이 집합일 필요충분조건은 임의의 $a, b : A_0$에 대해 타입 $a \cong b$가 단순 명제라는 것입니다. A가 범주라는 가정하에, 이는 A의 모든 자기동형이 항등 화살표라는 것과 동치입니다. 한편, A가 A_0이 집합인 준범주라면, A가 범주일 필요충분조건은 A가 뼈대적이고(임의의 두 동형인 대상이 같고) 그리고 모든 자기동형이 항등 화살표라는 것입니다. 이러한 종류의 범주를 때때로 **곤트**라고 부릅니다 [BSP11]. 정의 9.1.6 자체를 그러한 것으로 간주하지 않는 한, 우리의 범주에 대해서는 "뼈대성"이라는 개념이 실제로 존재하지 않습니다.

예 9.1.16. 임의의 1-타입 X에 대해, X를 대상의 타입으로 하고 $\hom(x,y) :\equiv (x = y)$인 범주가 존재합니다. X가 집합이면, 이를 X 위의 **이산** 범주라고 부릅니다. 일반적으로는 이를 **그루포이드**라고 부릅니다(연습문제 9.6를 참조하십시오).

예 9.1.17. 임의의 타입 X에 대해, X를 대상들의 타입으로 하고 $\hom(x,y) :\equiv \|x = y\|_0$인 준범주가 있습니다. 합성 연산

$$\|y = z\|_0 \to \|x = y\|_0 \to \|x = z\|_0$$

은 이어붙이기 $(y = z) \to (x = y) \to (x = z)$로부터 절단에 대한 귀납으로 정의됩니다. 우리는 이것을 X의 **기본 준그루포이드** 라고 부릅니다. (사실 우리는 이미 §8.7에서 이것을 만났습니다. 연습문제 9.11도 참고하십시오.)

예 9.1.18. 대상들의 타입이 $\mathcal{U}$ 이고 $\hom(X,Y) :\equiv \|X \to Y\|_0$이며, 합성이 일반적인 합성 $(Y \to Z) \to (X \to Y) \to (X \to Z)$로부터 절단에 대한 귀납으로 정의되는 준범주가 있습니다. 우리는 이것을 **타입들의 호모토피 준범주**라고 부릅니다.

예 9.1.19. $\mathcal{R}el$ 을 다음과 같은 준범주라고 합시다.

- 그 대상은 집합입니다.
- $\hom_{\mathcal{R}el}(X,Y) = X \to Y \to \mathsf{Prop}$.
- 집합 X에 대해 $1_X(x,x') :\equiv (x = x')$입니다.

- $R : \hom_{\mathcal{R}el}(X, Y)$와 $S : \hom_{\mathcal{R}el}(Y, Z)$에 대해, 그 합성은 다음과 같이 정의됩니다.

$$(S \circ R)(x, z) :\equiv \left\| \sum_{y:Y} R(x, y) \times S(y, z) \right\|.$$

$R : \hom_{\mathcal{R}el}(X, Y)$가 역 S를 갖는 동형사상이라고 가정합시다. 우리는 다음을 관찰합니다.

(i) $R(x, y)$이고 $S(y', x)$이면 $(R \circ S)(y', y)$이고, 따라서 $y' = y$입니다. 마찬가지로 $R(x, y)$이고 $S(y, x')$이면 $x = x'$입니다.

(ii) 임의의 x에 대해 $x = x$이므로 $(S \circ R)(x, x)$입니다. 따라서 $R(x, y)$이고 $S(y, x)$인 $y : Y$가 단순히 존재합니다.

(iii) $R(x, y)$라고 가정합시다. 항목 (ii)에 의해 $R(x, y')$이고 $S(y', x)$인 y'가 단순히 존재합니다. 그런데 그러면 항목 (i)에 의해 단순히 $y' = y$이고, Y가 집합이므로 $y' = y$입니다. 그러므로 이 등식을 따라 $S(y', x)$를 수송하면 $S(y, x)$를 얻습니다. 결론적으로 $R(x, y) \to S(y, x)$입니다. 마찬가지로 $S(y, x) \to R(x, y)$입니다.

(iv) $R(x, y)$이고 $R(x, y')$이면 항목 (iii)에 의해 $S(y', x)$이므로, 항목 (i)에 의해 $y = y'$입니다. 따라서 임의의 x에 대해 $R(x, y)$인 y는 많아야 하나입니다. 그리고 항목 (ii)에 의해 그러한 y가 단순히 존재하므로, 그러한 y가 존재합니다.

결론적으로 $R : \hom_{\mathcal{R}el}(X, Y)$가 동형사상이면, 각 $x : X$에 대해 $R(x, y)$인 $y : Y$가 정확히 하나 존재하며, 쌍대적으로도 마찬가지입니다. 따라서 각 x를 이 y로 보내는 함수 $f : X \to Y$가 존재하고, 이 함수는 동치이므로 $X = Y$입니다. 조금 더 논증하면 $\mathcal{R}el$ 이 범주라는 결론을 얻습니다.

이제 준범주 대신 범주만을 고려하도록 제한할 수도 있습니다. 그러나 그 대신 우리는 범주뿐 아니라 준범주에 대해서도 많은 개념을 전개할 것인데, 이는 범주가 준범주에 비해서, 그리고 고전 수학의 일반적인 범주에 비해서도 얼마나 더 잘 동작하는지를 강조하기 위함입니다.

또한 §§9.6–9.7에서는 약간 더 이색적인 맥락에서 범주가 아닌 특정한 종류의 준범주들이 쓰임새를 가지며, 각각이 대상들의 상등을 서로 다른 방식으로 "고정"한다는 것을 보게 될 것입니다. 이는 준범주의 "준"-성을 강조합니다. 즉, 준범주는 여러 중요한 범주론적 구조를 정의할 수 있는 원재료입니다.

9.2 함자와 변환

다음 정의들은 상당히 자명하며, 수정할 필요가 없습니다.

정의 9.2.1. A와 B를 준범주라고 합시다. **함자** $F : A \to B$는 다음으로 이루어집니다.

(i) 함수 $F_0 : A_0 \to B_0$이며, 일반적으로 이 역시 F로 표기합니다.

(ii) 각 $a, b : A$에 대한 함수 $F_{a,b} : \hom_A(a, b) \to \hom_B(Fa, Fb)$이며, 일반적으로 이 역시 F로 표기합니다.

(iii) 각 $a : A$에 대해 $F(1_a) = 1_{Fa}$가 성립합니다.

(iv) 각 $a, b, c : A$와 $f : \hom_A(a, b)$ 및 $g : \hom_A(b, c)$에 대하여

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$

가 성립합니다.

동일성에 대한 귀납법에 의해 함자는 idtoiso 도 보존한다는 점에 유의하십시오.

정의 9.2.2. 함자 $F, G : A \to B$에 대하여, **자연 변환** $\gamma : F \to G$는 다음으로 구성됩니다.

(i) 각 $a : A$에 대한 사상 $\gamma_a : \hom_B(Fa, Ga)$ 입니다("성분").
(ii) 각 $a, b : A$와 $f : \hom_A(a, b)$에 대하여 $Gf \circ \gamma_a = \gamma_b \circ Ff$가 성립합니다("자연성 공리").

각 타입 $\hom_B(Fa, Gb)$는 집합이므로, 그 동일성 타입은 단순 명제입니다. 따라서 자연성 공리는 단순 명제이며, 그러므로 자연 변환의 동일성은 그 성분들의 동일성에 의해 결정됩니다. 특히, 임의의 F와 G에 대하여 F에서 G로 가는 자연 변환들의 타입은 역시 집합입니다.

마찬가지로, 함자의 동일성은 함수 $A_0 \to B_0$의 동일성과 (이를 따라 수송한) hom-집합 위의 대응하는 함수들의 동일성에 의해 결정됩니다.

정의 9.2.3. 준범주 A, B에 대해, 다음과 같이 정의되는 **함자 준범주**라 불리는 준범주 B^A가 있습니다.

- $(B^A)_0$는 A에서 B로 가는 함자들의 타입입니다.
- $\hom_{B^A}(F, G)$는 F에서 G로 가는 자연 변환들의 타입입니다.

증명. $(1_F)_a :\equiv 1_{Fa}$로 정의합니다. 자연성은 준범주의 단위 공리로부터 따라 나옵니다. $\gamma : F \to G$와 $\delta : G \to H$에 대해 $(\delta \circ \gamma)_a :\equiv \delta_a \circ \gamma_a$로 정의합니다. 자연성은 결합 법칙으로부터 따라 나옵니다. 마찬가지로 B^A의 단위 법칙과 결합 법칙은 B의 단위 법칙과 결합 법칙으로부터 따라 나옵니다. □

보조정리 9.2.4. 자연 변환 $\gamma : F \to G$가 B^A에서 동형사상일 필요충분조건은 각 γ_a가 B에서 동형사상인 것입니다.

증명. γ가 동형사상이면, 그 역인 $\delta : G \to F$가 존재합니다. B^A에서의 합성의 정의에 의해 $(\delta\gamma)_a \equiv \delta_a\gamma_a$이고, 마찬가지로 $(\gamma\delta)_a \equiv \gamma_a\delta_a$입니다. 따라서 $\delta\gamma = 1_F$와 $\gamma\delta = 1_G$로부터 $\delta_a\gamma_a = 1_{Fa}$와 $\gamma_a\delta_a = 1_{Ga}$가 도출되므로, γ_a는 동형사상입니다.

역으로, 각 γ_a가 동형사상이라고 가정하고 그 역을 δ_a라고 부릅시다. 성분이 δ_a인 자연 변환 $\delta : G \to F$를 정의합니다. 자연성 공리에 대해서는 다음이 성립합니다.

$$Ff \circ \delta_a = \delta_b \circ \gamma_b \circ Ff \circ \delta_a = \delta_b \circ Gf \circ \gamma_a \circ \delta_a = \delta_b \circ Gf.$$

이제 자연 변환의 합성과 동일성은 그 성분들에서 결정되므로, $\gamma\delta = 1_G$와 $\delta\gamma = 1_F$가 성립합니다. □

다음 결과는 근본적입니다.

정리 9.2.5. A가 준범주이고 B가 범주이면 B^A는 범주입니다.

증명. $F, G : A \to B$라고 합시다. $\mathsf{idtoiso} : (F = G) \to (F \cong G)$가 동치임을 보여야 합니다.

이것의 역을 제시하기 위해, $\gamma : F \cong G$가 자연 동형사상이라고 가정합시다. 그러면 임의의 $a : A$에 대하여 동형사상 $\gamma_a : Fa \cong Ga$가 있으므로, 동일성 $\mathsf{isotoid}(\gamma_a) : Fa = Ga$가 있습니다. 함수 외연성에 의해 동일성 $\bar{\gamma} : F_0 =_{(A_0 \to B_0)} G_0$가 있습니다.

이제 함자의 마지막 두 공리는 단순 명제이므로, $F = G$임을 보이려면 임의의 $a, b : A$에 대하여 다음 함수들이

$$F_{a,b} : \hom_A(a, b) \to \hom_B(Fa, Fb) \qquad \text{그리고}$$
$$G_{a,b} : \hom_A(a, b) \to \hom_B(Ga, Gb)$$

$\bar{\gamma}$를 따라 수송되었을 때 같아짐을 보이는 것으로 충분합니다. 함수 외연성의 계산 규칙에 의해, $\bar{\gamma}$를 a에 적용하면 $\mathsf{isotoid}(\gamma_a)$와 같아집니다. 그런데 보조정리 9.1.9에 의해 $Ff : \hom_B(Fa, Fb)$를 $\mathsf{isotoid}(\gamma_a)$와 $\mathsf{isotoid}(\gamma_b)$를 따라 수송한 것은 합성 $\gamma_b \circ Ff \circ (\gamma_a)^{-1}$와 같으며, 이는 γ의 자연성에 의해 Gf와 같습니다.

이로써 함수 $(F \cong G) \to (F = G)$의 정의가 완성됩니다. 이제 다음 합성을 고려합시다.

$$(F = G) \to (F \cong G) \to (F = G).$$

hom-집합은 집합이므로 그 동일성 타입은 단순 명제이며, 따라서 두 동일성 $p, q : F = G$가 같음을 보이려면 $p =_{F_0 = G_0} q$임을 보이는 것으로 충분합니다. 그런데 $\bar{\gamma}$의 정의에서 γ가 $\mathsf{idtoiso}(p)$의 꼴이라면, γ_a는 $\mathsf{idtoiso}(p_a)$와 같을 것입니다(이는 p에 대한 귀납법으로 쉽게 증명할 수 있습니다). 따라서 $\mathsf{isotoid}(\gamma_a)$는 p_a와 같을 것이고, 그러므로 함수 외연성에 의해 $\bar{\gamma} = p$가 성립하게 되며, 이것이 바로 우리에게 필요한 것입니다.

마지막으로, 다음 합성을 고려합시다.

$$(F \cong G) \to (F = G) \to (F \cong G).$$

자연 변환의 동일성은 성분별로 판정할 수 있으므로, 각 a에 대해 $\mathsf{idtoiso}(\bar{\gamma})_a = \gamma_a$임을 보이면 충분합니다. 그런데 위에서 관찰했듯이 $\mathsf{idtoiso}(\bar{\gamma})_a = \mathsf{idtoiso}((\bar{\gamma})_a)$이고, 함수 외연성의 계산 규칙에 의해 $(\bar{\gamma})_a = \mathsf{isotoid}(\gamma_a)$입니다. $\mathsf{isotoid}$와 $\mathsf{idtoiso}$는 서로 역함수이므로, 원하던 대로 $\mathsf{idtoiso}(\bar{\gamma})_a = \gamma_a$를 얻습니다. □

특히 (준범주가 아닌) 범주 사이의 자연 동형인 함자들은 서로 같습니다.

이제 함자와 자연 변환을 합성하는 통상적인 방법들을 모두 정의합니다.

정의 9.2.6. 함자 $F : A \to B$와 $G : B \to C$에 대해, 그 합성 $G \circ F : A \to C$는 다음과 같이 주어집니다.

- 합성 $(G_0 \circ F_0) : A_0 \to C_0$
- 각 $a, b : A$에 대해, 합성

$$(G_{Fa,Fb} \circ F_{a,b}) : \hom_A(a, b) \to \hom_C(GFa, GFb).$$

공리들은 쉽게 확인할 수 있습니다.

정의 9.2.7. 함자 $F : A \to B$와 $G, H : B \to C$ 및 자연 변환 $\gamma : G \to H$에 대해, 합성 $(\gamma F) : GF \to HF$는 다음과 같이 주어집니다.

- 각 $a : A$에 대해, 성분 γ_{Fa}입니다.

자연성은 쉽게 확인할 수 있습니다. 마찬가지로, 위와 같은 γ와 $K : C \to D$에 대해, 합성 $(K\gamma) : KG \to KH$는 다음과 같이 주어집니다.

- 각 $b : B$에 대해, 성분 $K(\gamma_b)$입니다.

보조정리 9.2.8. 함자 $F, G : A \to B$와 $H, K : B \to C$ 및 자연 변환 $\gamma : F \to G$와 $\delta : H \to K$에 대해, 다음이 성립합니다.

$$(\delta G)(H\gamma) = (K\gamma)(\delta F).$$

증명. 성분별로 확인하면 충분합니다. $a : A$에서 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}((\delta G)(H\gamma))_a &\equiv (\delta G)_a (H\gamma)_a \\ &\equiv \delta_{Ga} \circ H(\gamma_a) \\ &= K(\gamma_a) \circ \delta_{Fa} && (\delta\text{의 자연성에 의해}) \\ &\equiv (K\gamma)_a \circ (\delta F)_a \\ &\equiv ((K\gamma)(\delta F))_a. && \square\end{aligned}$$

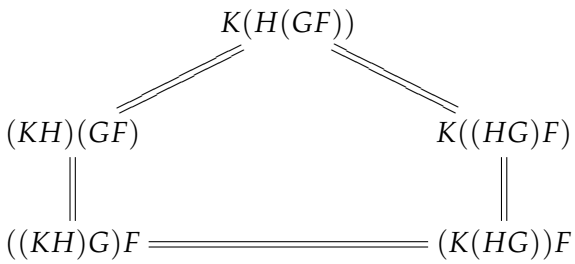
고전적으로는 $\gamma : F \to G$와 $\delta : H \to K$의 "수평 합성"을 $(\delta G)(H\gamma)$와 $(K\gamma)(\delta F)$의 공통된 값으로 정의합니다. 이 두 변환은 서로 같기는 하지만 정의상으로 같지는 않으므로, 여기서는 그렇게 하지 않겠습니다. 그 결과로 모든 종류의 합성에 기호 $\circ$(또는 병치)를 모호함 없이 사용할 수 있다는 이점도 있습니다. (자연 변환을 어느 한쪽에서 함자와 합성하는 경우와 달리) 두 자연 변환을 합성하는 방법은 단 하나뿐이기 때문입니다.

보조정리 9.2.9. 함자의 합성은 결합적입니다: $H(GF) = (HG)F$.

증명. 함수의 합성은 결합적이므로, 대상과 hom에 대한 작용에 대해서는 이것이 바로 따라 나옵니다. 그리고 hom-집합은 집합이므로, 나머지 데이터는 자동으로 성립합니다. $\square$

보조정리 9.2.9의 등식 역시 정의상의 등식이 아닙니다. (함수의 합성은 정의상으로 결합적이지만, 함자를 이루는 공리들도 합성해야 하며, 이것이 정의상의 결합성을 깨뜨립니다.) 이러한 이유로, 결합성에 대한 정합성에 대해서도 알아야 합니다.

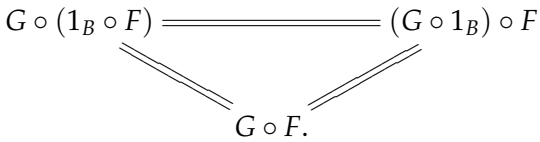
보조정리 9.2.10. 보조정리 9.2.9은 정합적입니다. 즉, 다음과 같은 등식들의 오각형이 가환합니다.



증명. 보조정리 9.2.9에서와 마찬가지로, 이는 대상에 대한 작용에 대해서는 자명하며, 나머지는 자동으로 성립합니다. $\square$

앞으로는 표기법을 남용하여 $H(GF)$와 $(HG)F$ 중 어느 쪽이든 $H \circ G \circ F$ 또는 HGF로 쓰고, 필요할 때마다 보조정리 9.2.9을 따라 수송하겠습니다. 단위에 대해서도 비슷한 정합성 결과가 있습니다.

보조정리 9.2.11. 함자 $F : A \to B$에 대해 등식 $(1_B \circ F) = F$와 $(F \circ 1_A) = F$가 존재하며, $G : B \to C$도 주어지면 다음과 같은 등식들의 삼각형이 가환합니다.



이러한 개념들의 추가적인 전개는 연습문제 9.4 및 9.5을 참조하십시오.

9.3 수반

수반 함자의 정의는 간단합니다. 주된 흥미로운 측면은 증명 관련성에서 비롯됩니다.

정의 9.3.1. 다음이 존재하면 함자 $F : A \to B$를 **왼쪽 수반** 이라고 합니다.

- 함자 $G : B \to A$.
- 자연 변환 $\eta : 1_A \to GF$ (**단위**).
- 자연 변환 $\epsilon : FG \to 1_B$ (**쌍대단위**).
- $(\epsilon F)(F\eta) = 1_F$.
- $(G\epsilon)(\eta G) = 1_G$.

마지막 두 등식을 **삼각 항등식** 또는 **지그재그 항등식**이라고 합니다. 오른쪽 수반을 이와 비슷하게 정의하는 일은 독자에게 맡깁니다.

보조정리 9.3.2. A가 범주이면 (B는 준범주이기만 해도) "F는 왼쪽 수반이다"라는 타입은 단순 명제입니다.

증명. 삼각 항등식을 만족하는 (G, η, ϵ)과 함께 (G', η', ϵ')도 주어졌다고 가정합시다. $\gamma : G \to G'$를 $(G'\epsilon)(\eta' G)$로, $\delta : G' \to G$를 $(G\epsilon')(\eta G')$로 정의합니다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= (G\epsilon')(\eta G')(G'\epsilon)(\eta' G) \\ &= (G\epsilon')(GFG'\epsilon)(\eta G'FG)(\eta' G) \\ &= (G\epsilon)(G\epsilon' FG)(GF\eta' G)(\eta G) \\ &= (G\epsilon)(\eta G) \\ &= 1_G\end{aligned}$$

보조정리 9.2.8와 삼각 항등식을 사용합니다. 마찬가지로 $\gamma\delta = 1_{G'}$임을 보이므로 γ는 자연 동형사상 $G \cong G'$입니다. 정리 9.2.5에 의해 동일성 $G = G'$를 얻습니다.

이제 η와 ϵ을 이 동일성을 따라 수송하면 각각 η' 및 ϵ'과 같아진다는 것을 알아야 합니다. 보조정리 9.1.9에 의해 이 수송은 경우에 맞게 γ 또는 δ와 합성하는 것으로 주어집니다. η의 경우 이로부터 다음을 얻습니다.

$$(G'\epsilon F)(\eta' GF)\eta = (G'\epsilon F)(G'F\eta)\eta' = \eta'$$

여기서 보조정리 9.2.8와 삼각 항등식을 사용하였습니다. ϵ의 경우도 마찬가지입니다. 마지막으로, hom-집합은 집합이므로 삼각 항등식은 자동으로 올바르게 수송됩니다. □

§9.5에서 보조정리 9.3.2의 또 다른 증명을 제시하겠습니다.

9.4 동치

범주론에서는 보통 범주의 동치를 함자 $G : B \to A$와 자연 동형사상 $FG \cong 1_B$ 및 $GF \cong 1_A$가 존재하는 함자 $F : A \to B$로 정의합니다. 그러나 수반이라는 성질과 달리 이것은 절단하지 않으면 단순 명제가 되지 않습니다. 그 이유는 준역원의 타입이 좋지 않게 행동하는 이유와 같습니다(§4.1 참조). 그리고 §4.2에서와 마찬가지로 일반적인 수반 동치 개념을 사용하면 이 문제를 피할 수 있습니다.

정의 9.4.1. 함자 $F : A \to B$가 왼쪽 수반이고 그 η와 ϵ이 동형사상이면 F를 **(준)범주의 동치**라고 합니다. A에서 B로 가는 (준)범주의 동치들의 타입을 $A \simeq B$로 씁니다.

보조정리 9.1.3 및 9.3.2에 의해 A가 범주이면 "F는 준범주의 동치이다"라는 타입은 단순 명제입니다.

보조정리 9.4.2. $F : A \to B$에 대해 $G : B \to A$와 동형사상 $GF \cong 1_A$ 및 $FG \cong 1_B$가 존재하면 F는 준범주의 동치입니다.

증명. 타입의 동치에 대한 정리 4.2.3의 증명과 똑같습니다. □

정의 9.4.3. 함자 $F : A \to B$가 **충실** 하다는 것은 모든 $a, b : A$에 대해 다음 함수가

$$F_{a,b} : \hom_A(a,b) \to \hom_B(Fa, Fb)$$

단사라는 뜻이며, 모든 $a, b : A$에 대해 이 함수가 전사이면 **충만** 하다고 합니다. 둘 다 성립하면(따라서 각 $F_{a,b}$가 동치이면) F가 **충실충만**하다고 합니다.

정의 9.4.4. 모든 $b : B$에 대해 $Fa \cong b$인 $a : A$가 존재하면 함자 $F : A \to B$를 **분할 본질적으로 전사**라고 합니다.

보조정리 9.4.5. 임의의 준범주 A와 B 및 함자 $F : A \to B$에 대해 다음 타입들은 동치입니다.

(i) F는 준범주의 동치입니다.
(ii) F는 충실충만하고 분할 본질적으로 전사입니다.

증명. F가 준범주의 동치이고 G, η, ϵ이 주어져 있다고 가정합시다. 그러면 다음 함수를 얻습니다.

$$\begin{aligned} \hom_B(Fa, Fb) &\to \hom_A(a,b), \\ g &\mapsto {\eta_b}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_a. \end{aligned}$$

$f : \hom_A(a,b)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$${\eta_b}^{-1} \circ G(F(f)) \circ \eta_a = {\eta_b}^{-1} \circ \eta_b \circ f = f$$

한편 $g : \hom_B(Fa, Fb)$에 대해서는 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} F({\eta_b}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_a) &= F({\eta_b}^{-1}) \circ F(G(g)) \circ F(\eta_a) \\ &= \epsilon_{Fb} \circ F(G(g)) \circ F(\eta_a) \\ &= g \circ \epsilon_{Fa} \circ F(\eta_a) \\ &= g \end{aligned}$$

여기서는 ϵ의 자연성을 사용하고, 삼각 항등식을 두 번 사용하였습니다. 따라서 $F_{a,b}$는 동치이므로 F는 충실충만합니다. 마지막으로, 임의의 $b : B$에 대하여 $Gb : A$와 $\epsilon_b : FGb \cong b$가 있습니다.

반대로 F가 충실충만하고 분할 본질적으로 전사라고 가정합시다. $b : B$를 주어진 본질적 분할이 제공하는 $a : A$로 보내어 $G_0 : B_0 \to A_0$를 정의하고, 마찬가지로 주어진 동형사상 $FGb \cong b$를 ϵ_b로 씁니다.

이제 임의의 $g : \hom_B(b, b')$에 대해 $G(g) : \hom_A(Gb, Gb')$를 $F(G(g)) = (\epsilon_{b'})^{-1} \circ g \circ \epsilon_b$를 만족하는 유일한 사상으로 정의합니다($F$가 충실충만하므로 이러한 사상이 존재합니다). 마지막으로 $a : A$에 대해 $\eta_a : \hom_A(a, GFa)$를 $F\eta_a = {\epsilon_{Fa}}^{-1}$를 만족하는 유일한 사상으로 정의합니다. G가 함자이며 (G, η, ϵ)이 F를 준범주의 동치로 만든다는 것은 쉽게 확인할 수 있습니다.

이제 합성 (i)→(ii)→(i)을 생각합시다. 같은 함수 $G_0 : B_0 \to A_0$가 다시 얻어진다는 것은 분명합니다. hom-집합에 대한 G의 작용에 관해서는, $g : \hom_B(b, b')$에 대해 $G(g)$가 $F(G(g)) = (\epsilon_{b'})^{-1} \circ g \circ \epsilon_b$를 만족하는 (반드시 유일한) 사상임을 보여야 합니다. 그런데 이 등식은 가정한 ϵ의 자연성에 의해 성립합니다. ϵ 역시 분명히 다시 얻어지며, η는 $F\eta_a = {\epsilon_{Fa}}^{-1}$에 의해 유일하게 결정됩니다(이는 준범주의 동치 구조에서 성립한다고 가정한 삼각 항등식 중 하나입니다). 따라서 이 합성은 항등 함수와 같습니다.

마지막으로, 다른 합성 (ii)→(i)→(ii)를 생각해 봅시다. 충실충만하다는 것은 단순 명제이므로, 각 $b : B$에 대하여 같은 $a : A$와 동형사상 $Fa \cong b$를 되찾는다는 것만 확인하면 충분합니다. 그런데 이는 분명합니다. 이 함수와 동형사상을 사용하여 (i)에서 G_0와 ϵ을 정의하였고, 이것들이 바로 (ii)를 다시 되찾는 데 사용한 것이기 때문입니다. 따라서 양방향의 합성이 모두 항등함수와 같으므로, 동치 (i) $\simeq$ (ii) 를 얻습니다. □

그러나 A가 범주가 아니라면, 보조정리 9.4.5의 두 타입 중 어느 것도 반드시 단순 명제라고 할 수는 없습니다. 이 점은 다음 개념들도 함께 고려할 것을 시사합니다.

정의 9.4.6. 모든 $b : B$에 대해 $Fa \cong b$인 $a : A$가 단순히 존재하면 함자 $F : A \to B$를 **본질적으로 전사**라고 합니다. F가 충실충만하고 본질적으로 전사이면 F를 **약한 동치**라고 합니다.

약한 동치라는 것은 항상 단순 명제입니다. 그러나 범주의 경우에는 동치와 약한 동치 사이에 차이가 없습니다.

보조정리 9.4.7. $F : A \to B$가 충실충만하고 A가 범주이면, 임의의 $b : B$에 대하여 타입 $\sum_{(a:A)}(Fa \cong b)$는 단순 명제입니다. 그러므로 범주 사이의 함자는 약한 동치일 때, 그리고 그때에만 동치입니다.

증명. $\sum_{(a:A)}(Fa \cong b)$의 원소 (a, f)와 (a', f')가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 ${f'}^{-1} \circ f$는 동형사상 $Fa \cong Fa'$입니다. F가 충실충만하므로 $Fg = {f'}^{-1} \circ f$를 만족하는 $g : a \cong a'$가 있습니다. 또한 A가 범주이므로 $\mathsf{idtoiso}(p) = g$를 만족하는 $p : a = a'$가 있습니다. 이제 $Fg = {f'}^{-1} \circ f$로부터 $((F_0)(p))_*(f) = f'$가 따라 나오므로, (의존 쌍 타입에서 등식의 특징짓기에 의해) $(a, f) = (a', f')$입니다.

따라서 정의역이 범주인 충실충만 함자에 대해서는 본질적 전사성이 분할 본질적 전사성과 동치이며, 그러므로 약한 동치라는 것은 동치라는 것과 동치입니다. □

이것은 집합 기반 접근법에 비해 우리의 범주론이 갖는 중요한 장점입니다. 순수하게 집합에 기반한 범주의 정의에서는 "충실충만하고 본질적으로 전사인 함자는 모두 범주의 동치"라는 명제가 선택 공리 AC 와 동치입니다. 여기서는 이 명제가 유일 선택 원리(§3.9)의 범주론적 버전으로서 공짜로 성립합니다. (실제로 이 성질은 준범주 가운데 범주를 특징짓습니다. §9.9를 참고하십시오.)

한편, 범주의 동치에 대한 다음 특징짓기는 아마도 훨씬 더 유용할 것입니다.

정의 9.4.8. 함자 $F : A \to B$가 충실충만하고 $F_0 : A_0 \to B_0$가 타입의 동치이면, F를 **(준)범주의 동형사상**이라고 합니다 .

이 정의는 "동형사상"이라는 말을 집합과 집합 같은 대상에만 사용한다는 우리의 일반 규칙(§2.4 참조)에 대한 예외입니다. 그러나 여기서는 이 말이 적절한 함의를 지닙니다. 일반적인 준범주에 대해서는 동형사상이 동치보다 강하기 때문입니다.

준범주의 동형사상이라는 것은 항상 단순 성질임에 유의하십시오. A에서 B로 가는 (준)범주의 동형사상들의 타입을 $A \cong B$로 나타냅시다.

보조정리 9.4.9. 준범주 A와 B 및 $F : A \to B$에 대해 다음은 동치입니다.

(i) F는 준범주의 동형사상입니다.

(ii) 다음을 만족하는 $G : B \to A$와 $\eta : 1_A = GF$, $\epsilon : FG = 1_B$가 존재합니다.

$$\mathsf{ap}_{(\lambda H.\, FH)}(\eta) = \mathsf{ap}_{(\lambda K.\, KF)}(\epsilon^{-1}). \tag{9.4.10}$$

(iii) $G : B \to A$와 $\eta : 1_A = GF$, $\epsilon : FG = 1_B$가 단순히 존재합니다.

B_0가 1-타입이 아니면 (9.4.10)는 단순 명제가 아닐 수도 있다는 점에 유의하십시오.

증명. 먼저 hom-집합은 집합이므로, 함자의 등식 사이의 등식은 그 대상 부분에 의해 유일하게 결정된다는 점에 유의하십시오. 따라서 함수 외연성에 의해 (9.4.10)는 다음과 동치입니다.

$$(F_0)(\eta_0)_a = (\epsilon_0)^{-1}{}_{F_0 a}. \tag{9.4.11}$$

모든 $a : A_0$에 대해 성립합니다. 이것이 바로 G_0, η_0, ϵ_0이 F_0가 타입의 반수반 동치라는 증명이 되기 위한 삼각 항등식임에 유의하십시오.

이제 (i)을 가정합시다. $G_0 : B_0 \to A_0$를 F_0의 역이라 하고, $\eta_0 : \mathsf{id}_{A_0} = G_0 F_0$와 $\epsilon_0 : F_0 G_0 = \mathsf{id}_{B_0}$가 삼각 항등식을 만족한다고 합시다. 이 삼각 항등식은 정확히 (9.4.11)입니다. 이제 $G_{b,b'} : \hom_B(b, b') \to \hom_A(G_0 b, G_0 b')$를 다음과 같이 정의합니다.

$$G_{b,b'}(g) :\equiv (F_{G_0 b, G_0 b'})^{-1}\Big(\mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)^{-1}{}_{b'}) \circ g \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_b)\Big)$$

(F가 충실충만하다는 가정을 사용합니다). idtoiso 는 역을 역으로, 이어붙이기를 합성으로 보내고 F는 함자이므로, G가 함자임이 따라 나옵니다.

정의에 의해 $(GF)_0 \equiv G_0 F_0$이며, 이는 η_0에 의해 id_{A_0}와 같습니다. $1_A = GF$를 얻으려면, η_0를 따라 수송했을 때 $\hom_A(a, a')$의 항등 함수가 합성 $G_{Fa,Fa'} \circ F_{a,a'}$와 같아짐을 보여야 합니다. 다시 말해, 임의의 $f : \hom_A(a, a')$에 대해 다음이 성립해야 합니다.

$$\mathsf{idtoiso}((\eta_0)_{a'}) \circ f \circ \mathsf{idtoiso}((\eta_0)^{-1}{}_a) = (F_{GFa,GFa'})^{-1}\Big(\mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)^{-1}{}_{Fa'}) \circ F_{a,a'}(f) \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_{Fa})\Big).$$

그런데 이는 다음과 동치입니다.

$$(F_{GFa,GFa'})\Big(\mathsf{idtoiso}((\eta_0)_{a'}) \circ f \circ \mathsf{idtoiso}((\eta_0)^{-1}{}_a)\Big) = \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)^{-1}{}_{Fa'}) \circ F_{a,a'}(f) \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_{Fa}).$$

이는 F의 함자성, F가 idtoiso 를 보존한다는 사실, 그리고 (9.4.11)로부터 따라 나옵니다. 따라서 $\eta : 1_A = GF$를 얻습니다.

다른 쪽으로, $(FG)_0 \equiv F_0 G_0$이며, 이는 ϵ_0에 의해 id_{B_0}와 같습니다. $FG = 1_B$를 얻으려면, ϵ_0를 따라 수송했을 때 $\hom_B(b,b')$의 항등 함수가 합성 $F_{Gb,Gb'} \circ G_{b,b'}$와 같아짐을 보여야 합니다. 즉, 임의의 $g : \hom_B(b,b')$에 대해 다음이 성립해야 합니다.

$$F_{Gb,Gb'}\left((F_{Gb,Gb'})^{-1}\left(\mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)^{-1}{}_{b'}) \circ g \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_b)\right)\right) = \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0{}^{-1})_{b'}) \circ g \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_b).$$

그런데 이는 $(F_{Gb,Gb'})^{-1}$가 $F_{Gb,Gb'}$의 역이라는 사실에 불과합니다. 그리고 (9.4.10)가 (9.4.11)와 동치임을 앞서 언급했으므로, (ii)가 성립합니다.

역으로, (ii)가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 G, η, ϵ의 대상 부분과 (9.4.11)로부터 F_0가 타입의 동치임을 알 수 있습니다. 그리고 $a, a' : A_0$에 대해 $\overline{G}_{a,a'} : \hom_B(Fa, Fa') \to \hom_A(a,a')$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\overline{G}_{a,a'}(g) :\equiv \mathsf{idtoiso}(\eta^{-1})_{a'} \circ G(g) \circ \mathsf{idtoiso}(\eta)_a. \tag{9.4.12}$$

$\mathsf{idtoiso}(\eta)$의 자연성에 의해, 임의의 $f : \hom_A(a,a')$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\overline{G}_{a,a'}(F_{a,a'}(f)) &= \mathsf{idtoiso}(\eta^{-1})_{a'} \circ G(F(f)) \circ \mathsf{idtoiso}(\eta)_a \\ &= \mathsf{idtoiso}(\eta^{-1})_{a'} \circ \mathsf{idtoiso}(\eta)_{a'} \circ f \\ &= f.\end{aligned}$$

한편, $g : \hom_B(Fa, Fa')$에 대해서는 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}F_{a,a'}(\overline{G}_{a,a'}(g)) &= F(\mathsf{idtoiso}(\eta^{-1})_{a'}) \circ F(G(g)) \circ F(\mathsf{idtoiso}(\eta)_a) \\ &= \mathsf{idtoiso}(\epsilon)_{Fa'} \circ F(G(g)) \circ \mathsf{idtoiso}(\epsilon^{-1})_{Fa} \\ &= \mathsf{idtoiso}(\epsilon)_{Fa'} \circ \mathsf{idtoiso}(\epsilon^{-1})_{Fa'} \circ g \\ &= g.\end{aligned}$$

(여기에는 idtoiso 와 위스커링(whiskering)의 호환성에 관한 보조정리들이 필요하며, 이를 서술하고 증명하는 것은 독자에게 맡깁니다.) 따라서 $F_{a,a'}$는 동치이므로 F는 충실충만합니다. 즉, (i)이 성립합니다.

이제 (i)이 단순 명제이므로 합성 (i)→(ii)→(i)은 항등과 같습니다. 반대쪽으로, 위의 구성을 따라가 보면 합성 (ii)→(i)→(ii)가 대상 부분 G_0, η_0, ϵ_0와 (9.4.10)의 대상 부분을 본질적으로 보존함을 알 수 있습니다. 그리고 hom-집합은 집합이므로, 뒤의 세 경우에는 대상 부분이 전부입니다.

따라서 hom-집합 위에서의 G의 작용을 복원함을 보이면 충분합니다. 다시 말해, $g : \hom_B(b,b')$이면 다음이 성립함을 보여야 합니다.

$$G_{b,b'}(g) = \overline{G}_{G_0 b, G_0 b'}\left(\mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)^{-1}{}_{b'}) \circ g \circ \mathsf{idtoiso}((\epsilon_0)_b)\right)$$

여기서 $\overline{G}$는 (9.4.12)로 정의됩니다. 그런데 이는 G의 함자성과 다른 쪽 삼각 항등식으로부터 따라 나오며, 이 항등식이 (9.4.11)와 동치임은 제4장에서 보았습니다.

이제 (i)이 단순 명제이므로 (ii)도 단순 명제이고, 따라서 이들이 (iii)과 논리적으로 동치임을 보이면 충분합니다. 물론 (ii)→(iii)이므로, (iii)을 가정합시다. (i)이 단순 명제이므로, G, η, ϵ이 주어졌다고 가정해도 됩니다. 그러면 G_0와 η, ϵ으로부터 F_0가 동치임이 따라 나옵니다. 또한 자연 동형사상 $\mathsf{idtoiso}(\eta) : 1_A \cong GF$와 $\mathsf{idtoiso}(\epsilon) : FG \cong 1_B$도 있으므로, 보조정리 9.4.2에 의해 F는 준범주의 동치이며, 특히 충실충만합니다. □

보조정리 9.4.9(ii)와 함자 범주에서의 idtoiso로부터, 준범주의 모든 동형사상은 동치라는 결론을 곧바로 얻습니다. 준범주의 경우 그 역은 성립하지 않을 수 있습니다.

예 9.4.13. X를 타입, $x_0 : X$를 원소라 하고, X_{ch}가 X 위의 혼돈 또는 비이산 준범주를 나타낸다고 합시다. 정의에 따라 $(X_{\mathrm{ch}})_0 :\equiv X$이고, 모든 x, x'에 대해 $\hom_{X_{\mathrm{ch}}}(x, x') :\equiv \mathbf{1}$입니다. 그러면 유일한 함자 $X_{\mathrm{ch}} \to \mathbf{1}$은 준범주의 동치이지만, X가 축약 가능하지 않은 한 동형사상은 아닙니다.

이 예는 또한 준범주가 그 자체로는 범주가 아니면서도 범주와 동치일 수 있음을 보여 줍니다. 물론 준범주가 범주와 동형이라면, 그 준범주 자체도 범주여야 합니다.

그러나 범주의 경우에는 두 개념이 일치합니다.

보조정리 9.4.14. 범주 A와 B에 대해, 함자 $F : A \to B$가 범주의 동치일 필요충분조건은 그것이 범주의 동형사상인 것입니다.

증명. 둘 다 단순 성질이므로, 이들이 논리적으로 동치임을 보이면 충분합니다. 그러므로 먼저 F가 범주의 동치이고 (G, η, ϵ)이 주어졌다고 가정합시다. F가 충실충만하다는 것은 이미 보았습니다. 정리 9.2.5에 의해 자연 동형사상 η와 ϵ은 등식 $1_A = GF$와 $FG = 1_B$를 주며, 따라서 특히 등식 $\mathsf{id}_A = G_0 \circ F_0$와 $F_0 \circ G_0 = \mathsf{id}_B$를 줍니다. 따라서 F_0는 타입의 동치입니다.

역으로, F가 충실충만하고 F_0가 타입의 동치이며, 그 역을 이를테면 G_0라 합시다. 그러면 각 $b : B$에 대해 $G_0 b : A$와 등식 $FGb = b$가 있고, 따라서 동형사상 $FGb \cong b$가 있습니다. 따라서 보조정리 9.4.5에 의해 F는 범주의 동치입니다. □

물론 (준)범주에 대해서는 같음의 세 번째 개념, 즉 상등이 또 있습니다. 그러나 유니벌런스 공리로부터 이것이 동형사상과 일치함이 따라 나옵니다.

보조정리 9.4.15. A와 B가 준범주이면, 다음 함수

$$(A = B) \to (A \cong B)$$

(항등 함자로부터 귀납법으로 정의되며) 타입의 동치입니다.

증명. 의존 합 타입에서 늘 그렇듯이, $A = B$의 원소를 주는 것은 다음을 주는 것과 동치입니다.

- 동일성 $P_0 : A_0 = B_0$,
- 각 $a, b : A_0$에 대한 동일성

$$P_{a,b} : \hom_A(a, b) = \hom_B(P_{0*}(a), P_{0*}(b)),$$

- 동일성 $(P_{a,a})_*(1_a) = 1_{P_{0*}(a)}$ 및 $(P_{a,c})_*(gf) = (P_{b,c})_*(g) \circ (P_{a,b})_*(f)$.

(여기서도 hom-집합의 동일성 타입이 단순 명제라는 사실을 사용합니다.) 그런데 유니벌런스에 의해 이는 다음을 주는 것과 동치입니다.

- 타입의 동치 $F_0 : A_0 \simeq B_0$,
- 각 $a, b : A_0$에 대한 타입의 동치

$$F_{a,b} : \hom_A(a, b) \simeq \hom_B(F_0(a), F_0(b)),$$

- 그리고 동일성 $F_{a,a}(1_a) = 1_{F_0(a)}$ 및 $F_{a,c}(gf) = F_{b,c}(g) \circ F_{a,b}(f)$.

그런데 이는 정확히 범주의 동형사상인 함자 $F : A \to B$로 이루어집니다. 그리고 동일성에 대한 귀납법에 의해, 이 동치 $(A = B) \simeq (A \cong B)$는 귀납법으로 얻은 동치와 같습니다. □

따라서 범주에서도 상등은 동치와 일치합니다. 이는 범주, 함자, 자연 변환이 단지 전-2-범주가 아니라 2-범주를 이룬다는 뜻으로 해석할 수 있습니다(연습문제 9.4 참조).

정리 9.4.16. A와 B가 범주이면, 다음 함수는

$$(A = B) \to (A \simeq B)$$

(항등 함자로부터 귀납법으로 정의되며) 타입의 동치입니다.

증명. 보조정리 9.4.14 및 9.4.15에 의해 성립합니다. □

그 결과로, 범주들의 타입은 2-타입입니다. $A \simeq B$는 A에서 B로 가는 함자들의 타입(이 함자들은 어떤 범주의 대상입니다)의 부분 타입이므로 1-타입이고, 따라서 동일성 타입 $A = B$ 역시 1-타입이기 때문입니다.

9.5 요네다 보조정리

대상이 집합이고 사상이 함수인 범주 $\mathcal{S}et$ 이 있음을 상기하십시오. 이제 모든 준범주가 $\mathcal{S}et$-값 hom-함자를 가짐을 보이겠습니다. 먼저 (준)범주의 반대와 곱을 정의해야 합니다.

정의 9.5.1. 준범주 A에 대해, 그 **반대** A^{op}는 대상의 타입이 같고, $\hom_{A^{\mathrm{op}}}(a, b) :\equiv \hom_A(b, a)$이며, 항등과 합성을 A로부터 물려받는 준범주입니다.

정의 9.5.2. 준범주 A와 B에 대해, 그 **곱** $A \times B$는 $(A \times B)_0 :\equiv A_0 \times B_0$이고 다음을 만족하는 준범주입니다.

$$\hom_{A\times B}((a, b), (a', b')) :\equiv \hom_A(a, a') \times \hom_B(b, b').$$

항등사상은 $1_{(a,b)} :\equiv (1_a, 1_b)$로 정의하고, 합성은 다음과 같이 정의합니다. $(g, g')(f, f') :\equiv ((gf), (g'f'))$.

보조정리 9.5.3. 준범주 A, B, C에 대해, 다음 타입들은 동치입니다.

(i) 함자 $A \times B \to C$.
(ii) 함자 $A \to C^B$.

증명. $F : A \times B \to C$가 주어지면, 임의의 $a : A$에 대해 함자 $F_a : B \to C$가 있음은 자명합니다. 이로부터 함수 $A_0 \to (C^B)_0$를 얻습니다. 다음으로, 임의의 $f : \hom_A(a, a')$에 대해, 임의의 $b : B$마다 사상 $F_{(a,b),(a',b)}(f, 1_b) : F_a(b) \to F_{a'}(b)$가 있습니다. 이들은 자연 변환 $F_a \to F_{a'}$의 성분입니다. a에 대한 함자성은 쉽게 확인할 수 있으므로, 함자 $\hat{F} : A \to C^B$를 얻습니다.

역으로, $G : A \to C^B$가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 임의의 $a : A$와 $b : B$에 대해 대상 $G(a)(b) : C$가 있으며, 이로부터 함수 $A_0 \times B_0 \to C_0$를 얻습니다. 그리고 $f : \hom_A(a, a')$와 $g : \hom_B(b, b')$에 대해 다음 사상이 있습니다.

$$G(a')_{b,b'}(g) \circ G_{a,a'}(f)_b = G_{a,a'}(f)_{b'} \circ G(a)_{b,b'}(g)$$

이 사상은 $\hom_C(G(a)(b), G(a')(b'))$에 속합니다. 이번에도 함자성을 쉽게 확인할 수 있으므로, 함자 $\check{G} : A \times B \to C$를 얻습니다.

마지막으로, 이 두 연산이 서로 역이라는 것도 분명합니다. □

이제 임의의 준범주 A에 대해, 다음 hom-함자가 있습니다.

$$\hom_A : A^{\mathrm{op}} \times A \to \mathcal{S}et.$$

이 함자는 쌍 $(a,b) : (A^{\mathrm{op}})_0 \times A_0 \equiv A_0 \times A_0$를 집합 $\hom_A(a,b)$로 보냅니다. 사상 $(f,f') : \hom_{A^{\mathrm{op}}\times A}((a,b),(a',b'))$에 대해서는 정의에 의해 $f : \hom_A(a',a)$이고 $f' : \hom_A(b,b')$이므로, 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}(\hom_A)_{(a,b),(a',b')}(f,f') &:\equiv (g \mapsto (f'gf)) \\ &: \hom_A(a,b) \to \hom_A(a',b').\end{aligned}$$

함자성은 쉽게 확인할 수 있습니다.

따라서 보조정리 9.5.3에 의해 유도된 함자 $\mathbf{y} : A \to \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$를 얻으며, 이를 **요네다 매장**이라고 부릅니다.

정리 9.5.4 (요네다 보조정리). 임의의 준범주 A, 임의의 $a : A$, 임의의 함자 $F : \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$에 대해, 다음 동형사상이 있습니다.

$$\hom_{\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}a, F) \cong Fa. \tag{9.5.5}$$

더욱이, 이것은 a와 F 모두에 대해 자연적입니다.

증명. 자연 변환 $\alpha : \mathbf{y}a \to F$가 주어지면, 성분 $\alpha_a : \mathbf{y}a(a) \to Fa$를 생각할 수 있습니다. $\mathbf{y}a(a) \equiv \hom_A(a,a)$이므로 $1_a : \mathbf{y}a(a)$가 있고, 따라서 $\alpha_a(1_a) : Fa$입니다. 이로부터 (9.5.5)에서 왼쪽에서 오른쪽으로 가는 함수 $(\alpha \mapsto \alpha_a(1_a))$를 얻습니다.

반대 방향으로는, $x : Fa$가 주어지면 $\alpha : \mathbf{y}a \to F$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\alpha_{a'}(f) :\equiv F_{a,a'}(f)(x).$$

자연성은 쉽게 확인할 수 있으므로, 이로써 (9.5.5)에서 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 함수를 얻습니다.

이 둘이 서로 역임을 보이기 위해, 먼저 $x : Fa$가 주어졌다고 가정합시다. 그러면 α를 위와 같이 정의할 때 $\alpha_a(1_a) = F_{a,a}(1_a)(x) = 1_{Fa}(x) = x$가 성립합니다. 한편, $\alpha : \mathbf{y}a \to F$가 주어졌다고 가정하고 x를 위와 같이 정의하면, 임의의 $f : \hom_A(a',a)$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\alpha_{a'}(f) &= \alpha_{a'}(\mathbf{y}a_{a,a'}(f)(1_a)) \\ &= (\alpha_{a'} \circ \mathbf{y}a_{a,a'}(f))(1_a) \\ &= (F_{a,a'}(f) \circ \alpha_a)(1_a) \\ &= F_{a,a'}(f)(\alpha_a(1_a)) \\ &= F_{a,a'}(f)(x).\end{aligned}$$

따라서 두 합성은 모두 항등함수와 같습니다. 자연성의 증명은 독자에게 맡깁니다. □

따름정리 9.5.6. 요네다 매장 $\mathbf{y} : A \to \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$는 충실충만합니다.

증명. 정리 9.5.4에 의해 다음이 성립합니다.

$$\hom_{\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}a, \mathbf{y}b) \cong \mathbf{y}b(a) \equiv \hom_A(a,b).$$

이 동형사상이 실제로 hom-집합에 대한 $\mathbf{y}$의 작용임은 쉽게 확인할 수 있습니다. □

따름정리 9.5.7. A가 범주이면, $\mathbf{y}_0 : A_0 \to (\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}})_0$는 매장입니다. 특히 $\mathbf{y}a = \mathbf{y}b$이면 $a = b$입니다.

증명. 따름정리 9.5.6에 의해, $\mathbf{y}$ 는 동형사상들의 집합 사이에 동형사상을 유도합니다. 그런데 A와 $\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$는 범주이고 $\mathbf{y}$ 는 함자이므로, 이는 동일성 타입 사이의 동형사상과 동치이며, 이것이 바로 매장이라는 것의 정의입니다. □

정의 9.5.8. $a : A$와 동형사상 $\mathbf{y}a \cong F$가 존재하면, 함자 $F : \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$를 **표현 가능** 하다고 합니다.

정리 9.5.9. A가 범주이면, 타입 "F가 표현 가능함"은 단순 명제입니다.

증명. 정의에 의해 "F가 표현 가능함"은 F 위의 $\mathbf{y}_0$의 섬유일 뿐입니다. 따름정리 9.5.7에 의해 $\mathbf{y}_0$는 매장이므로, 이 섬유는 단순 명제입니다. □

특히, 범주에서는 같은 함자의 임의의 두 표현이 서로 같습니다. 이를 이용하여 보조정리 9.3.2의 다른 증명을 제시할 수 있습니다. 먼저 표현 가능성의 관점에서 수반을 특징짓겠습니다.

보조정리 9.5.10. 임의의 준범주 A와 B, 그리고 함자 $F : A \to B$에 대해, 다음 타입들은 동치입니다.

(i) F는 왼쪽 수반입니다.
(ii) 각 $b : B$에 대해, A^{op}에서 $\mathcal{S}et$ 으로 가는 함자 $(a \mapsto \hom_B(Fa, b))$는 표현 가능합니다.

증명. 타입 (ii)의 원소는 함수 $G_0 : B_0 \to A_0$와, 모든 $a : A$와 $b : B$에 대한 다음 동형사상으로 이루어집니다.

$$\gamma_{a,b} : \hom_B(Fa, b) \cong \hom_A(a, G_0 b)$$

이 동형사상은 $f : \hom_A(a, a')$에 대해 $\gamma_{a,b}(g \circ Ff) = \gamma_{a',b}(g) \circ f$를 만족합니다.

이것이 주어지면, $a : A$에 대해 $\eta_a :\equiv \gamma_{a,Fa}(1_{Fa})$로 정의하고, $b : B$에 대해 $\epsilon_b :\equiv (\gamma_{Gb,b})^{-1}(1_{Gb})$로 정의합니다. 이제 $g : \hom_B(b, b')$에 대해 다음과 같이 정의합니다.

$$G_{b,b'}(g) :\equiv \gamma_{Gb,b'}(g \circ \epsilon_b)$$

G가 함자이고 η와 ϵ이 삼각 항등식을 만족하는 자연 변환임을 검증하는 과정은 고전적인 경우와 정확히 같으며, 이들은 모두 단순 명제이므로 그 값에는 신경 쓰지 않겠습니다. 따라서 함수 (ii)→(i)을 얻습니다.

반대 방향으로, F가 왼쪽 수반이면 당연히 G_0가 지정되어 있으며, $\gamma_{a,b}$를 다음 합성으로 잡을 수 있습니다.

$$\hom_B(Fa, b) \xrightarrow{G_{Fa,b}} \hom_A(GFa, Gb) \xrightarrow{(-\circ\eta_a)} \hom_A(a, Gb).$$

η가 자연적이므로 이것도 분명히 자연적이며, 그 역은 다음과 같이 주어집니다.

$$\hom_A(a, Gb) \xrightarrow{F_{a,Gb}} \hom_B(Fa, FGb) \xrightarrow{(\epsilon_b \circ -)} \hom_A(Fa, b)$$

(삼각 항등식에 의해). 따라서 (i)→ (ii)도 얻습니다.

합성 (ii)→(i)→ (ii)의 경우, 함수 G_0가 보존되는 것은 분명하므로 γ를 되찾는지만 확인하면 충분합니다. 그런데 새로운 γ는 $f : \hom_B(Fa, b)$를 다음으로 보내도록 정의됩니다.

$$\begin{aligned} G(f) \circ \eta_a &\equiv \gamma_{GFa,b}(f \circ \epsilon_{Fa}) \circ \eta_a \\ &= \gamma_{GFa,b}(f \circ \epsilon_{Fa} \circ F\eta_a) \\ &= \gamma_{GFa,b}(f) \end{aligned}$$

따라서 이는 기존의 것과 일치합니다.

마지막으로, (i)→(ii)→ (i)의 경우, 대상에 대해서는 함자 G를 확실히 되찾습니다. 새로운 $G_{b,b'} : \hom_B(b,b') \to \hom_A(Gb,Gb')$는 g를 다음으로 보내도록 정의됩니다.

$$\begin{aligned}\gamma_{Gb,b'}(g \circ \epsilon_b) &\equiv G(g \circ \epsilon_b) \circ \eta_{Gb} \\ &= G(g) \circ G\epsilon_b \circ \eta_{Gb} \\ &= G(g)\end{aligned}$$

따라서 이는 기존의 것과 일치합니다. 새로운 η_a는 $\gamma_{a,Fa}(1_{Fa}) \equiv G(1_{Fa}) \circ \eta_a$로 정의되므로 기존의 η_a와 같습니다. 그리고 마지막으로, 새로운 ϵ_b는 $(\gamma_{Gb,b})^{-1}(1_{Gb}) \equiv \epsilon_b \circ F(1_{Gb})$로 정의되며, 이 역시 기존의 ϵ_b와 같습니다. □

따름정리 9.5.11. [보조정리 9.3.2] A가 범주이고 $F : A \to B$이면, 타입 "F가 왼쪽 수반임"은 단순 명제입니다.

증명. 정리 9.5.9에 의해, A가 범주이면 보조정리 9.5.10(ii)의 타입은 단순 명제입니다. □

9.6 엄격한 범주

정의 9.6.1. **엄격한 범주** 는 대상의 타입이 집합인 준범주입니다.

수학의 레드 헤링 원리에 따라, 엄격한 범주가 반드시 범주인 것은 아닙니다. 사실 범주는 곤트일 때 정확히 엄격한 범주입니다(예 9.1.15). 대부분의 경우 범주론은 엄격한 범주가 아니라 범주를 다루지만, 때로는 엄격한 범주를 고려하고 싶을 때가 있습니다. 그 주된 장점은 엄격한 범주가 동치보다 더 엄격한 "같음"의 개념, 즉 동형사상(또는 보조정리 9.4.15에 의해 동등하게, 상등)을 가진다는 것입니다.

다음은 엄격한 범주가 생겨나는 한 가지 경우입니다.

예 9.6.2. A를 준범주, $x : A$를 대상이라 합시다. 그러면 다음과 같은 준범주 $\mathsf{mono}(A,x)$가 있습니다:

- 그 대상들은 대상 $y : A$와 단사 사상 $m : \hom_A(y,x)$로 이루어집니다. (늘 그렇듯이, $(m \circ f = m \circ g) \Rightarrow (f = g)$이면 $m : \hom_A(y,x)$를 **단사 사상**이라고 합니다(또는 **모닉**이라고 합니다).)
- (y,m)에서 (z,n)으로 가는 사상들은 A에서 y에서 z로 가는 임의의 사상들입니다(m과 n을 반드시 보존하지는 않습니다).

$\mathsf{mono}(A,x)$의 대상들 사이의 등식 $(y,m) = (z,n)$은 등식 $p : y = z$와 등식 $p_*(m) = n$으로 이루어지며, 후자는 보조정리 9.1.9에 의해 등식 $m = n \circ \mathsf{idtoiso}(p)$와 동등합니다. hom-집합은 집합이므로, 그러한 등식들의 타입은 단순 명제입니다. 그런데 m과 n이 단사 사상이므로, $m = n \circ f$를 만족하는 사상 f들의 타입 또한 단순 명제입니다. 따라서 A가 범주이면 $(y,m) = (z,n)$은 단순 명제이고, 그러므로 $\mathsf{mono}(A,x)$는 엄격한 범주입니다.

이 예는 쌍대화할 수 있으며, 다양한 방식으로 일반화할 수도 있습니다. 다음은 엄격한 범주의 흥미로운 응용입니다.

예 9.6.3. E/F를 체의 유한 갈루아 확대 라 하고, G를 그 갈루아 군이라 합시다. 그러면 대상이 중간체 $F \subseteq K \subseteq E$이고, 사상이 F를 점별로 고정하는(그러나 E로의 포함과 가환할 필요는 없는) 체 준동형사상인 엄격한 범주가 있습니다. 또한 대상이 부분군 $H \subseteq G$이고, 사상이 G-집합의 사상 $G/H \to G/K$인 또 다른 엄격한 범주도 있습니다. 갈루아 이론의 기본 정리 는 이 두 준범주가 (단지 동치인 것이 아니라) 동형이라고 말합니다.

9.7 †-범주

대상들의 타입이 집합이 아니면서도 범주도 아닌, 유용한 종류의 준범주도 언급할 만합니다.

정의 9.7.1. **†-준범주** 는 준범주 A에 다음을 함께 갖춘 것입니다.

(i) 각 $x, y : A$에 대해 함수 $(-)^\dagger : \hom_A(x,y) \to \hom_A(y,x)$가 주어집니다.
(ii) 모든 $x : A$에 대해 $(1_x)^\dagger = 1_x$가 성립합니다.
(iii) 모든 f, g에 대해 $(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$가 성립합니다.
(iv) 모든 f에 대해 $(f^\dagger)^\dagger = f$가 성립합니다.

정의 9.7.2. †-준범주에서 사상 $f : \hom_A(x,y)$가 $f^\dagger \circ f = 1_x$이고 $f \circ f^\dagger = 1_y$이면, f는 **유니타리** 라고 합니다.

물론 모든 유니터리 사상은 동형사상이며, 유니터리라는 성질은 단순 명제입니다. 따라서 각 $x, y : A$에 대해 x에서 y로의 유니터리 동형사상들의 집합이 있으며, 이를 $(x \cong^\dagger y)$로 표기합니다.

보조정리 9.7.3. $p : (x = y)$이면 $\mathsf{idtoiso}(p)$는 유니터리입니다.

증명. 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정할 수 있습니다. 그러면 $(1_x)^\dagger \circ 1_x = 1_x \circ 1_x = 1_x$이며, 다른 쪽도 마찬가지입니다. □

정의 9.7.4. **†-범주** 란 모든 $x, y : A$에 대해 다음 함수가 성립하는 †-준범주입니다.

$$(x = y) \to (x \cong^\dagger y)$$

(보조정리 9.7.3에서 주어진 함수)가 동치인 †-전범주입니다.

예 9.7.5. $(R^\dagger)(y,x) :\equiv R(x,y)$로 정의하면 예 9.1.19의 범주 $\mathcal{R}el$ 은 †-전범주입니다. $\mathcal{R}el$ 이 범주라는 증명은 실제로 모든 동형사상이 유니터리임을 보여 줍니다. 따라서 $\mathcal{R}el$ 은 †-범주이기도 합니다.

예 9.7.6. 임의의 그루포이드는 $f^\dagger :\equiv f^{-1}$로 정의하면 †-범주가 됩니다.

예 9.7.7. $\mathcal{H}ilb$ 를 다음과 같은 준범주라고 합시다.

- 그 대상은 내적(안곱) $\langle -, - \rangle$을 갖춘 유한 차원 벡터 공간입니다.
- 그 사상은 임의의 선형 사상입니다.

표준적인 선형대수학에 따르면, 유한 차원 내적(안곱) 공간 사이의 임의의 선형 사상 $f : V \to W$는 $\langle fv, w \rangle = \langle v, f^\dagger w \rangle$로 특징지어지는, 유일하게 정의된 수반 $f^\dagger : W \to V$를 가집니다. 이러한 방식으로 $\mathcal{H}ilb$ 는 †-준범주가 됩니다. 또한, 선형 동형사상은 정확히 **등거리 사상**, 즉 $\langle fv, fw \rangle = \langle v, w \rangle$일 때 유니터리입니다. 이로부터 $\mathcal{H}ilb$ 는 †-범주이지만, 범주는 아니라는 것(모든 선형 동형사상이 유니터리인 것은 아님)이 따라 나옵니다.

고전적 기초 아래에서 ∔-범주에 관하여 상당히 많은 일반 이론이 개발되어 왔습니다. 일찍부터 ∔-범주의 대상들에 대한 올바른 "같음"의 개념은 임의의 동형사상이 아니라 유니터리 동형사상이라는 점이 관찰되었으며, 이는 범주론 학자들 사이에 적지 않은 당혹감을 불러일으켰습니다. 호모토피 타입 이론은 ∔-범주를 엄격한 범주와 마찬가지로 단순히 다른 종류의 준범주로 규정함으로써 이 문제를 해결합니다.

9.8 구조 동일성 원리

구조 동일성 원리는 동형인 구조들이 동일하다는 것을 표현하는 비형식적 원리입니다. 우리는 구조가 다중 정렬이거나 심지어 의존 정렬일 수도 있고, 무한항일 수도 있으며, 심지어 고차일 수도 있는 폭넓은 구조 개념들의 족에 적용할 수 있는 일반적이고 추상적인 결과를 증명하는 것을 목표로 합니다.

가장 단순한 종류의 단일 정렬 구조는 추가 구조가 없는 타입 하나로 이루어집니다. 유니밸런스 공리는 그 구조 개념에 대한 구조 동일성 원리를 강한 형태로 표현합니다. 즉, 타입 A, B에 대해 표준적인 함수 $(A = B) \to (A \simeq B)$는 동치입니다.

준범주 X에서 시작합니다. 단일종 일차 구조에 적용하는 경우 X는 $\mathcal{U}$-작은 집합들의 범주가 되며, 여기서 $\mathcal{U}$는 유니밸런트 타입 유니버스입니다.

정의 9.8.1. X 위의 **구조 개념** (P, H)는 다음으로 이루어집니다.

(i) 타입 족 $P : X_0 \to \mathcal{U}$. 각 $x : X_0$에 대하여 Px의 원소를 x 위의 (P, H)-**구조** 라고 부릅니다.

(ii) $x, y : X_0$, $f : \hom_X(x, y)$ 및 $\alpha : Px$, $\beta : Py$에 대하여, 단순 명제

$$H_{\alpha\beta}(f).$$

$H_{\alpha\beta}(f)$가 참이면, f를 α에서 β로 가는 (P, H)-**준동형사상** 이라고 합니다.

(iii) $x : X_0$ 및 $\alpha : Px$에 대하여 $H_{\alpha\alpha}(1_x)$가 성립합니다.

(iv) $x, y, z : X_0$ 및 $\alpha : Px$, $\beta : Py$, $\gamma : Pz$에 대하여, $f : \hom_X(x, y)$이고 $g : \hom_X(y, z)$이면 다음이 성립합니다

$$H_{\alpha\beta}(f) \to H_{\beta\gamma}(g) \to H_{\alpha\gamma}(g \circ f).$$

(P, H)가 구조 개념일 때, $\alpha, \beta : Px$에 대하여 다음과 같이 정의합니다

$$(\alpha \leq_x \beta) :\equiv H_{\alpha\beta}(1_x).$$

조건 (iii)와 (iv)에 의해, 이것은 Px를 대상의 타입으로 갖는 준순서(예 9.1.14)입니다. 모든 $x : X$에 대하여 이 준순서가 실제로 부분 순서이면, (P, H)를 **표준 구조 개념** 이라고 합니다.

표준 구조 개념의 경우 각 타입 Px는 실제로 집합이어야 한다는 점에 유의하십시오. 이제 임의의 구조 개념 (P, H)에 대하여 (P, H)-**구조들의 준범주** $A = \mathsf{Str}_{(P,H)}(X)$를 정의합니다.

- A의 대상의 타입은 타입 $A_0 :\equiv \sum_{(x:X_0)} Px$입니다. $a \equiv (x, \alpha) : A_0$이면 $|a| :\equiv x$로 쓸 수 있습니다.
- $(x, \alpha) : A_0$ 및 $(y, \beta) : A_0$에 대하여 다음과 같이 정의합니다

$$\hom_A((x, \alpha), (y, \beta)) :\equiv \left\{ f : x \to y \;\middle|\; H_{\alpha\beta}(f) \right\}.$$

합성과 항등사상은 X로부터 물려받으며, 조건 (iii)와 (iv)는 이것들이 A로 올려짐을 보장합니다.

정리 9.8.2 (구조 동일성 원리). X가 범주이고 (P, H)가 X 위의 표준 구조 개념이면, 준범주 $\mathsf{Str}_{(P,H)}(X)$는 범주입니다.

증명. 의존 쌍 타입에서의 동일성의 정의에 의해, 동일성 $(x, \alpha) = (y, \beta)$를 제시하는 것은 다음으로 이루어집니다

- 동일성 $p : x = y$, 그리고
- 동일성 $p_*(\alpha) = \beta$.

P가 집합 값을 가지므로, 후자는 단순 명제입니다. 한편, $\mathsf{Str}_{(P,H)}(X)$에서의 동형사상 $(x, \alpha) \cong (y, \beta)$가 다음으로 이루어진다는 것을 쉽게 알 수 있습니다

- 다음을 만족하는 X에서의 동형사상 $f : x \cong y$
- $H_{\alpha\beta}(f)$ 및 $H_{\beta\alpha}(f^{-1})$.

물론 이 중 두 번째 것 역시 단순 명제입니다. 그리고 X가 범주이므로 함수 $(x = y) \to (x \cong y)$는 동치입니다. 따라서 임의의 $p : x = y$와 임의의 $(\alpha : Px)$, $(\beta : Py)$에 대하여, $H_{\alpha\beta}(\mathsf{idtoiso}(p))$와 $H_{\beta\alpha}(\mathsf{idtoiso}(p)^{-1})$가 모두 성립할 때 그리고 오직 그때에만 $p_*(\alpha) = \beta$가 성립함을 보이면 충분합니다.

"오직 그때에만" 방향은 범주 $\mathsf{Str}_{(P,H)}(X)$에 대한 함수 $\mathsf{idtoiso}$가 존재한다는 사실에 불과합니다. "이면" 방향의 경우, p에 대한 귀납법으로 $y \equiv x$이고 $p \equiv \mathsf{refl}_x$라고 가정할 수 있습니다. 그런데 이 경우 $\mathsf{idtoiso}(p) \equiv 1_x$이므로 $\mathsf{idtoiso}(p)^{-1} = 1_x$입니다. 따라서 $\alpha \leq_x \beta$이고 $\beta \leq_x \alpha$이며, (P, H)가 표준 구조 개념이므로 이로부터 $\alpha = \beta$가 따라 나옵니다. □

한 예로, 이 방법론을 사용하면 정리 9.2.5의 증명을 다른 방식으로 표현할 수 있습니다.

예 9.8.3. A를 준범주, B를 범주라고 합시다. 대상이 함수 $A_0 \to B_0$이고, $F_0 : A_0 \to B_0$에서 $G_0 : A_0 \to B_0$로의 사상들의 집합이 $\prod_{(a:A_0)} \hom_B(F_0a, G_0a)$인 준범주 B^{A_0}가 존재합니다. 합성과 항등 사상은 B의 것들로부터 직접 물려받습니다. $\gamma : \hom_{B^{A_0}}(F_0, G_0)$가 동형사상인 것은 정확히 각 성분 γ_a가 동형사상일 때임을 쉽게 보일 수 있으며, 따라서 $(F_0 \cong G_0) \simeq \prod_{(a:A_0)}(F_0a \cong G_0a)$를 얻습니다. 또한 B^{A_0}의 사상 $\mathsf{idtoiso} : (F_0 = G_0) \to (F_0 \cong G_0)$는 다음 합성과 같습니다.

$$(F_0 = G_0) \longrightarrow \prod_{a:A_0} (F_0a = G_0a) \longrightarrow \prod_{a:A_0} (F_0a \cong G_0a) \longrightarrow (F_0 \cong G_0)$$

여기서 첫 번째 사상은 함수 외연성에 의해 동치이고, 두 번째 사상은 (B가 범주이므로) 동치들의 의존 곱이기 때문에 동치이며, 세 번째 사상은 위에서 언급한 바에 의해 동치입니다. 따라서 B^{A_0}는 범주입니다.

이제 B^{A_0} 위의 구조 개념을 정의하는데, 여기서 $P(F_0)$는 F_0를 함자로 확장하는(즉, 합성과 항등 사상을 보존하는) 연산 $F : \prod_{(a,a':A_0)} \hom_A(a, a') \to \hom_B(F_0a, F_0a')$들의 타입입니다. 각 $\hom_B(-,-)$가 집합이므로 이것도 집합입니다. 그러한 F와 G가 주어졌을 때, $\gamma : \hom_{B^{A_0}}(F_0, G_0)$가 자연 변환을 이루면 이를 준동형사상이라고 정의합니다. 정의 9.2.3에서 우리는 이것이 구조 개념임을 사실상 확인했습니다. 또한 F와 F'이 모두 F_0 위의 구조이고 항등 사상이 F에서 F'으로의 자연 변환이라면, 임의의 $f : \hom_A(a, a')$에 대해 $F'f = F'f \circ 1_{F_0a} = 1_{F_0a} \circ Ff = Ff$를 얻습니다. 함수 외연성을 적용하면 $F = F'$이라고 결론짓게 됩니다. 따라서 우리는 표준적인 구조 개념을 가지며, 그러므로 정리 9.8.2에 의해 준범주 B^A는 범주입니다.

또 다른 예로, 1차 시그니처에 대한 구조들의 범주를 살펴보겠습니다. **1차 시그니처** Ω를 함수 기호 $\omega : \Omega_0$들의 집합 Ω_0와 관계 기호 $\omega : \Omega_1$들의 집합 Ω_1로 이루어진 것으로 정의하며, 각 기호는 집합인 항수 $|\omega|$를 가집니다. **Ω-구조** a는 집합 $|a|$와 함께, 각 함수 기호 ω에 $|a|$ 위의 $|\omega|$항 함수 $\omega^a : |a|^{|\omega|} \to |a|$를 대응시키는 할당, 그리고 각 관계 기호에 $|a|$ 위의 $|\omega|$항 관계 ω^a를 대응시키는 할당으로 이루어집니다. 이 관계 ω^a는 각 $x : |a|^{|\omega|}$에 단순 명제 $\omega^a x$를 대응시킵니다. 또한 Ω-구조 a, b가 주어졌을 때, 함수 $f : |a| \to |b|$가 구조를 보존하면 f를 **준동형사상** $a \to b$ 라고 합니다. 즉, 시그니처의 각 기호 ω와 각 $x : |a|^{|\omega|}$에 대하여 다음이 성립하는 경우입니다.

(i) $\omega : \Omega_0$이면 $f(\omega^a x) = \omega^b(f \circ x)$이고,
(ii) $\omega : \Omega_1$이면 $\omega^a x \to \omega^b(f \circ x)$입니다.

각 $x : |a|^{|\omega|}$는 함수 $x : |\omega| \to |a|$이므로 $f \circ x : b^\omega$ 임에 유의하십시오.

이제 (유니밸런트) 유니버스 $\mathcal{U}$와 $\mathcal{U}$-작은 시그니처 Ω가 주어졌다고 가정합니다. 즉, $|\Omega|$는 $\mathcal{U}$-작은 집합이고, 각 $\omega : |\Omega|$에 대해 집합 $|\omega|$는 $\mathcal{U}$-작습니다. 그러면 $\mathcal{U}$-작은 집합들의 범주 $\mathcal{S}et_\mathcal{U}$를 얻습니다. 우리는 $\mathcal{S}et_\mathcal{U}$ 위의 $\mathcal{U}$-작은 Ω-구조들의 준범주를 정의하고, 정리 9.8.2를 사용하여 그것이 범주임을 보이고자 합니다.

1차 시그니처 Ω를 사용하여 $\mathcal{S}et_\mathcal{U}$ 위의 표준 구조 개념 (P, H)를 얻습니다.

정의 9.8.4.

(i) 각 $\mathcal{U}$-작은 집합 x에 대하여 다음과 같이 정의합니다.

$$Px :\equiv P_0 x \times P_1 x.$$

여기서

$$P_0 x :\equiv \prod_{\omega:\Omega_0} x^{|\omega|} \to x, \text{ and}$$
$$P_1 x :\equiv \prod_{\omega:\Omega_1} x^{|\omega|} \to \mathsf{Prop}_\mathcal{U},$$

(ii) $\mathcal{U}$-작은 집합 x, y와 $\alpha : P^\omega x,\ \beta : P^\omega y,\ f : x \to y$에 대하여 다음과 같이 정의합니다.

$$H_{\alpha\beta}(f) :\equiv H_{0,\alpha\beta}(f) \wedge H_{1,\alpha\beta}(f).$$

여기서

$$H_{0,\alpha\beta}(f) :\equiv \forall(\omega : \Omega_0).\forall(u : x^{|\omega|}).f(\alpha u) = \beta(f \circ u), \text{ and}$$
$$H_{1,\alpha\beta}(f) :\equiv \forall(\omega : \Omega_1).\forall(u : x^{|\omega|}).\alpha u \to \beta(f \circ u).$$

이제 (P, H)가 $\mathcal{S}et_\mathcal{U}$ 위의 표준적인 구조 개념임을 확인하는 것은 일상적인 작업이며, 따라서 정리 9.8.2를 사용하여 준범주 $Str_{(P,H)}(\mathcal{S}et_\mathcal{U})$가 범주임을 얻을 수 있습니다. 남은 것은 이것이 $\mathcal{S}et_\mathcal{U}$ 위의 $\mathcal{U}$-작은 Ω-구조들의 준범주와 본질적으로 같다는 것을 관찰하는 것뿐입니다.

9.9 Rezk 완비화

이 절에서는 준범주를 범주로 대체하는 보편적인 방법을 제시하겠습니다. 사실 두 가지를 제시하겠습니다. 둘 다 "범주는 약한 동치를 동치로 본다"는 사실에 의존합니다.

이를 증명하기 위해, 완전히 표준적인 범주론에 속하는 몇 가지 보조정리로 시작하되, $\|-\|_{-1}$에 대한 제거자를 올바르게 사용하고 있음을 확실히 하도록 신중하게 서술합니다. 선택 공리를 피하고자 한다면 고전 범주론에서도 마찬가지로 신중해야 합니다. 함수를 정의하려 할 때마다 그 값을 어떤 식으로든 유일하게 특징지어야 하기 때문입니다.

보조정리 9.9.1. A, B, C가 준범주이고 $H : A \to B$가 본질적으로 전사인 함자이면, $(- \circ H) : C^B \to C^A$는 충실합니다.

증명. $F, G : B \to C$이고 $\gamma, \delta : F \to G$가 $\gamma H = \delta H$를 만족한다고 합시다. 우리는 $\gamma = \delta$임을 보여야 합니다. 그러므로 $b : B$라고 합시다. 우리는 $\gamma_b = \delta_b$임을 보이고자 합니다. 이것은 단순 명제이므로, H가 본질적으로 전사라는 사실로부터 $a : A$와 동형사상 $f : Ha \cong b$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그런데 이제 다음을 얻습니다.

$$\gamma_b = G(f) \circ \gamma_{Ha} \circ F(f^{-1}) = G(f) \circ \delta_{Ha} \circ F(f^{-1}) = \delta_b. \qquad \square$$

보조정리 9.9.2. A, B, C가 준범주이고 $H : A \to B$가 본질적으로 전사이며 충만하면, $(- \circ H) : C^B \to C^A$는 충실충만합니다.

증명. 충만성을 보이는 일만 남았습니다. 따라서 $F, G : B \to C$이고 $\gamma : FH \to GH$라고 합시다. 우리는 임의의 $b : B$에 대하여 다음 타입

$$\sum_{(g : \hom_C(Fb, Gb))} \prod_{(a : A)} \prod_{(f : Ha \cong b)} (\gamma_a = Gf^{-1} \circ g \circ Ff) \tag{9.9.3}$$

축약 가능합니다. 축약 가능성은 단순 성질이고 H는 본질적으로 전사이므로, $a_0 : A$와 $h : Ha_0 \cong b$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다.

이제 $g :\equiv Gh \circ \gamma_{a_0} \circ Fh^{-1}$로 둡시다. 그러면 다른 임의의 $a : A$와 $f : Ha \cong b$가 주어졌을 때 $\gamma_a = Gf^{-1} \circ g \circ Ff$임을 보여야 합니다. H가 충만하므로 $Hk = h^{-1} \circ f$를 만족하는 사상 $k : \hom_A(a, a_0)$가 단지 존재합니다. 또한 우리의 목표는 단순 명제이므로, 그러한 k가 하나 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \gamma_a &= GHk^{-1} \circ \gamma_{a_0} \circ FHk \\ &= Gf^{-1} \circ Gh \circ \gamma_{a_0} \circ Fh^{-1} \circ Ff \\ &= Gf^{-1} \circ g \circ Ff. \end{aligned}$$

따라서 (9.9.3)에는 원소가 있습니다. 이제 이것이 단순 명제임을 보이는 일만 남았습니다. $g, g' : \hom_C(Fb, Gb)$가 모든 $a : A$와 $f : Ha \cong b$에 대해 $(\gamma_a = Gf^{-1} \circ g \circ Ff)$와 $(\gamma_a = Gf^{-1} \circ g' \circ Ff)$를 모두 만족한다고 합시다. 의존 곱 타입은 단순 명제이므로 $g = g'$임만 증명하면 됩니다. 그런데 이것은 단순 명제이므로 $a_0 : A$와 $h : Ha_0 \cong b$를 가정할 수 있으며, 이 경우 다음이 성립합니다.

$$g = Gh \circ \gamma_{a_0} \circ Fh^{-1} = g'.$$

이로써 모든 $b : B$에 대해 (9.9.3)가 축약 가능함이 증명됩니다. 이제 δ_b를 그 b에 대한 (9.9.3)의 유일한 g로 잡아 $\delta : F \to G$를 정의합니다. 이것이 자연적임을 보기 위해 $f : \hom_B(b, b')$가 주어졌다고 합시다. 우리는 $Gf \circ \delta_b = \delta_{b'} \circ Ff$임을 보여야 합니다. 앞에서와 같이 $a : A$와 $h : Ha \cong b$를, 그리고 마찬가지로 $a' : A$와 $h' : Ha' \cong b'$를 가정할 수 있습니다. H는 본질적으로 전사일 뿐만 아니라 충만하므로, $Hk = {h'}^{-1} \circ f \circ h$인 $k : \hom_A(a, a')$도 가정할 수 있습니다.

γ가 자연적이므로 $GHk \circ \gamma_a = \gamma_{a'} \circ FHk$입니다. δ의 정의를 사용하면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} Gf \circ \delta_b &= Gf \circ Gh \circ \gamma_a \circ Fh^{-1} \\ &= Gh' \circ GHk \circ \gamma_a \circ Fh^{-1} \\ &= Gh' \circ \gamma_{a'} \circ FHk \circ Fh^{-1} \\ &= Gh' \circ \gamma_{a'} \circ {Fh'}^{-1} \circ Ff \\ &= \delta_{b'} \circ Ff. \end{aligned}$$

따라서 δ는 자연적입니다. 마지막으로, 임의의 $a : A$에 대해 δ_{Ha}의 정의를 a와 1_a에 적용하면 $\gamma_a = \delta_{Ha}$를 얻습니다. 그러므로 $\delta \circ H = \gamma$입니다. □

정리의 나머지 부분도 거의 똑같은 흐름을 따르되, 결정적인 한 단계에서 C가 범주라는 사실이 사용되며, 강조를 위해 아래에서 그 단계를 기울임꼴로 표시했습니다. 이 단계는 선택을 사용하지 않고 대상으로 가는 함수를 정의하려는 지점이므로, 대상이 "유일하게 지정된다"는 것이 무엇을 의미하는지 주의해야 합니다. 고전적 범주론에서는 이 대상이 유일한 동형사상을 제외하고 지정된다고만 말할 수 있지만, 집합론적 기초에서는 이 정도의 유일성만으로는 AC 에 호소하지 않고 함수를 얻기에 충분하지 않습니다. 그러나 유니벌런트 기초에서는 C가 범주라면 동형이 곧 같음이므로, 적절한 종류의 유일성(즉, 축약 가능한 공간 안에 놓여 있음)을 얻습니다.

정리 9.9.4. *A, B가 준범주이고 C가 범주이며 $H : A \to B$가 약한 동치이면, $(- \circ H) : C^B \to C^A$는 동형사상입니다.*

증명. 정리 9.2.5에 의해 C^B와 C^A는 범주입니다. 따라서 보조정리 9.4.14에 의해 $(- \circ H)$가 동치임을 보이면 충분합니다. 그런데 앞의 두 보조정리로부터 그것이 충실충만함을 알고 있으므로, 보조정리 9.4.7에 의해 그것이 본질적으로 전사임을 보이면 충분합니다. 따라서 $F : A \to C$라고 가정합시다. 우리는 $GH \cong F$인 $G : B \to C$가 단순히 존재하기를 원합니다.

각 $b : B$에 대해, X_b를 원소가 다음으로 이루어진 타입이라고 합시다.

(i) 원소 $c : C$, 그리고

(ii) 각 $a : A$와 $h : Ha \cong b$에 대한 동형사상 $k_{a,h} : Fa \cong c$로서, 다음을 만족하는 것

(iii) 항목 (ii)에서와 같은 각 (a, h)와 (a', h'), 그리고 $h' \circ Hf = h$를 만족하는 각 $f : \hom_A(a, a')$에 대해 $k_{a',h'} \circ Ff = k_{a,h}$가 성립합니다.

우리는 임의의 $b : B$에 대해 타입 X_b가 축약 가능하다고 주장합니다. 이것은 단순 명제이므로 $a_0 : A$와 $h_0 : Ha_0 \cong b$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. $c^0 :\equiv Fa_0$로 둡시다. 다음으로, $a : A$와 $h : Ha \cong b$가 주어지면, H가 충실충만하므로 $Hg_{a,h} = {h_0}^{-1} \circ h$를 만족하는 유일한 동형사상 $g_{a,h} : a \to a_0$가 존재합니다. $k^0_{a,h} :\equiv Fg_{a,h}$로 정의합니다. 마지막으로, $h' \circ Hf = h$이면 ${h_0}^{-1} \circ h' \circ Hf = {h_0}^{-1} \circ h$이므로 $g_{a',h'} \circ f = g_{a,h}$이고, 따라서 $k^0_{a',h'} \circ Ff = k^0_{a,h}$입니다. 그러므로 X_b에는 원소가 있습니다.

이제 또 다른 $(c^1, k^1) : X_b$가 주어졌다고 합시다. 그러면 $k^1_{a_0,h_0} : c^0 \equiv Fa_0 \cong c^1$입니다. C가 범주이므로 $\mathsf{idtoiso}(p) = k^1_{a_0,h_0}$를 만족하는 $p : c^0 = c^1$이 존재합니다. 그리고 임의의 $a : A$와 $h : Ha \cong b$에 대해, $f :\equiv g_{a,h}$로 두고 (c^1, k^1)에 대한 (iii)을 적용하면 다음이 성립합니다.

$$k^1_{a,h} = k^1_{a_0,h_0} \circ k^0_{a,h} = p_*(k^0_{a,h})$$

이로써 같음 $(c^0, k^0) = (c^1, k^1)$에 필요한 데이터가 주어지며, X_b가 축약 가능하다는 증명이 완성됩니다.

이제 각 b에 대해 X_b가 축약 가능하므로 타입 $\prod_{(b:B)} X_b$도 축약 가능합니다. 특히 이 타입에는 원소가 있으므로, 각 $b : B$에 c와 k를 대응시키는 함수를 얻습니다. $G_0(b)$를 이 c로 정의합시다. 이로써 함수 $G_0 : B_0 \to C_0$를 얻습니다.

다음으로 사상에 대한 G의 작용을 정의해야 합니다. 각 $b, b' : B$와 $f : \hom_B(b, b')$에 대해, Y_f를 원소가 다음으로 이루어진 타입이라고 합시다.

(iv) 다음을 만족하는 사상 $g : \hom_C(Gb, Gb')$

(v) 각 $a : A$와 $h : Ha \cong b$, 각 $a' : A$와 $h' : Ha' \cong b'$, 그리고 임의의 $\ell : \hom_A(a, a')$에 대해 다음이 성립합니다.
$$(h' \circ H\ell = f \circ h) \to (k_{a',h'} \circ F\ell = g \circ k_{a,h}).$$

우리는 임의의 b, b'와 f에 대해 타입 Y_f가 축약 가능하다고 주장합니다. 이것은 단순 명제이므로 $a_0 : A$와 $h_0 : Ha_0 \cong b$, 그리고 $a'_0 : A$와 $h'_0 : Ha'_0 \cong b'$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그러면 H가 충실충만하므로 $h'_0 \circ H\ell_0 = f \circ h_0$를 만족하는 유일한 $\ell_0 : \hom_A(a_0, a'_0)$가 존재합니다. $g_0 :\equiv k_{a'_0,h'_0} \circ F\ell_0 \circ (k_{a_0,h_0})^{-1}$로 정의합니다.

이제 $(h' \circ H\ell = f \circ h)$를 만족하는 임의의 a, h, a', h'와 ℓ에 대해 $h^{-1} \circ h_0 : Ha_0 \cong Ha$이므로, $Hm = h^{-1} \circ h_0$를 만족하는 유일한 $m : a_0 \cong a$가 존재하고, 따라서 $h \circ Hm = h_0$입니다. 마찬가지로 $h' \circ Hm' = h'_0$를 만족하는 유일한 $m' : a'_0 \cong a'$가 존재합니다. 이제 (iii)에 의해 $k_{a,h} \circ Fm = k_{a_0,h_0}$이고 $k_{a',h'} \circ Fm' = k_{a'_0,h'_0}$입니다. 또한 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} Hm' \circ H\ell_0 &= (h')^{-1} \circ h'_0 \circ H\ell_0 \\ &= (h')^{-1} \circ f \circ h_0 \\ &= (h')^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1} \circ h_0 \\ &= H\ell \circ Hm \end{aligned}$$

따라서 H가 충실충만하므로 $m' \circ \ell_0 = \ell \circ m$입니다. 마지막으로 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} g_0 \circ k_{a,h} &= k_{a'_0,h'_0} \circ F\ell_0 \circ (k_{a_0,h_0})^{-1} \circ k_{a,h} \\ &= k_{a'_0,h'_0} \circ F\ell_0 \circ Fm^{-1} \\ &= k_{a'_0,h'_0} \circ (Fm')^{-1} \circ F\ell \\ &= k_{a',h'} \circ F\ell. \end{aligned}$$

이로써 Y_f에 원소가 있다는 증명이 완료됩니다. 그것이 축약 가능함을 보이기 위해서는, hom-집합이 집합이므로, (v)를 만족하는 또 다른 $g_1 : \hom_C(Gb, Gb')$를 잡고 $g_0 = g_1$임을 보이면 충분

합니다. 그런데 우리에게는 여전히 앞서 지정한 $a_0, h_0, a_0', h_0', \ell_0$가 있으며, (v)는 g_0와 g_1이 모두 $k_{a_0',h_0'} \circ F\ell_0 \circ (k_{a_0,h_0})^{-1}$와 같아야 함을 함의합니다.

이로써 각 $b, b' : B$와 $f : \hom_B(b, b')$에 대해 Y_f가 축약 가능하다는 증명이 완성됩니다. 그러므로 그러한 각 f에 그 유일한 원소를 대응시키는 함수가 존재합니다. 이 함수를 $G_{b,b'} : \hom_B(b, b') \to \hom_C(Gb, Gb')$로 표기합니다. G가 함자라는 증명은 간단합니다. 각 경우에 a, h를 선택하고 (v)를 적용하면 됩니다.

마지막으로, 임의의 $a_0 : A$에 대해 $c :\equiv Fa_0$와 $k_{a,h} :\equiv Fg$로 정의하면 X_{Ha_0}의 원소 하나를 얻습니다. 여기서 $g : \hom_A(a, a_0)$는 $Hg = h$를 만족하는 유일한 동형사상입니다. 따라서 이 원소는 지정된 원소와 같고, 그러므로 $GHa = Fa$입니다. 마찬가지로 $f : \hom_A(a_0, a_0')$에 대해 이 등식들을 따라 수송하면 Y_{Hf}의 원소를 정의할 수 있습니다. 따라서 이 원소도 지정된 원소와 같아야 합니다. 그러므로 $GH = F$이고, 원하던 대로 $GH \cong F$입니다. □

그러므로 준범주 A가 범주로의 약한 동치 함자 $A \to \widehat{A}$를 허용한다면, 그것이 바로 범주들로의 A의 "반영"입니다. 즉, A에서 범주로 가는 임의의 함자는 $\widehat{A}$를 통해 본질적으로 유일하게 분해됩니다. 이제 그러한 약한 동치의 두 가지 구성을 제시하겠습니다.

정리 9.9.5. 임의의 준범주 A에 대하여, 범주 $\widehat{A}$와 약한 동치 $A \to \widehat{A}$가 존재합니다.

첫 번째 증명. $\widehat{A}_0 :\equiv \{ F : \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}} \mid \exists(a : A).\, (\mathbf{y}a \cong F) \}$라 하고, hom-집합은 $\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$로부터 물려받는다고 합시다. 그러면 포함 $\widehat{A} \to \mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$는 충실충만하며 대상에 대해 매장입니다. $\mathcal{S}et^{A^{\mathrm{op}}}$는 범주이므로($\mathcal{S}et$가 유니밸런스에 의해 범주이므로 정리 9.2.5에 의해), $\widehat{A}$ 또한 범주입니다.

$A \to \widehat{A}$를 요네다 매장이라고 합시다. 이 함자는 따름정리 9.5.6에 의해 충실충만하고, $\widehat{A}_0$의 정의에 의해 본질적으로 전사입니다. 따라서 이는 약한 동치입니다. □

이 증명은 매우 매끄럽지만, 유니버스 레벨을 증가시킨다는 단점이 있습니다. A가 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의 범주라면, 이 증명에서 $\mathcal{S}et$는 적어도 $\mathcal{S}et_{\mathcal{U}}$만큼 커야 합니다. 그러면 $\mathcal{S}et_{\mathcal{U}}$와 $(\mathcal{S}et_{\mathcal{U}})^{A^{\mathrm{op}}}$는 그 자체로 $\mathcal{U}$ 안의 범주가 아니라 더 높은 유니버스 안의 범주일 뿐이며, a priori $\widehat{A}$에 대해서도 마찬가지입니다. 이를 해결할 수 있는 크기 재조정 공리를 상상해 볼 수도 있지만, 고차 귀납적 타입을 사용하여 직접적인 구성을 제시하는 것도 가능합니다.

두 번째 증명. 다음 생성자들을 갖는 고차 귀납적 타입 $\widehat{A}_0$를 정의합니다.

- 함수 $i : A_0 \to \widehat{A}_0$.
- 각 $a, b : A$와 $e : a \cong b$에 대해 등식 $je : ia = ib$.
- 각 $a : A$에 대해 등식 $j(1_a) = \mathsf{refl}_{ia}$.
- 각 $(a, b, c : A)$, $(f : a \cong b)$, $(g : b \cong c)$에 대해 등식 $j(g \circ f) = j(f) \cdot j(g)$.
- 1-절단: 모든 $x, y : \widehat{A}_0$와 $p, q : x = y$, $r, s : p = q$에 대해 등식 $r = s$.

임의의 $a, b : A$와 $p : a = b$에 대해 $j(\mathsf{idtoiso}(p)) = i(p)$가 성립한다는 점에 유의하십시오. 이는 p에 대한 경로 귀납법과 세 번째 생성자로부터 따라 나옵니다.

타입 $\widehat{A}_0$는 $\widehat{A}$의 대상들의 타입이 될 것입니다. 이제 나머지 구조를 모두 구성합니다. (다음 증명은 컴퓨터 증명 보조기의 도움을 크게 받을 수 있는 종류의 증명입니다. 이 증명은 고려해야 할 짧은 경우가 많아 폭은 넓고 깊이는 얕으며, 작업의 상당 부분은 확인해야 할 내용을 적어 내려가는 일입니다.)

1단계: $\widehat{A}_0$에 대한 이중 귀납법으로 족 $\hom_{\widehat{A}} : \widehat{A}_0 \to \widehat{A}_0 \to \mathsf{Set}$을 정의합니다. Set 은 1-타입이므로 1-절단 생성자는 무시할 수 있습니다. x와 y가 ia와 ib 꼴일 때는 $\hom_{\widehat{A}}(ia, ib) :\equiv \hom_A(a, b)$로 둡니다. 이제 가능한 나머지 생성자 쌍을 모두 고려하면 됩니다.

먼저 $x = ia$를 고정해 둡시다. y가 어떤 $e : b \cong b'$에 대해 동일성 $je : ib = ib'$를 따라 변하면 동일성 $\hom_A(a, b) = \hom_A(a, b')$가 필요합니다. 유니밸런스에 의해 동치 $\hom_A(a, b) \simeq \hom_A(a, b')$를 제시하는 것으로 충분합니다. 이 동치로 함수 $(e \circ -) : \hom_A(a, b) \to \hom_A(a, b')$를 택합니다. 이것이 동치임을 보이기 위해 그 역을 $(e^{-1} \circ -)$로 제시합니다. 역임을 보이는 증거는 A에서 e^{-1}가 e의 역이라는 사실로부터 얻습니다.

y가 동일성 $j(1_b) = \mathsf{refl}_{ib}$를 따라 변할 때, 우리는 동일성 $(1_b \circ -) = \mathsf{refl}_{\hom_A(a,b)}$를 필요로 합니다. 이는 준범주의 항등 공리 $1_b \circ g = g$로부터 따라 나옵니다. 마찬가지로, y가 동일성 $j(g \circ f) = j(f) \cdot j(g)$를 따라 변할 때, 우리는 동일성 $((g \circ f) \circ -) = (g \circ (f \circ -))$를 필요로 하며, 이는 결합 법칙으로부터 따라 나옵니다.

이제 x에 대한 다른 생성자들을 고려합니다. x가 어떤 $e : a \cong a'$에 대해 동일성 $j(e) : ia = ia'$를 따라 변한다고 합시다. 이번에도 y에 대한 모든 생성자를 다루어야 합니다. y가 ib이면 동일성 $\hom_A(a, b) = \hom_A(a', b)$가 필요합니다. 유니밸런스에 의해 이 동일성은 동치로부터 얻을 수 있습니다. 이를 위해 역이 $(- \circ e)$인 $(- \circ e^{-1})$를 사용할 수 있습니다.

x가 여전히 $j(e)$를 따라 변하는 상태에서, 이제 y도 어떤 $f : b \cong b'$에 대해 $j(f)$를 따라 변한다고 가정합시다. 그러면 이어붙인 다음 두 동일성이

$$\hom_A(a, b) = \hom_A(a', b) = \hom_A(a', b') \qquad \text{그리고}$$
$$\hom_A(a, b) = \hom_A(a, b') = \hom_A(a', b')$$

서로 같다는 것을 알아야 합니다. 이는 결합법칙 $(f \circ -) \circ e^{-1} = f \circ (- \circ e^{-1})$로부터 따라 나옵니다. y에 대한 나머지 두 생성자는 집합 안의 2중 등식이므로 자명합니다.

x의 다음 두 생성자에 대해서도 y에 대한 첫 번째 생성자를 제외한 나머지는 모두 마찬가지로 자명합니다. x가 $j(1_a) = \mathsf{refl}_{ia}$를 따라 변하고 y가 ib일 때는 항등 공리를 다시 사용합니다. 마찬가지로 x가 $j(g \circ f) = j(f) \cdot j(g)$를 따라 변할 때는 결합법칙을 다시 사용합니다. 이로써 $\hom_{\widehat{A}} : \widehat{A}_0 \to \widehat{A}_0 \to \mathsf{Set}$의 구성이 완료됩니다.

2단계: $\widehat{A}$ 위의 준범주 구조를 제시하며, 이는 항상 $\widehat{A}_0$에 대한 귀납으로 이루어집니다. 이제 우리는 집합($\widehat{A}$의 hom-집합)으로 제거하고 있으므로, 처음 두 생성자를 제외한 나머지는 모두 자명하게 처리됩니다.

항등사상의 경우, x가 ia이면 $\hom_{\widehat{A}}(x, x) \equiv \hom_A(a, a)$이므로 $1_x :\equiv 1_{ia}$로 정의합니다. $e : a \cong a'$에 대하여 x가 je를 따라 변하면, $\mathsf{transport}^{x \mapsto \hom_{\widehat{A}}(x,x)}(je, 1_{ia}) = 1_{ia'}$임을 보여야 합니다. 그런데 $\hom_{\widehat{A}}$의 정의에 의해 je를 따라 수송하는 것은 e 및 e^{-1}와 합성하는 것으로 주어지며, $e \circ 1_{ia} \circ e^{-1} = 1_{ia'}$가 성립합니다.

합성의 경우, x, y, z가 각각 ia, ib, ic이면 $\hom_{\widehat{A}}$는 $\hom_A$로 환원되므로, $\widehat{A}$에서의 합성을 A에서의 합성으로 정의할 수 있습니다. 그리고 x, y, 또는 z가 je를 따라 변할 때에는 다음 등식들을 확인합니다:

$$e \circ (g \circ f) = (e \circ g) \circ f,$$
$$g \circ f = (g \circ e^{-1}) \circ (e \circ f),$$
$$(g \circ f) \circ e^{-1} = g \circ (f \circ e^{-1}).$$

마지막으로, 결합 법칙 공리와 단위 법칙 공리는 단순 명제이므로 첫 번째 생성자를 제외한 모든 생성자는 자명합니다. 그런데 첫 번째 생성자의 경우에는 A에 대응하는 공리들이 있습니다.

3단계: $\widehat{A}$가 범주임을 보입니다. 즉, 모든 $x, y : \widehat{A}$에 대하여 함수 $\mathsf{idtoiso} : (x = y) \to (x \cong y)$가 동치임을 보여야 합니다. 먼저 모든 $x, y : \widehat{A}$에 대하여 함수 $k_{x,y} : (x \cong y) \to (x = y)$를 귀납법으로 정의합니다. 앞에서와 마찬가지로 목표가 집합이므로 처음 두 생성자만 처리하면 충분합니다.

x와 y가 각각 ia와 ib이면 $\hom_{\widehat{A}}(ia, ib) \equiv \hom_A(a, b)$이고 합성과 항등사상도 그대로 물려받으므로, $(ia \cong ib)$는 $(a \cong b)$와 동치입니다. 그런데 이제 생성자 $j : (a \cong b) \to (ia = ib)$가 있습니다.

다음으로, 어떤 $e : b \cong b'$에 대하여 y가 $j(e)$를 따라 변하면, $f : a \cong b$에 대하여 $j(j(e)_*(f)) = j(f) \cdot j(e)$임을 보여야 합니다. 그런데 등식에 대한 $\hom_{\widehat{A}}$의 정의에 의해 $j(e)$를 따라 수송하는 것은 e를 뒤에 합성하는 것과 동치이므로, 이 등식은 $\widehat{A}_0$의 마지막 생성자로부터 따라 나옵니다. $e : a \cong a'$에 대하여 x가 $j(e)$를 따라 변하는 나머지 경우도 비슷합니다. 이로써 $k : \prod_{(x,y:\widehat{A}_0)}(x \cong y) \to (x = y)$의 정의가 완성됩니다.

이제 보여야 할 것 중 하나는 $p : x = y$이면 $k(\mathsf{idtoiso}(p)) = p$라는 것입니다. p에 대한 귀납법에 의해 p가 refl_x라고 가정할 수 있고, 따라서 $\mathsf{idtoiso}(p) \equiv 1_x$입니다. 이제 $x : \widehat{A}_0$에 대한 귀납법으로 논증하는데, 목표가 단순 명제이므로($\widehat{A}_0$가 1-타입이기 때문입니다) 첫 번째 생성자를 제외한 모든 생성자는 자명합니다. 그런데 x가 ia이면 $k(1_{ia}) \equiv j(1_a)$이고, 이는 $\widehat{A}_0$의 세 번째 생성자에 의해 refl_{ia}와 같습니다.

$\widehat{A}$가 범주라는 증명을 완성하려면, $f : x \cong y$이면 $\mathsf{idtoiso}(k(f)) = f$임을 보여야 합니다. 귀납법에 의해 x와 y가 각각 ia와 ib라고 가정할 수 있으며, 이 경우 f는 동형사상 $g : a \cong b$로부터 나온 것이어야 하고 $k(f) \equiv j(g)$입니다. 그런데 임의의 p에 대하여 $\mathsf{idtoiso}(p) = p_*(1)$이므로, 특히 $\mathsf{idtoiso}(j(g)) = j(g)_*(1_{ia})$입니다. 그리고 등식에 대한 $\hom_{\widehat{A}}$의 정의에 의해 이것은 1_{ia}를 동치 g와 합성하여 주어지므로 g와 같습니다.

이 단계가 §§2.12 및 2.13 및 제8장에서 사용한 인코드-디코드 방법과 비슷하다는 점에 주목하십시오. 여기서도 코드들의 족(여기서는 $(x, y) \mapsto (x \cong y)$)을 재귀적으로 정의하고 $\widehat{A}_0$와 경로에 대한 귀납법으로 인코딩 함수와 디코딩 함수를 정의함으로써 고차 귀납적 타입(여기서는 $\widehat{A}_0$)의 동일성 타입을 특징짓습니다.

4단계: 약한 동치 $I : A \to \widehat{A}$를 정의합니다. $I_0 :\equiv i : A_0 \to \widehat{A}_0$로 두면, $\hom_{\widehat{A}}$의 구성에 의해 함자 $I : A \to \widehat{A}$를 이루는 함수 $I_{a,b} : \hom_A(a, b) \to \hom_{\widehat{A}}(Ia, Ib)$를 얻습니다. 이 함자는 구성에 의해 충실충만하므로, 본질적으로 전사임을 보이는 일만 남습니다. 즉, 모든 $x : \widehat{A}$에 대해 $Ia \cong x$인 $a : A$가 단순히 존재하기를 원합니다. 언제나처럼 x에 대한 귀납으로 논증하며, 목표가 단순 명제이므로 첫 번째 생성자를 제외한 나머지는 모두 자명합니다. 그런데 x가 ia라면, 당연히 $a : A$와 $Ia \equiv ia$를 가지므로 $Ia \cong ia$입니다. (I가 분할 본질적으로 전사임을 증명하려 했다면 우리는 막혔을 것이라는 점에 유의하십시오. 왜냐하면 우리는 A_0에서의 상등에 대해 아무것도 알지 못하므로 그 이후의 생성자들을 처리할 방법이 없기 때문입니다.) □

구성 $A \mapsto \widehat{A}$를 Rezk **완비화**라고 부르지만, (고차 토포스 의미론에서 비롯된) 이를 **스택 완비화**라고 불러야 한다는 논거도 있습니다.

실제로 나타나는 대부분의 준범주는 범주라는 것을 보았습니다. 이들은 유니벨런스 공리에 의해 범주인 $\mathcal{S}et$ 로부터 구성되기 때문입니다. 그러나 범주를 얻기 위해 Rezk 완비화가 필요한 경우가 몇 가지 있습니다.

예 9.9.6. 예 9.1.17에서 임의의 타입 X에 대하여 X를 대상들의 타입으로 가지고 $\hom(x, y) :\equiv \|x = y\|_0$인 준그루포이드가 존재한다는 것을 상기하십시오. 이것의 Rezk 완비화는 X의 기본 그루포이드입니다. 그루포이드가 1-타입과 동치라는 것을 상기하면, 이 그루포이드를 $\|X\|_1$와 동일시하는 것은 어렵지 않습니다.

예 9.9.7. 예 9.1.18에서 대상의 타입이 $\mathcal{U}$ 이고 $\hom(X,Y) :\equiv \|X \to Y\|_0$ 인 준범주가 존재한다는 것을 상기하십시오. 이것의 Rezk 완비화를 **타입의 호모토피 범주**라고 부를 수 있습니다. 이것의 대상의 타입은 $\|\mathcal{U}\|_1$ 와 동일시할 수 있습니다(연습문제 9.9 참조).

Rezk 완비화를 이용하면 "범주"의 개념이 "약한 준범주의 동치"의 개념에 의해 결정된다는 것도 보일 수 있습니다. 따라서 후자가 불가피한 한, 전자 또한 불가피합니다.

정리 9.9.8. 준범주 C가 범주일 필요충분조건은 모든 약한 준범주의 동치 $H : A \to B$에 대하여 유도된 함자 $(- \circ H) : C^B \to C^A$가 준범주의 동형사상인 것입니다.

증명. "필요조건" 방향은 정리 9.9.4입니다. 반대 방향으로, H를 $I : A \to \widehat{A}$라 합시다. 그러면 $(- \circ I)_0$가 동치이므로, $RI = 1_A$인 $R : \widehat{A} \to A$가 존재합니다. 따라서 $IRI = I$이고, 다시 $(- \circ I)_0$가 동치이므로 이로부터 $IR = 1_{\widehat{A}}$가 따라 나옵니다. 보조정리 9.4.9(iii)에 의해 I는 준범주의 동형사상입니다. 그런데 $\widehat{A}$가 범주이므로 A도 범주입니다. □

주

물론 범주의 원래 정의는 집합론적 기초 위에서 이루어졌으므로, 범주의 대상들의 모임은 집합(또는 큰 범주의 경우 클래스)을 이루었습니다. 시간이 지나면서 대상의 모든 "범주론적" 성질은 동형사상 아래에서 불변이며, 범주에서 대상의 같음은 대개 그다지 유용한 개념이 아니라는 것이 분명해졌습니다. 여러 저자 [Bla79, Fre76, Mak95, Mak01]는 의존 타입 논리를 사용하면 대상의 같음이라는 개념을 전혀 동원하지 않고도 범주의 정의를 정식화할 수 있으며, 이 논리에서 증명 가능한 명제들이 바로 동형사상 아래에서 불변인 "범주론적" 명제들이라는 것을 발견했습니다.

범주론의 대부분은 대상의 동형사상과 범주의 동치 아래에서 불변인 것으로 보이지만, 몇 가지 흥미로운 예외가 있으며, 이 예외들은 "범주론적"이라는 것이 무엇을 의미하는지에 대한 철학적 논의로 이어졌습니다. 예를 들어 예 9.6.3는 2010년 5월 Peter May가 categories 메일링 리스트에서 제기한 것으로, (집합론에서 통상적으로 정의된) 두 범주가 단지 동치가 아니라 동형이라는 점이 중요한 경우입니다. †-범주의 경우도 동형사상 불변 버전의 범주론을 옹호하는 사람들을 다소 곤혹스럽게 했는데, †-범주의 대상들 사이의 "올바른" 같음 개념은 일반적인 동형사상이 아니라 유니터리 동형사상이기 때문입니다.

정의 9.1.6에서와 같은 "포화" 또는 "유니밸런스" 원리를 만족하는 범주는 Hofmann과 Streicher [HS98]가 처음으로 고려하였습니다. 이후 몇 년 뒤 거의 같은 시기에 Voevodsky, Shulman, 그리고 아마도 다른 사람들이 독립적으로 이 조건을 떠올렸으며, Ahrens와 Kapulkin [AKS13]이 이를 형식화하였습니다. 이 틀은 위의 모든 예를 하나의 통일된 맥락에 놓습니다. 어떤 준범주는 범주이고, 다른 것들은 엄격한 범주이며, 등등입니다. 넓은 부류의 대수적 구조에 대해 (유니밸런스 공리를 가정할 때) "동형사상은 상등을 함의한다"는 일반적인 정리는 Coquand와 Danielsson이 증명하였습니다. §9.8의 구조 동일성 원리의 정식화는 Aczel에 의한 것입니다.

범주론에 관한 철학적 고찰과는 별개로, Rezk [Rez01]는 $(\infty,1)$-범주라는 개념을 정의할 때 대상들의 집합과 그 사이의 사상 공간만을 사용하는 것보다, 대상들 사이의 모든 동치와 호모토피를 포함하는 대상들의 공간을 사용하는 것이 매우 편리하다는 것을 발견했습니다. 이로써 특정한 단체적 공간으로서 $(\infty,1)$-범주를 나타내는, 매우 좋은 성질을 갖는 모형을 얻으며, Rezk는 이를 완비 Segal 공간이라고 불렀습니다. 이 모형의 특히 좋은 측면 중 하나는 보조정리 9.4.14에 해당하는 성질입니다. 즉, 완비 Segal 공간 사이의 사상은 단체적 공간의 수준별 동치일 때, 그리고 그때에만 동치입니다.

Voevodsky의 유니밸런트 기초의 단체 집합 모형에서 해석하면, 우리의 준범주는 Rezk의 "Segal 공간"의 절단된 유사물과 비슷하며, 우리의 범주는 그의 "완비 Segal 공간"에 대응합니다. 반면 엄격한 범주는 "Segal 범주"라 불리는 것(의 약화되고 절단된 버전)에 대응합니다. Segal 범주와 완비 Segal 공간은 $(\infty,1)$-범주의 동치인 모형이라는 것이 알려져 있으므로(예를 들어 [Ber09] 참조), 단체 집합 모형에서 범주와 엄격한 범주는 "동치인" 범주론을 낳습니다. — 물론 우리가 보았듯이 전자는 여전히 많은 장점을 가집니다. 그러나 고차 토포스의 더 일반적인 범주적 의미론에서는, 엄격한 범주는 대응하는 층의 1-토포스 안의 (전통적인 의미의) 내부 범주에 대응하는 반면, 범주는 스택에 대응합니다. 후자는 일반적으로 토포스에 상대적인 "범주"로서 더 적절한 종류입니다.

Rezk의 맥락에서, 우리가 "Rezk 완비화"라고 부른 것은 완비 Segal 공간에 대한 모형 범주에서의 섬유적 대체 에 대응합니다. 이것은 초한 귀납 논증을 사용하여 구성되므로, 고차 귀납적 타입으로서의 우리의 두 번째 구성과 가장 밀접하게 일치합니다. 그러나 호모토피 타입 이론의 고차 토포스 모형에서 Rezk 완비화는 스택 완비화에 대응하며, 이는 초한 귀납 [JT91]으로 구성하거나 요네다 매장 [Bun79]을 사용하여 구성할 수 있습니다.

연습문제

연습문제 9.1. 준범주 A와 $a : A$에 대하여 **슬라이스 준범주** A/a를 정의하십시오. A가 범주이면 A/a도 범주임을 보이십시오.

연습문제 9.2. 임의의 집합 X에 대하여 슬라이스 범주 $\mathcal{S}et/X$가 함자 범주 $\mathcal{S}et^X$와 동치임을 증명하십시오. 여기서 후자의 경우 X를 이산 범주로 간주합니다.

연습문제 9.3. 함자가 범주의 동치일 필요충분조건은 그 함자가 단위와 쌍대단위가 동형사상인 오른쪽 수반함자라는 것임을 증명하십시오.

연습문제 9.4. **준-2-범주**의 개념을 정의하십시오. §9.2에서 정의한 준범주, 함자, 자연 변환이 준-2-범주를 이룸을 보이십시오. 마찬가지로, (보조정리 9.2.9 및 9.2.11에 있는 것과 같은) 등식들을 유사한 정합성 조건을 만족하는 자연 동형사상으로 대체하여 **준-쌍범주**를 정의하십시오. 준-2-범주에서 준-쌍범주로 가는 함수를 정의하고, 이 함수를 hom-준범주가 범주인 것들로 정의역과 공역을 제한하면 동치가 됨을 보이십시오.

연습문제 9.5. 정의 9.1.6의 조건과 유사한 조건을 만족하는 준-2-범주를 2-**범주** 라고 정의하십시오. 범주들의 준-2-범주 $\mathcal{C}at$ 가 2-범주임을 확인하십시오. 이 장의 내용 중 어느 정도를 임의의 2-범주 내부에서 전개할 수 있습니까?

연습문제 9.6. 대상이 1-타입이고, 사상이 함수이며, 2-사상이 호모토피인 2-범주를 정의하십시오. 이 2-범주가 적절한 의미에서 그루포이드(모든 화살표가 동형사상인 범주)들로 생성되는 $\mathcal{C}at$ 의 충만 부분 2-범주와 동치임을 증명하십시오.

연습문제 9.7. 엄격한 범주란 대상들의 타입이 집합인 준범주임을 상기하십시오. 엄격한 범주들의 준-2-범주가 다음 준-2-범주와 동치임을 증명하십시오.

- 그 대상은 다음과 같은 전사가 주어진 범주 A이며, 이 전사는 $p_A : A'_0 \to A_0$이고, 여기서 A'_0는 집합입니다.
- 그 사상은 $p_B \circ F'_0 = F_0 \circ p_A$를 만족하는 함수 $F'_0 : A'_0 \to B'_0$가 주어진 함자 $F : A \to B$입니다.
- 그 2-사상은 단순히 자연 변환입니다.

연습문제 9.8. hom-준범주 위에 †-구조를 갖는 †-범주들의 준-2-범주를 정의하십시오. 두 †-범주가 같을 필요충분조건은 적절한 의미에서 "유니터리 동치"라는 것임을 보이십시오.

연습문제 9.9. 함수 $X \to Y$가 동치일 필요충분조건은 예 9.9.7의 호모토피 범주에서 그 함수의 상이 동형사상이라는 것임을 증명하십시오. 이 범주의 대상들의 타입이 $\|\mathcal{U}\|_1$ 임을 보이십시오.

연습문제 9.10. †-준범주를 †-범주로 만드는 †-Rezk 완비화를 구성하고, 이에 적절한 보편 성질을 부여하십시오.

연습문제 9.11. 예 9.1.17 및 9.9.6의 기본 (준)그루포이드와 §9.9의 Rezk 완비화를 사용하여, 판 캄펀 정리(§8.7)의 다른 증명을 제시하십시오.

연습문제 9.12. X와 Y를 집합이라 하고 $p : Y \to X$를 전사라고 합시다.

(i) 임의의 준범주 A에 대하여, p에 관한 A에서의 **하강 데이터** 의 범주 $\mathrm{Desc}(A, p)$를 정의하십시오.
(ii) 임의의 준범주 A가 p에 대한 **준스택** 임을, 즉 표준 함자 $A^X \to \mathrm{Desc}(A, p)$가 충만충실함을 보이십시오.
(iii) A가 범주이면 A는 p에 대한 **스택** 임을, 즉 $A^X \to \mathrm{Desc}(A, p)$가 동치임을 보이십시오.
(iv) "모든 엄격한 범주는 집합 사이의 모든 전사에 대하여 스택입니다"라는 명제가 선택 공리와 동치임을 보이십시오.

제10장

집합론

우리가 생각하는 집합은 특별히 단순한 호모토피적 성격을 지닌 타입입니다(cf. §3.1 참고). 이는 체르멜로–프렝켈 집합론의 집합과는 상당히 다릅니다. 체르멜로–프렝켈 집합론의 집합은 복잡하게 중첩된 소속 구조를 가진 누적 위계를 이룹니다. 많은 수학적 목적에서는 호모토피 이론적 집합도 체르멜로–프렝켈 집합만큼 유용하지만, 둘 사이에는 중요한 차이가 있습니다.

이 장은 §10.1에서 범주 $\mathcal{S}et$이 집합의 범주의 통상적인 성질을 (대부분) 가짐을 보이는 것으로 시작합니다. 구성적이고 술어적인 유니밸런트 기초에서 $\mathcal{S}et$은 "ΠW-준토포스"입니다. 반면 명제적 크기 재조정 (§3.5)을 가정하면 초등 토포스이고, LEM 과 AC 를 가정하면 Lawvere의 집합 범주의 초등 이론의 모형이 됩니다. 따라서 호모토피 타입 이론의 집합은 집합론 바깥의 대부분의 수학자가 사용하는 집합처럼 행동합니다.

이 장의 나머지 부분에서는 전통적으로 "집합론"에 속하는 몇 가지 주제를 탐구합니다. §§10.2–10.4에서는 기수와 서수를 다룹니다. 이들은 전통적으로 집합론에서 전역적 소속 관계를 사용하여 정의되지만, 유니밸런스 공리를 통해 그에 못지않게 편리하면서도 더 "구조적인" 접근이 가능함을 보게 될 것입니다.

마지막으로 §10.5에서는 호모토피 타입 이론 안에서 집합의 누적 위계를 구성할 수 있는지 살펴봅니다. 이 누적 위계에는 체르멜로–프렝켈 집합론의 소속 관계와 비슷한 이항 소속 관계가 주어집니다. 이 구성에는 고차 귀납적 타입과 대수적 집합론 분야의 아이디어가 함께 쓰입니다.

이 장에서는 §3.7에서 설명한 전통적인 논리 표기법을 자주 사용합니다. 장 2 및 3의 기본 이론 외에도 §§6.8 및 6.10에서처럼 쌍대극한과 몫을 위한 고차 귀납적 타입을 사용합니다. 제7장의 절단 이론도 일부 사용하는데, 특히 $n = -1$인 경우의 §7.6의 분해 체계를 사용합니다. §10.3에서는 정초성을 기술하기 위해 귀납적 족(§5.7)을 사용하고, §10.5에서는 누적 위계를 제시하기 위해 더 복잡한 고차 귀납적 타입을 사용합니다.

10.1 집합의 범주

제9장에서 범주 $\mathcal{S}et$ 을 (어떤 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의) 모든 0-타입과 그 사이의 사상으로 이루어지도록 정의하고, 이것이 (단지 준범주가 아니라) 범주임을 관찰했던 것을 상기하십시오. 이제 $\mathcal{S}et$ 이 갖는 구조의 수준들을 차례로 살펴봅니다.

10.1.1 극한과 쌍대극한

집합은 곱에 대해 닫혀 있으므로, 정리 2.15.2의 곱의 보편 성질로부터 $\mathcal{S}et$ 이 유한 곱을 가짐을 곧바로 알 수 있습니다. 사실 무한 곱도 다음 동치로부터 마찬가지로 쉽게 따라 나옵니다.

$$\left(X \to \prod_{a:A} B(a)\right) \simeq \left(\prod_{a:A} (X \to B(a))\right).$$

또한 연습문제 2.11에서 $f : A \to C$와 $g : B \to C$의 당김을 $\sum_{(a:A)} \sum_{(b:B)} f(a) = g(b)$로 정의할 수 있음을 보았습니다. 이것은 A, B, C가 집합이면 집합이며, 올바른 보편 성질을 물려받습니다. 따라서 $\mathcal{S}et$ 은 자명한 의미에서 완비 범주입니다.

집합은 $+$에 대해 닫혀 있고 $\mathbf{0}$ 를 포함하므로 $\mathcal{S}et$ 은 유한 쌍대곱을 가집니다. 마찬가지로 A와 각 $B(a)$가 집합이면 $\sum_{(a:A)} B(a)$도 집합이므로, 이것은 $\mathcal{S}et$ 에서 족 B의 쌍대곱이 됩니다. 마지막으로 §7.4에서 n-타입들 안에 푸시아웃이 존재함을 보였으며, 특히 $\mathcal{S}et$ 도 여기에 포함됩니다. 따라서 $\mathcal{S}et$ 은 쌍대완비이기도 합니다.

10.1.2 상

다음으로 $\mathcal{S}et$이 **정칙 범주**임을, 즉 다음이 성립함을 보입니다:

(i) $\mathcal{S}et$은 유한 완비입니다.
(ii) 임의의 함수 $f : A \to B$의 핵쌍 $\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2 : (\sum_{(x,y:A)} f(x) = f(y)) \to A$는 쌍대동등자를 가집니다.
(iii) 정칙 에피사상의 당김은 다시 정칙 에피사상입니다.

정칙 에피사상 은 어떤 사상 쌍의 쌍대동등자인 사상임을 상기하십시오. 따라서 (iii)에서는 쌍대동등자의 당김이 다시 쌍대동등자일 것을 요구하지만, 그것이 당겨진 쌍의 쌍대동등자일 필요는 없습니다.

$f : A \to B$의 핵쌍의 쌍대동등자로 자연스러운 후보는 §7.6에서 정의한 f의 상입니다. $\mathsf{im}(f) :\equiv \sum_{(b:B)} \left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|$로 정의하고, 함수 $\tilde{f} : A \to \mathsf{im}(f)$와 $i_f : \mathsf{im}(f) \to B$를 다음과 같이 정의했던 것을 상기하십시오.

$$\tilde{f} :\equiv \lambda a.\left(f(a), \left|(a, \mathsf{refl}_{f(a)})\right|\right)$$
$$i_f :\equiv \mathsf{pr}_1$$

이들은 다음 도표에 들어맞습니다:

$$\sum_{(x,y:A)} f(x) = f(y) \underset{\mathsf{pr}_2}{\overset{\mathsf{pr}_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\tilde{f}} \mathsf{im}(f), \quad A \xrightarrow{f} B, \quad \mathsf{im}(f) \xrightarrow{i_f} B$$

함수 $f : A \to B$는 $\forall(b : B).\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|$, 또는 동치적으로 $\forall(b : B).\exists(a : A).f(a) = b$일 때 전사라고 불린다는 것을 상기하십시오. 또한 집합 사이의 함수 $f : A \to B$는 $\forall(a, a' : A).(f(a) = f(a')) \Rightarrow (a = a')$일 때, 또는 동치적으로 각 섬유가 단순 명제일 때 단사라고 불린다고 말했습니다. 이들은 제7장의 의미에서 (-1)-연결 사상과 (-1)-절단 사상이므로, 그곳의 일반 이론으로부터 위의 $\tilde{f}$는 전사이고 i_f는 단사이며, 이 분해는 당김에 대해 안정적임이 따라 나옵니다.

이제 전사성과 단사성을 그에 맞는 범주론적 개념과 동일시합니다. 먼저 범주론적 단사 사상과 에피사상에는 약간 더 강하면서도 동치인 정식화가 있다는 점을 살펴봅니다.

보조정리 10.1.1. 범주 A의 사상 $f : \hom_A(a,b)$에 대해 다음은 동치입니다.

(i) f는 **단사 사상**입니다: 즉, 모든 $x : A$와 $g,h : \hom_A(x,a)$에 대해 $f \circ g = f \circ h$이면 $g = h$입니다.
(ii) (A가 당김을 가지면) 대각 사상 $a \to a \times_b a$는 동형사상입니다.
(iii) 모든 $x : A$와 $k : \hom_A(x,b)$에 대해, 타입 $\sum_{(h:\hom_A(x,a))}(k = f \circ h)$는 단순 명제입니다.
(iv) 모든 $x : A$와 $g : \hom_A(x,a)$에 대해, 타입 $\sum_{(h:\hom_A(x,a))}(f \circ g = f \circ h)$는 축약 가능합니다.

증명. 조건 (i)과 (ii)의 동치는 범주론의 표준적인 결과입니다. 이제 집합 사이의 함수 $(f \circ -) : \hom_A(x,a) \to \hom_A(x,b)$를 생각해 봅시다. 조건 (i)은 이 함수가 단사임을 말하고, (iii)는 이 함수의 섬유가 단순 명제임을 말합니다. 따라서 두 조건은 동치입니다. 또한 $k :\equiv f \circ g$로 두고 거주된 단순 명제는 축약 가능하다는 사실을 상기하면 (iii)로부터 (iv)이 따라 나옵니다. 마지막으로, (iv)은 (i)을 함의합니다. $p : f \circ g = f \circ h$라면 (g, refl)와 (h,p)가 모두 (iv)의 타입에 거주하므로 둘은 같고, 따라서 $g = h$이기 때문입니다. □

보조정리 10.1.2. 집합 사이의 함수 $f : A \to B$가 단사일 필요충분조건은 f가 $\mathcal{S}et$에서 단사 사상인 것입니다.

증명. 독자에게 남겨 둡니다. □

물론 **에피사상**은 반대 범주에서의 단사 사상입니다. 이제 $\mathcal{S}et$에서 에피사상은 정확히 전사이며, 또한 정확히 쌍대동등자(정칙 에피사상)임을 보입니다.

$\mathcal{S}et$에서 사상 쌍 $f,g : A \to B$의 쌍대동등자는 일반적인 (호모토피) 쌍대동등자의 0-절단으로 정의됩니다. 명확성을 위해 이를 **집합 쌍대동등자**라고 부를 수 있습니다. 그 보편 성질은 다음과 같이 표현하는 것이 편리합니다.

보조정리 10.1.3. $f,g : A \to B$를 집합 A와 B 사이의 함수라고 합시다. 집합 쌍대동등자 $c_{f,g} : B \to Q$는 다음 성질을 가집니다. 임의의 집합 C와 $h \circ f = h \circ g$를 만족하는 임의의 $h : B \to C$에 대해, 다음 타입은

$$\sum_{k:Q\to C} (k \circ c_{f,g} = h)$$

축약 가능합니다.

보조정리 10.1.4. 집합 사이의 임의의 함수 $f : A \to B$에 대해 다음은 동치입니다.

(i) f는 에피사상입니다.
(ii) 다음 푸시아웃 도식을 고려하십시오.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow[t]{} & C_f \end{array}$$

이 도식은 $\mathcal{S}et$에서 사상 원뿔을 정의합니다. 그러면 타입 C_f는 축약 가능합니다.
(iii) f는 전사입니다.

증명. $f : A \to B$를 집합 사이의 함수라 하고, f가 에피사상이라고 가정합시다. 이제 C_f가 축약 가능함을 보입니다. C_f의 생성자 $\mathbf{1} \to C_f$로부터 원소 $t : C_f$를 얻습니다. 다음을 보여야 합니다.

$$\prod_{x:C_f} x = t.$$

$x = t$는 단순 명제이므로 C_f에 대한 귀납법을 사용할 수 있음에 유의하십시오. 물론 x가 t일 때는 $\mathsf{refl}_t : t = t$가 있으므로, 다음을 찾는 것으로 충분합니다.

$$I_0 : \prod_{b:B} \iota(b) = t$$
$$I_1 : \prod_{a:A} \alpha_1(a)^{-1} \cdot I_0(f(a)) = \mathsf{refl}_t$$

여기서 $\iota : B \to C_f$와 $\alpha_1 : \prod_{(a:A)} \iota(f(a)) = t$는 C_f의 나머지 생성자입니다. α_1은 $\iota \circ f$에서 $\mathsf{const}_t \circ f$로 가는 호모토피이므로, 다음 원소들을 얻습니다.

$$(\iota, \mathsf{refl}_{\iota\circ f}), (\mathsf{const}_t, \alpha_1) : \sum_{h:B\to C_f} \iota \circ f \sim h \circ f.$$

보조정리 10.1.1(iv)의 쌍대(및 함수 외연성)에 의해 다음 경로가 존재합니다.

$$\gamma : (\iota, \mathsf{refl}_{\iota\circ f}) = (\mathsf{const}_t, \alpha_1).$$

따라서 $I_0(b) :\equiv \mathsf{happly}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(\gamma), b) : \iota(b) = t$로 정의할 수 있습니다. 또한 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(\gamma) : \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(\gamma)_*\big(\mathsf{refl}_{\iota\circ f}\big) = \alpha_1.$$

이 수송에는 f와의 앞합성이 포함되며, 이는 happly와 가환합니다. 따라서 경로 타입에서의 수송으로부터 임의의 $a : A$에 대해 $I_0(f(a)) = \alpha_1(a)$를 얻으며, 이로부터 I_1을 얻습니다.

이제 C_f가 축약 가능하다고 가정하고, f가 전사임을 보이겠습니다. 먼저 C_f에 대한 재귀로 타입족 $P : C_f \to \mathsf{Prop}$를 구성하는데, Prop이 집합이므로 이는 타당합니다. 점 생성자에 대해서는 다음과 같이 정의합니다.

$$P(t) :\equiv \mathbf{1}$$
$$P(\iota(b)) :\equiv \big\|\mathsf{fib}_f(b)\big\|.$$

P의 구성을 완성하려면 모든 $a : A$에 대해 경로 $\big\|\mathsf{fib}_f(f(a))\big\| =_{\mathsf{Prop}} \mathbf{1}$를 주는 일이 남아 있습니다. 그런데 $\big\|\mathsf{fib}_f(f(a))\big\|$에는 $(f(a), \mathsf{refl}_{f(a)})$가 거주합니다. 이는 단순 명제이므로 축약 가능하다는 뜻입니다 — 따라서 $\mathbf{1}$과 동치이고, 그러므로 $\mathbf{1}$과 같습니다. 이로써 P의 정의가 완성됩니다. 이제 C_f가 축약 가능하다고 가정했으므로, 임의의 $x : C_f$에 대해 $P(x)$는 $P(t)$와 동치입니다. 특히 각 $b : B$에 대해 $P(\iota(b)) \equiv \big\|\mathsf{fib}_f(b)\big\|$는 $P(t) \equiv \mathbf{1}$과 동치이며, 따라서 축약 가능합니다. 그러므로 f는 전사입니다.

마지막으로, $f : A \to B$가 전사라고 가정하고, 집합 C와 $g \circ f = h \circ f$라는 성질을 만족하는 두 함수 $g, h : B \to C$를 생각해 봅시다. f가 전사라고 가정했으므로, 모든 $b : B$에 대해 타입 $\big\|\mathsf{fib}_f(b)\big\|$

는 축약 가능합니다. 따라서 다음 동치들을 얻습니다.

$$\begin{aligned}\prod_{b:B}(g(b)=h(b)) &\simeq \prod_{b:B}\Big(\|\mathsf{fib}_f(b)\| \to (g(b)=h(b))\Big)\\ &\simeq \prod_{b:B}\Big(\mathsf{fib}_f(b) \to (g(b)=h(b))\Big)\\ &\simeq \prod_{(b:B)}\prod_{(a:A)}\prod_{(p:f(a)=b)} g(b)=h(b)\\ &\simeq \prod_{a:A} g(f(a))=h(f(a))\end{aligned}$$

두 번째 줄에서는 C가 집합이므로 $g(b)=h(b)$가 단순 명제라는 사실을 사용했습니다. 그런데 가정에 의해 후자 타입의 원소가 존재합니다. □

정리 10.1.5. 범주 $\mathcal{S}et$은 정칙입니다. 또한 집합 사이의 전사 함수는 정칙 에피사상입니다.

증명. 어떤 범주가 유한 극한을 가지고, $\mathcal{M}$이 단사 사상들인 당김에 대해 안정적인 직교 분해 체계 $(\mathcal{E},\mathcal{M})$를 가지면 그 범주는 정칙이라는 것은 범주론의 표준적인 보조정리입니다. 이 경우 $\mathcal{E}$는 자동으로 정칙 에피사상들로 이루어집니다. (예를 들어 [Joh02, A1.3.4]을 참조하십시오.) 분해 체계의 존재는 정리 7.6.6에서 증명했습니다. □

보조정리 10.1.6. $\mathcal{S}et$ 에서 정칙 전사 사상의 당김은 정칙 전사 사상입니다.

증명. 정리 7.6.9에서 n-연결 함수의 당김이 n-연결임을 보였습니다. 정리 10.1.5에 의해 이를 $n=-1$인 경우에 적용하면 충분합니다. □

$\mathcal{S}et$ 이 정칙 범주라는 사실의 귀결 중 하나는 부분집합에 대한 "상" 연산이 존재한다는 것입니다. 즉, $f:A\to B$가 주어지면 임의의 부분집합 $P:\mathcal{P}(A)$(즉 술어 $P:A\to\mathsf{Prop}$)는 B의 부분집합인 **상**을 가집니다. 이는 $\{\, y:B \mid \exists(x:A).\, f(x)=y\wedge P(x)\,\}$로 직접 정의할 수도 있고, 다음 합성 함수의 (앞서 말한 의미에서의) 상으로 간접적으로 정의할 수도 있습니다

$$\{\, x:A \mid P(x)\,\} \to A \xrightarrow{f} B.$$

또한 P의 상을 나타내기 위해 흔히 쓰이는 표기법 $\{\, f(x) \mid P(x)\,\}$를 때때로 사용하겠습니다.

10.1.3 몫

이제 $\mathcal{S}et$이 정칙 범주임을 알았으므로, $\mathcal{S}et$이 완전 범주임을 보이려면 모든 동치 관계가 유효함을 보여야 합니다. 다시 말해, 동치 관계 $R:A\to A\to\mathsf{Prop}$이 주어지면 쌍 $\mathsf{pr}_1,\mathsf{pr}_2:\sum_{(x,y:A)}R(x,y)\to A$의 쌍대동등자 c_R가 존재하며, 나아가 pr_1과 pr_2는 c_R의 핵 쌍을 이룹니다.

§6.10에서 동치 관계 $R:A\to A\to\mathsf{Prop}$에 의한 집합의 몫을 구성하는 두 가지 일반적인 방법을 이미 살펴보았습니다. 첫 번째 방법은 다음 두 사영의 집합-쌍대동등자로 기술할 수 있습니다

$$\mathsf{pr}_1,\mathsf{pr}_2:\Big(\sum_{x,y:A}R(x,y)\Big)\to A.$$

이러한 몫의 중요한 성질은 다음과 같습니다.

정의 10.1.7. 관계 $R : A \to A \to \mathsf{Prop}$이 **유효**하다는 것은 다음 사각형이

$$\begin{array}{ccc} \sum_{(x,y:A)} R(x,y) & \xrightarrow{\mathsf{pr}_1} & A \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_R} \\ A & \xrightarrow[c_R]{} & A/R \end{array}$$

당김이라는 뜻입니다.

c_R와 그 자신의 표준 당김은 $\sum_{(x,y:A)}(c_R(x) = c_R(y))$이므로, 정리 4.7.7에 의해 이는 표준 변환 $\prod_{(x,y:A)} R(x,y) \to (c_R(x) = c_R(y))$가 섬유별 동치이기를 요구하는 것과 동치입니다.

보조정리 10.1.8. (A, R)이 동치 관계라고 가정합시다. 그러면 다음 동치가 존재합니다

$$(c_R(x) = c_R(y)) \simeq R(x,y)$$

이는 임의의 $x, y : A$에 대해 성립합니다. 다시 말해, 동치 관계는 유효합니다.

증명. 먼저 R을 관계 $\widetilde{R} : A/R \to A/R \to \mathsf{Prop}$로 확장한 뒤, 이것이 A/R 위의 동일성 타입과 동치임을 보이겠습니다. $\widetilde{R}$은 A/R에 대한 이중 귀납법으로 정의합니다(단순 명제에 대한 유니밸런스에 의해 Prop이 집합임에 유의하십시오). $\widetilde{R}(c_R(x), c_R(y)) :\equiv R(x,y)$로 정의합니다. $r : R(x,x')$과 $s : R(y,y')$에 대해, R의 추이성과 대칭성으로부터 $R(x,y)$에서 $R(x',y')$으로의 동치를 얻습니다. 이로써 $\widetilde{R}$의 정의가 완성됩니다.

이제 모든 $w, w' : A/R$에 대해 $\widetilde{R}(w,w') \simeq (w = w')$임을 보이는 일이 남았습니다. $\widetilde{R}$가 반사적임을 보이면 $(w = w') \to \widetilde{R}(w,w')$ 방향은 수송으로 얻어지며, 반사성은 간단한 귀납으로 보일 수 있습니다. 반대 방향 $\widetilde{R}(w,w') \to (w = w')$는 단순 명제이고 $c_R : A \to A/R$는 전사이므로, w와 w'이 각각 $c_R(x)$와 $c_R(y)$ 꼴이라고 가정하면 충분합니다. 이 경우에는 표준적인 사상 $\widetilde{R}(c_R(x), c_R(y)) :\equiv R(x,y) \to (c_R(x) = c_R(y))$가 있습니다. (여기서도 인코드-디코드 방법이 등장한다는 점에 주목하십시오.) □

몫의 두 번째 구성은 R의 동치류들의 집합(즉 멱집합의 부분집합)으로 구성하는 것입니다:

$$A /\!\!/ R :\equiv \left\{ P : A \to \mathsf{Prop} \;\middle|\; P\text{의 동치류입니다}R \right\}.$$

A 및 R과 같은 유니버스에 머무르려면 명제적 크기 재조정이 필요합니다.

R을 A에서 $A \to \mathsf{Prop}$으로 가는 함수로 간주하면, $A /\!\!/ R$은 §10.1.2에서 구성한 $\mathsf{im}(R)$과 동치라는 점에 유의하십시오. 그런데 정리 10.1.5에서 상이 쌍대동등자임을 보였습니다. 특히 다음 쌍대동등자 도식을 곧바로 얻습니다

$$\sum_{(x,y:A)} R(x) = R(y) \underset{\mathsf{pr}_2}{\overset{\mathsf{pr}_1}{\rightrightarrows}} A \longrightarrow A /\!\!/ R.$$

이를 이용하여 모든 동치 관계가 유효하다는 것과 몫의 두 정의가 일치한다는 것을 다른 방식으로 증명할 수 있습니다.

정리 10.1.9. 임의의 두 집합 사이의 임의의 함수 $f : A \to B$에 대해, $\ker(f, x, y) :\equiv (f(x) = f(y))$로 주어지는 관계 $\ker(f) : A \to A \to \mathsf{Prop}$은 유효합니다.

증명. $\mathsf{im}(f)$가 $\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2 : (\sum_{(x,y:A)} f(x) = f(y)) \to A$의 쌍대동등자라는 사실을 이용하겠습니다. 다음 함수의 핵 쌍은

$$c_f :\equiv \lambda a.\left(f(a), \left\|(a, \mathsf{refl}_{f(a)})\right\|\right) : A \to \mathsf{im}(f)$$

다음 두 사영으로 이루어진다는 점에 유의하십시오.

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2 : \Big(\sum_{x,y:A} c_f(x) = c_f(y)\Big) \to A.$$

임의의 $x, y : A$에 대하여 다음 동치들이 성립합니다.

$$\begin{aligned}(c_f(x) = c_f(y)) &\simeq \Big(\sum_{p:f(x)=f(y)} p_*\Big(\left\|(x, \mathsf{refl}_{f(x)})\right\|\Big) = \left\|(y, \mathsf{refl}_{f(x)})\right\|\Big)\\ &\simeq (f(x) = f(y)),\end{aligned}$$

여기서 마지막 동치는 임의의 $b : B$에 대하여 $\left\|\mathsf{fib}_f(b)\right\|$가 단순 명제이므로 성립합니다. 따라서 다음을 얻으며,

$$\Big(\sum_{x,y:A} c_f(x) = c_f(y)\Big) \simeq \Big(\sum_{x,y:A} f(x) = f(y)\Big)$$

그러므로 임의의 함수 f에 대하여 $\ker f$가 유효 관계라고 결론지을 수 있습니다. □

정리 10.1.10. 동치 관계는 유효하며, 동치 $A/R \simeq A /\!\!/ R$가 존재합니다.

증명. 다음 쌍대동등자 도식을 분석해야 합니다.

$$\textstyle\sum_{(x,y:A)} R(x) = R(y) \overset{\mathsf{pr}_1}{\underset{\mathsf{pr}_2}{\rightrightarrows}} A \longrightarrow A /\!\!/ R$$

유니밸런스 공리에 의해 타입 $R(x) = R(y)$는 $R(x)$에서 $R(y)$로 가는 호모토피들의 타입과 동치이며, 이는 다시 $\prod_{(z:A)} R(x,z) \simeq R(y,z)$.와 동치입니다. R이 동치 관계이므로 후자의 공간은 $R(x,y)$와 동치입니다. 요약하면 $(R(x) = R(y)) \simeq R(x,y)$를 얻으므로, R는 유효 관계와 동치이기 때문에 유효합니다. 또한 다음 도식은

$$\textstyle\sum_{(x,y:A)} R(x,y) \overset{\mathsf{pr}_1}{\underset{\mathsf{pr}_2}{\rightrightarrows}} A \longrightarrow A /\!\!/ R.$$

위 도식은 쌍대동등자 도식입니다. 쌍대동등자는 동치를 제외하면 유일하므로 $A/R \simeq A /\!\!/ R$가 성립합니다. □

집합 A를 동치 관계 R로 나눈 몫을 구성하는 가능한 세 번째 방법을 언급하며 이 절을 마칩니다. 대상이 A이고 hom-집합이 R인 준범주를 생각하십시오. 그러면 이 준범주의 Rezk 완비화 (§9.9 참조)의 대상들의 타입이 곧 몫이 됩니다. 세부 사항은 독자가 직접 확인해 보시기 바랍니다.

10.1.4 ΠW-준토포스인 집합 범주 $\mathcal{S}et$

ΠW-준토포스 는 서로소인 유한 쌍대곱, 유효한 동치 관계, 다항 자기 함자에 대한 시작 대수를 갖는 국소 데카르트 닫힌 범주 입니다. 이 개념은 토포스의 "술어적" 버전, 즉 "술어적 집합"의 범주로 의도되었습니다. 고전 수학에서 통상적인 집합의 범주가 하는 역할을 구성적 수학 에서 이 범주가 맡을 수 있습니다.

일반적으로 구성적 타입 이론에서는 이러한 닫힘 성질을 갖는 범주를 얻기 위해 "세토이드"의 외부 구성 — 정확 완비화 — 에 의존합니다. 특히, 보통 (비구성적인) 멱집합을 수반하는 수학의 많은 구성에는 성질이 좋은 몫이 필요합니다. 유니밸런트 기초가 그러한 외부 구성을 요구하지 않고도 이러한 구성들을 (고차 귀납적 타입을 통해) 내부적으로 제공한다는 점은 주목할 만합니다. 이후의 예들에서 보겠지만, 이는 우리 접근법의 강력한 장점입니다.

정리 10.1.11. 범주 $\mathcal{S}et$은 ΠW-준토포스입니다.

증명. 시작 대상 $\mathbf{0}$와 서로소인 유한 합 $A + B$가 있습니다. 당김에는 오른쪽 수반이 있으므로 이들은 당김에 대해 안정적입니다. 실제로 $\mathcal{S}et$은 국소 데카르트 닫힌 범주입니다. 집합 사이의 임의의 사상 $f : A \to B$에 대해 "섬유적 대체" $\sum_{(a:A)} f(a) = b$는 (B 위에서) A와 동치이고, 이 대체에 대해서는 의존 함수 타입이 있기 때문입니다. 방금 $\mathcal{S}et$이 정칙이고(정리 10.1.5) 몫이 유효함(보조정리 10.1.8)을 보였습니다. 따라서 국소 데카르트 닫힌 준토포스를 얻습니다. 마지막으로 연습문제 7.3에 의해 n-타입들은 W-타입 형성에 대해 닫혀 있고, 정리 5.4.7에 의해 W-타입은 다항 자기 함자에 대한 시작 대수입니다. 그러므로 $\mathcal{S}et$은 ΠW-준토포스입니다. □

그렇다면 $\mathcal{S}et$이 (초등) 토포스가 되지 못하게 막는 것이 있다면 무엇인지 자연스럽게 궁금해집니다. 앞서 언급한 구조 외에도 토포스에는 부분 대상 분류자 가 있습니다. 부분 대상 분류자는 단사 사상(의 동치류)을 분류하는 점을 가진 대상입니다. (사실 부분 대상 분류자가 있으면 상황이 다소 단순해집니다. 쌍대극한을 얻는 데 데카르트 닫힘만 있으면 되기 때문입니다.) 호모토피 타입 이론에서는 유니밸런스에 의해 타입 $\mathsf{Prop} :\equiv \sum_{(X:\mathcal{U})} \mathsf{isProp}(X)$가 실제로 단사 사상을 분류합니다 (§4.8과 비슷한 논증을 따릅니다). 그러나 일반적으로 이 타입은 주변 유니버스 $\mathcal{U}$만큼 큽니다. 따라서 이 타입은 0-타입이라는 의미에서는 "집합"이지만, $\mathcal{U}$의 대상이라는 의미에서는 "작지" 않으므로 범주 $\mathcal{S}et$ 의 대상이 아닙니다. 하지만 적절한 형태의 명제적 크기 재조정(§3.5 참조)을 가정하면 Prop의 작은 버전을 찾을 수 있고, 그러면 $\mathcal{S}et$ 은 초등 토포스가 됩니다.

정리 10.1.12. 모든 단순 명제들의 타입 $\Omega : \mathcal{U}$가 존재하면, 범주 $\mathcal{S}et_{\mathcal{U}}$는 초등 토포스입니다.

이를 위한 충분조건은 우리가 LEM 이라 부른 "단순 명제적" 형태의 배중률입니다. 이 경우 $\mathsf{Prop} = \mathbf{2}$이 성립하는데, 이는 실제로 작으며 모든 단순 명제를 분류하기도 하기 때문입니다. 더욱이 토포스 이론에서 LEM 에 대한 잘 알려진 충분조건은 선택 공리이며, 이는 물론 고전 집합론에서 흔히 공리로 가정됩니다. 다음 절에서는 우리의 설정에서 이러한 조건들 사이의 관계를 간략히 살펴봅니다.

10.1.5 선택 공리는 배중률을 함의합니다

다음 보조정리로 시작합니다.

보조정리 10.1.13. A가 단순 명제이면 그 현수 $\Sigma(A)$는 집합이며, A는 $\mathsf{N} =_{\Sigma(A)} \mathsf{S}$와 동치입니다.

증명. $\Sigma(A)$가 집합임을 보이기 위해, 각 $x, y : \Sigma(A)$에 대하여 $P(x,y)$가 단순 명제라는 성질을 가지며 그 동일성 타입 $\mathsf{Id}_{\Sigma(A)}$와 동치인 족 $P : \Sigma(A) \to \Sigma(A) \to \mathcal{U}$를 정의합니다. 다음과 같이 정의합니다.

$$P(\mathsf{N},\mathsf{N}) :\equiv \mathbf{1} \qquad P(\mathsf{S},\mathsf{N}) :\equiv A$$
$$P(\mathsf{N},\mathsf{S}) :\equiv A \qquad P(\mathsf{S},\mathsf{S}) :\equiv \mathbf{1}.$$

이 정의가 경로를 보존하는지 확인해야 합니다. 임의의 $a : A$가 주어지면 자오선 $\mathsf{merid}(a) : \mathsf{N} = \mathsf{S}$가 존재하므로, 다음도 성립해야 합니다.

$$P(\mathsf{N},\mathsf{N}) = P(\mathsf{N},\mathsf{S}) = P(\mathsf{S},\mathsf{N}) = P(\mathsf{S},\mathsf{S}).$$

그러나 A에 원소 a가 있으므로 A는 $\mathbf{1}$과 동치이며, 따라서 다음을 얻습니다.

$$P(\mathsf{N},\mathsf{N}) \simeq P(\mathsf{N},\mathsf{S}) \simeq P(\mathsf{S},\mathsf{N}) \simeq P(\mathsf{S},\mathsf{S}).$$

유니밸런스 공리를 적용하면 이들은 원하는 등식이 됩니다. 또한 모든 $x, y : \Sigma(A)$에 대해 $P(x,y)$는 단순 명제입니다. 이는 x와 y에 대한 귀납법으로 증명하며, 단순 명제라는 성질 자체가 단순 명제라는 사실을 이용합니다.

P가 반사 관계임에 주목하십시오. 따라서 정리 7.2.2를 적용할 수 있으므로, $\tau : \prod_{(x,y:\Sigma(A))} P(x,y) \to (x = y)$를 구성하면 충분합니다. 이는 이중 귀납법으로 구성합니다. x가 N일 때 $\tau(\mathsf{N})$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\tau(\mathsf{N},\mathsf{N},u) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{N}} \qquad \text{그리고} \qquad \tau(\mathsf{N},\mathsf{S},a) :\equiv \mathsf{merid}(a).$$

A에 원소 a가 있으면 $\mathsf{merid}(a) : \mathsf{N} = \mathsf{S}$이므로 다음도 필요합니다. $\mathsf{merid}(a)_*(\tau(\mathsf{N},\mathsf{N})) = \tau(\mathsf{N},\mathsf{S})$. 이는 모든 $x : A$에 대해 다음이 성립한다는 사실을 이용하여 함수 외연성으로 얻습니다.

$$\mathsf{merid}(a)_*(\tau(\mathsf{N},\mathsf{N},x)) = \tau(\mathsf{N},\mathsf{N},x) \cdot \mathsf{merid}(a)^{-1} \equiv$$
$$\mathsf{refl}_{\mathsf{N}} \cdot \mathsf{merid}(a) = \mathsf{merid}(a) = \mathsf{merid}(x) \equiv \tau(\mathsf{N},\mathsf{S},x).$$

대칭적인 방식으로 $\tau(\mathsf{S})$를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\tau(\mathsf{S},\mathsf{N},a) :\equiv \mathsf{merid}(a)^{-1} \qquad \text{그리고} \qquad \tau(\mathsf{S},\mathsf{S},u) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{S}}.$$

τ의 구성을 완성하려면 임의의 $a : A$에 대해 $\mathsf{merid}(a)_*(\tau(\mathsf{N})) = \tau(\mathsf{S})$임을 확인해야 합니다. 이 검증은 τ의 두 번째 인자에 대한 귀납법으로 거의 같은 방식으로 진행됩니다.

따라서 정리 7.2.2에 의해 $\Sigma(A)$는 집합이고, 모든 $x, y : \Sigma(A)$에 대해 $P(x,y) \simeq (x = y)$가 성립합니다. $x :\equiv \mathsf{N}$, $y :\equiv \mathsf{S}$로 두면 원하던 대로 $A \simeq (\mathsf{N} =_{\Sigma(A)} \mathsf{S})$를 얻습니다. □

정리 10.1.14 (디아코네스쿠). 선택 공리는 배중률을 함의합니다.

증명. 보조정리 3.8.2에서 제시한 선택 공리의 동치 형태를 사용합니다. 단순 명제 A를 생각해 봅시다. $f(0_2) :\equiv \mathsf{N}$, $f(1_2) :\equiv \mathsf{S}$로 정의되는 함수 $f : \mathbf{2} \to \Sigma(A)$는 전사입니다. 실제로 $(0_2, \mathsf{refl}_{\mathsf{N}}) : \mathsf{fib}_f(\mathsf{N})$이고 $(1_2, \mathsf{refl}_{\mathsf{S}}) : \mathsf{fib}_f(\mathsf{S})$입니다. $\left\|\mathsf{fib}_f(x)\right\|$는 단순 명제이므로, 귀납법에 의해 주장한 전사성이 따라 나옵니다.

보조정리 10.1.13에 의해 현수 $\Sigma(A)$는 집합이므로, 선택 공리에 의해 f의 단면 $g : \Sigma(A) \to \mathbf{2}$이 단순히 존재합니다. $\mathbf{2}$ 위의 등식은 결정 가능하므로 다음을 얻습니다.

$$(g(f(0_2)) = g(f(1_2))) + \neg(g(f(0_2)) = g(f(1_2))),$$

또한 g는 f의 단면이므로 단사이며, 따라서 다음이 성립합니다.

$$(f(0_2) = f(1_2)) + \neg(f(0_2) = f(1_2)).$$

마지막으로 보조정리 10.1.13에 의해 $(f(0_2) = f(1_2)) = (\mathsf{N} = \mathsf{S}) = A$이므로 $A + \neg A$를 얻습니다. □

정리 10.1.15. 선택 공리가 성립하면 범주 $\mathcal{S}et$은 선택 공리를 만족하는 잘 점 찍힌(well-pointed) 불 초등 토포스입니다.

증명. AC 는 LEM 을 함의하므로, 정리 10.1.12와 그 뒤의 주의에 의해 선택 공리를 만족하는 불 초등 토포스를 얻습니다. 잘 점 찍힘의 증명은 독자에게 연습 문제로 남깁니다(연습문제 10.3). □

주 10.1.16. 정리에서 언급된 범주에 대한 조건들은 집합의 범주의 초등 이론에 대한 Lawvere의 공리로 알려져 있습니다 [Law05].

10.2 기수

정의 10.2.1. **기수의 타입** 은 집합들의 타입 Set 의 0-절단입니다:

$$\mathsf{Card} :\equiv \|\mathsf{Set}\|_0$$

따라서 **기수**(cardinal number), 또는 줄여서 **기수**(cardinal)는 $\mathsf{Card} \equiv \|\mathsf{Set}\|_0$의 원소입니다. 물론 엄밀히 말하면 각 유니버스 $\mathcal{U}$ 마다 별도의 타입 $\mathsf{Card}_{\mathcal{U}}$가 대응됩니다.

절단에서 늘 그렇듯이, A가 집합이면 $|A|_0$는 표준적인 사영 $\mathsf{Set} \to \|\mathsf{Set}\|_0 \equiv \mathsf{Card}$에 의한 A의 상을 나타냅니다. 우리는 $|A|_0$를 A의 **기수**라고 부릅니다. 정의에 의해 Card 는 집합입니다. 또한 Card 는 Set 으로부터 반환 구조를 물려받습니다.

정의 10.2.2. **기수 덧셈** 연산

$$(- + -) : \mathsf{Card} \to \mathsf{Card} \to \mathsf{Card}$$

은 절단에 대한 귀납법으로 정의됩니다:

$$|A|_0 + |B|_0 :\equiv |A + B|_0.$$

증명. $\mathsf{Card} \to \mathsf{Card}$는 집합이므로, 모든 $\alpha : \mathsf{Card}$에 대해 $(\alpha + -) : \mathsf{Card} \to \mathsf{Card}$를 정의하려면 귀납법에 의해 어떤 $A : \mathsf{Set}$에 대해 α가 $|A|_0$라고 가정하면 충분합니다. 이제 $(|A|_0 + -) : \mathsf{Card} \to \mathsf{Card}$를 정의하려 합니다. 즉, 모든 $\beta : \mathsf{Card}$에 대해 $|A|_0 + \beta : \mathsf{Card}$를 정의하려 합니다. 그런데 Card는 집합이므로, 귀납법에 의해 어떤 $B : \mathsf{Set}$에 대해 β가 $|B|_0$라고 가정하면 충분합니다. 이제 $|A|_0 + |B|_0$를 $|A + B|_0$로 정의할 수 있습니다. □

정의 10.2.3. 마찬가지로, **기수 곱셈** 연산

$$(- \cdot -) : \mathsf{Card} \to \mathsf{Card} \to \mathsf{Card}$$

절단에 대한 귀납법으로 정의됩니다:

$$|A|_0 \cdot |B|_0 :\equiv |A \times B|_0$$

보조정리 10.2.4. Card 는 가환 반환입니다. 즉, $\alpha, \beta, \gamma : \mathsf{Card}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma)\\ \alpha + 0 &= \alpha\\ \alpha + \beta &= \beta + \alpha\\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)\\ \alpha \cdot 1 &= \alpha\\ \alpha \cdot \beta &= \beta \cdot \alpha\\ \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma\end{aligned}$$

여기서 $0 :\equiv |\mathbf{0}|_0$이고 $1 :\equiv |\mathbf{1}|_0$입니다.

증명. 곱셈의 교환법칙 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$를 증명하겠습니다. 나머지도 정확히 같은 방식으로 증명됩니다. Card 는 집합이므로 타입 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$는 단순 명제이며, 특히 집합입니다. 따라서 귀납법에 의해 어떤 $A, B : \mathsf{Set}$에 대해 α와 β가 각각 $|A|_0$와 $|B|_0$ 꼴이라고 가정하는 것으로 충분합니다. 이제 $|A|_0 \cdot |B|_0 \equiv |A \times B|_0$이고 $|B|_0 \cdot |A|_0 \equiv |B \times A|_0$이므로 $A \times B = B \times A$를 보이는 것으로 충분합니다. 마지막으로 유니밸런스에 의해 동치 $A \times B \simeq B \times A$를 제시하는 것으로 충분합니다. 그런데 이는 쉽습니다. $(a, b) \mapsto (b, a)$와 그 자명한 역함수를 취하면 됩니다. □

정의 10.2.5. **기수 거듭제곱** 연산 역시 절단에 대한 귀납법으로 정의됩니다:

$$|A|_0^{|B|_0} :\equiv |B \to A|_0.$$

보조정리 10.2.6. $\alpha, \beta, \gamma : \mathsf{Card}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= 1\\ 1^\alpha &= 1\\ \alpha^1 &= \alpha\\ \alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma\\ \alpha^{\beta\cdot\gamma} &= (\alpha^\beta)^\gamma\\ (\alpha \cdot \beta)^\gamma &= \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma\end{aligned}$$

증명. 보조정리 10.2.4과 정확히 같은 방식으로 증명됩니다. □

정의 10.2.7. **기수 부등식** 관계

$$(- \leq -) : \mathsf{Card} \to \mathsf{Card} \to \mathsf{Prop}$$

는 절단에 대한 귀납법으로 정의됩니다:

$$|A|_0 \leq |B|_0 :\equiv \|\mathsf{inj}(A, B)\|$$

여기서 $\mathsf{inj}(A, B)$는 A에서 B로 가는 단사 함수들의 타입입니다. 다시 말해, $|A|_0 \leq |B|_0$는 A에서 B로 가는 단사 함수가 단순히 존재한다는 뜻입니다.

보조정리 10.2.8. 기수 부등식은 준순서입니다. 즉, $\alpha, \beta : \mathsf{Card}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\alpha \leq \alpha$$
$$(\alpha \leq \beta) \to (\beta \leq \gamma) \to (\alpha \leq \gamma)$$

증명. 앞에서와 마찬가지로 절단에 대한 귀납법으로 증명합니다. 예를 들어 $(\alpha \leq \beta) \to (\beta \leq \gamma) \to (\alpha \leq \gamma)$는 단순 명제이므로, 0-절단에 대한 귀납법에 의해 α, β, γ가 각각 $|A|_0$, $|B|_0$, $|C|_0$라고 가정할 수 있습니다. 이제 $|A|_0 \leq |C|_0$는 단순 명제이므로, (-1)-절단에 대한 귀납법에 의해 단사 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. 그러면 $g \circ f$는 A에서 C로 가는 단사 함수이므로 $|A|_0 \leq |C|_0$가 성립합니다. 반사성은 이보다 더 쉽습니다. □

마찬가지로 기수 부등식이 반환 연산과 호환됨을 보일 수 있습니다.

보조정리 10.2.9. 다음 명제들을 생각해 봅시다:

(i) 단사 함수 $A \to B$가 존재합니다.
(ii) 전사 함수 $B \to A$가 존재합니다.

그러면 배중률을 가정할 때 다음이 성립합니다:

- $a_0 : A$가 주어지면 (i)→(ii)가 성립합니다.
- 따라서 A가 단순히 원소를 가지면 (i) → 단순히 (ii)가 성립합니다.
- 선택 공리를 가정하면 (ii) → 단순히 (i)가 성립합니다.

증명. $f : A \to B$가 단사이면, $b : B$에서 $g : B \to A$를 다음과 같이 정의합니다. f가 단사이므로 b에서의 f의 섬유는 단순 명제입니다. 따라서 배중률에 의해 $f(a) = b$를 만족하는 $a : A$가 존재하거나 존재하지 않습니다. 첫 번째 경우에는 $g(b) :\equiv a$로 정의하고, 그렇지 않은 경우에는 $g(b) :\equiv a_0$로 정합니다(집합의 원소를 지정합니다). 그러면 임의의 $a : A$에 대해 $a = g(f(a))$이므로 g는 전사입니다.

두 번째 명제는 이로부터 절단에 대한 귀납법으로 따라 나옵니다. 세 번째 명제의 경우, $g : B \to A$가 전사이면 선택 공리에 의해 모든 a에 대해 $g(f(a)) = a$인 함수 $f : A \to B$가 단순히 존재합니다. 그러면 f는 반드시 단사입니다. □

정리 10.2.10 (슈뢰더–베른슈타인). 배중률을 가정하면, 집합 A와 B에 대해 다음이 성립합니다.

$$\mathsf{inj}(A, B) \to \mathsf{inj}(B, A) \to (A \cong B)$$

증명. 통상적인 "왕복" 논증이 큰 변경 없이 적용됩니다. 이 논증은 실제로 동형사상 $A \cong B$를 구성한다는 점에 유의하십시오(주어진 원소가 순환, 무한 사슬, A에서 시작하는 사슬, B에서 시작하는 사슬 중 어디에 속하는지 결정할 수 있도록 배중률을 가정합니다). □

따름정리 10.2.11. 배중률을 가정하면 기수 부등식은 부분 순서입니다. 즉, $\alpha, \beta : \mathsf{Card}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$(\alpha \leq \beta) \to (\beta \leq \alpha) \to (\alpha = \beta).$$

증명. $\alpha = \beta$는 단순 명제이므로, 절단에 대한 귀납에 의해 α와 β가 각각 $|A|_0$와 $|B|_0$이고 단사 $f : A \to B$와 $g : B \to A$가 주어져 있다고 가정할 수 있습니다. 그러면 Schroeder–Bernstein 정리에 의해 동형사상 $A \cong B$가 주어지고, 따라서 등식 $|A|_0 = |B|_0$가 성립합니다. □

마지막으로, 칸토어 정리를 재현하여 모든 기수에 대해 그보다 더 큰 기수가 존재함을 보일 수 있습니다.

정리 10.2.12 (칸토어). $A : \mathsf{Set}$에 대해 전사 $A \to (A \to \mathbf{2})$는 존재하지 않습니다.

증명. $f : A \to (A \to \mathbf{2})$를 임의의 함수라고 하고, $g : A \to \mathbf{2}$를 $g(a) :\equiv \neg f(a)(a)$로 정의합시다. 만약 $g = f(a_0)$이면 $g(a_0) = f(a_0)(a_0)$이지만 $g(a_0) = \neg f(a_0)(a_0)$이므로 모순입니다. 따라서 f는 전사가 아닙니다. □

따름정리 10.2.13. 배중률을 가정하면, 임의의 $\alpha : \mathsf{Card}$에 대해 $\alpha \leq \beta$이고 $\alpha \neq \beta$인 기수 β가 존재합니다.

증명. $\beta = 2^\alpha$라고 합시다. 이제 보이고자 하는 것은 단순 명제이므로, 귀납법에 의해 α가 $|A|_0$라고 가정할 수 있으며, 그러면 $\beta \equiv |A \to \mathbf{2}|_0$입니다. 배중률을 사용하면 다음과 같이 정의되는 함수 $f : A \to (A \to \mathbf{2})$를 얻습니다.

$$f(a)(a') :\equiv \begin{cases} 1_\mathbf{2} & a = a' \\ 0_\mathbf{2} & a \neq a'. \end{cases}$$

그리고 $f(a) = f(a')$이면 $f(a')(a) = f(a)(a) = 1_\mathbf{2}$이므로 $a = a'$입니다. 따라서 f는 단사입니다. 그러므로 $\alpha \equiv |A|_0 \leq |A \to \mathbf{2}|_0 \equiv 2^\alpha$입니다.

한편, $2^\alpha \leq \alpha$라면 단사 $(A \to \mathbf{2}) \to A$가 존재하게 됩니다. $(\lambda x.0_\mathbf{2}) : A \to \mathbf{2}$와 배중률이 있으므로, 보조정리 10.2.9에 의해 전사 $A \to (A \to \mathbf{2})$가 존재하게 되고, 이는 칸토어 정리에 모순됩니다. □

10.3 순서수

정의 10.3.1. A를 집합이라 하고

$$(- < -) : A \to A \to \mathsf{Prop}$$

를 A 위의 이항 관계라고 합시다. 원소 $a : A$가 $<$에 의해 **접근 가능** 하다는 것이 무엇을 의미하는지 다음과 같이 귀납적으로 정의합니다.

- 모든 $b < a$에 대해 b가 접근 가능하면, a는 접근 가능합니다.

a가 접근 가능함을 $\mathsf{acc}(a)$로 표기합니다.

이러한 귀납적 정의는 결코 시작될 수 없을 것처럼 보일 수도 있지만, 물론 a가 $b < a$인 b가 하나도 없다는 성질을 가진다면 a는 공허하게 접근 가능합니다.

이것은 §5.7에서 살펴본 벡터 타입처럼 타입족의 귀납적 정의임에 유의하십시오. 더 정확히 말하면, 이 정의에는 생성자가 하나 있으며, 이를 $\mathsf{acc}_<$라고 하면 그 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathsf{acc}_< : \prod_{a:A} \left(\prod_{b:A} (b < a) \to \mathsf{acc}(b) \right) \to \mathsf{acc}(a).$$

acc에 대한 귀납 원리에 따르면, 임의의 $P : \prod_{(a:A)} \mathsf{acc}(a) \to \mathcal{U}$에 대해 다음이 주어지면

$$f : \prod_{(a:A)} \prod_{(h:\prod_{(b:A)} (b<a) \to \mathsf{acc}(b))} \left(\prod_{(b:A)} \prod_{(l:b<a)} P(b, h(b,l)) \right) \to P(a, \mathsf{acc}_<(a,h)),$$

귀납법으로 정의된 $g : \prod_{(a:A)} \prod_{(c:\mathsf{acc}(a))} P(a,c)$를 얻으며, 이는 다음을 만족합니다.

$$g(a, \mathsf{acc}_<(a,h)) \equiv f(a,\ h,\ \lambda b.\, \lambda l.\, g(b, h(b,l))).$$

다소 장황하지만, 일반적으로 이 원리는 $P : A \to \mathcal{U}$가 A에만 의존하는 더 단순한 경우에만 적용합니다. 이 경우 f의 두 번째 인자와 세 번째 인자를 합칠 수 있으므로, 증명해야 하는 것은 다음과 같습니다.

$$f : \prod_{a:A} \Big(\prod_{b:A} (b < a) \to \mathsf{acc}(b) \times P(b) \Big) \to P(a).$$

즉, 모든 $b < a$가 접근 가능하고 $g(b) : P(b)$가 정의되어 있다고 가정하고, 이로부터 $g(a) : P(a)$를 정의합니다.

P의 두 번째 인자를 생략하는 것은 다음 보조정리로 정당화되며, 이 보조정리의 증명은 귀납 원리의 더 일반적인 형태를 사용하는 유일한 곳입니다.

보조정리 10.3.2. 접근 가능성은 단순 성질입니다.

증명. 임의의 $a : A$와 $s_1, s_2 : \mathsf{acc}(a)$에 대해 $s_1 = s_2$임을 보여야 합니다. 이를 s_1에 대한 귀납법으로 증명하며, 다음과 같이 둡니다.

$$P_1(a, s_1) :\equiv \prod_{s_2:\mathsf{acc}(a)} (s_1 = s_2).$$

따라서 임의의 $a : A$와 $h_1 : \prod_{(b:A)} (b < a) \to \mathsf{acc}(b)$, 그리고 다음

$$k_1 : \prod_{(b:A)} \prod_{(l:b<a)} \prod_{(t:\mathsf{acc}(b))} h_1(b,l) = t,$$

에 대해, 임의의 $s_2 : \mathsf{acc}(a)$에 대하여 $\mathsf{acc}_<(a,h) = s_2$임을 보여야 합니다. 이 진술을 $\prod_{(a:A)} \prod_{(s_2:\mathsf{acc}(a))} P_2(a, s_2)$로 간주하는데, 여기서

$$P_2(a, s_2) :\equiv \prod_{(h_1:\cdots)} \prod_{(k_1:\cdots)} (\mathsf{acc}_<(a, h_1) = s_2);$$

이므로 이를 s_2에 대한 귀납법으로 증명할 수 있습니다. 따라서 $h_2 : \prod_{(b:A)} (b < a) \to \mathsf{acc}(b)$와, 엄청나게 복잡하지만 여기서는 중요하지 않은 다음 타입을 갖는 k_2를 가정합니다. 그리고 위와 같은 타입을 갖는 임의의 h_1과 k_1에 대해 $\mathsf{acc}_<(a,h_1) = \mathsf{acc}_<(a,h_2)$임을 보여야 합니다. 함수 외연성에 의해, 모든 $b : A$와 $l : b < a$에 대해 $h_1(b,l) = h_2(b,l)$임을 보이면 충분합니다. 이는 k_1로부터 따라옵니다. □

정의 10.3.3. 집합 A 위의 이항 관계 $<$는 A의 모든 원소가 접근 가능할 때 **정초적** 이라고 합니다.

정초성의 요점은 $P : A \to \mathcal{U}$에 대해 acc의 귀납 원리를 사용하여 $\prod_{(a:A)} \mathsf{acc}(a) \to P(a)$를 결론짓고, 이어서 정초성을 적용하여 $\prod_{(a:A)} P(a)$를 결론지을 수 있다는 것입니다. 다시 말해, $\forall (b : A).\, (b < a) \to P(b)$로부터 $P(a)$를 증명할 수 있다면 $\forall (a : A).\, P(a)$가 성립합니다. 이것을 **정초 귀납법**이라고 합니다.

보조정리 10.3.4. 정초성은 단순 성질입니다.

증명. $<$의 정초성은 타입 $\prod_{(a:A)} \mathsf{acc}(a)$이며, 각 $\mathsf{acc}(a)$가 단순 명제이므로 이 타입도 단순 명제입니다. □

예 10.3.5. 아마도 가장 익숙한 정초 관계는 $\mathbb{N}$ 위의 통상적인 엄격한 순서일 것입니다. 이것이 정초적임을 보이려면 각 $n : \mathbb{N}$에 대해 n이 접근 가능함을 보여야 합니다. 이는 $\mathbb{N}$ 에 대한 보통의 귀납법으로부터 "강한 귀납법"을 증명하는 통상적인 증명에 불과합니다.

구체적으로, $n : \mathbb{N}$에 대한 귀납법으로 모든 $k \leq n$에 대해 k가 접근 가능함을 증명합니다. 기저 사례는 단지 0이 접근 가능하다는 것이며, 0보다 엄격하게 작은 것은 없으므로 이는 공허하게 참입니다. 귀납 단계에서는 모든 $k \leq n$, 즉 모든 $k < n+1$에 대해 k가 접근 가능하다고 가정합니다. 따라서 정의에 의해 $n+1$도 접근 가능합니다.

모든 $n : \mathbb{N}$에 대해 $n < \mathsf{succ}(n)$만을 두면, 역시 정초적인 $\mathbb{N}$ 위의 또 다른 관계를 얻습니다. 이 관계의 정초성은 $\mathbb{N}$ 의 보통의 귀납 원리와 거의 정확히 같습니다.

예 10.3.6. $A : \mathsf{Set}$이고 $B : A \to \mathsf{Set}$가 집합들의 족이라고 합시다. §5.3에서 W-타입 $\mathsf{W}_{(a:A)}B(a)$가 다음의 단일 생성자에 의해 귀납적으로 생성된다는 것을 상기하십시오.

- $\mathsf{sup} : \prod_{(a:A)}(B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$

$\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$ 위의 관계 $<$를 두 번째 인자에 대한 재귀로 다음과 같이 정의합니다.

- 임의의 $a : A$와 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$에 대해, $w < \mathsf{sup}(a, f)$를 $w = f(b)$를 만족하는 $b : B(a)$가 단순히 존재한다는 의미로 정의합니다.

이제 $\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$에 대한 통상적인 귀납 원리를 사용하여, 모든 $w : \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$가 이 관계에 대해 접근 가능함을 증명합니다. 이는 $a : A$와 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)}B(x)$, 그리고 올림 $f' : \prod_{(b:B(a))} \mathsf{acc}(f(b))$가 주어졌다고 가정한다는 뜻입니다. 그런데 그러면 $<$의 정의에 의해 모든 $w < \mathsf{sup}(a, f)$에 대해 $\mathsf{acc}(w)$가 성립합니다. 따라서 $\mathsf{sup}(a, f)$는 접근 가능합니다.

정초성을 이용하면 재귀로 함수를 정의하고 귀납법으로 진술을 증명할 수 있으며, 다음이 그 한 예입니다. §3.5에서 $\mathcal{P}(B)$가 멱집합 $\mathcal{P}(B) :\equiv (B \to \mathsf{Prop})$를 나타낸다는 것을 상기하십시오.

보조정리 10.3.7. B가 집합이고 다음과 같은 함수가 주어져 있다고 합시다.

$$g : \mathcal{P}(B) \to B$$

그러면 $<$가 A 위의 정초 관계일 때, 모든 $a : A$에 대해 다음을 만족하는 함수 $f : A \to B$가 존재합니다.

$$f(a) = g\Big(\{\, f(a') \mid a' < a \,\} \Big).$$

(§10.1.2의 부분집합의 상에 대한 표기법을 사용하고 있습니다.)

증명. 먼저 모든 $a : A$와 $s : \mathsf{acc}(a)$에 대해 원소 $\bar{f}(a, s) : B$를 정의합니다. 귀납법에 의해, s가 각 $a' < a$에 증거 $s(a') : \mathsf{acc}(a')$를 할당하는 함수이고, 나아가 그러한 각 a'에 대해 원소 $\bar{f}(a', s(a')) : B$가 주어져 있다고 가정하면 충분합니다. 이 경우 다음과 같이 정의합니다.

$$\bar{f}(a, s) :\equiv g\Big(\{\, \bar{f}(a', s(a')) \mid a' < a \,\} \Big).$$

이제 $<$가 정초적이므로 함수 $w : \prod_{(a:A)} \mathsf{acc}(a)$가 존재합니다. 따라서 $f(a) :\equiv \bar{f}(a, w(a))$로 정의할 수 있습니다. □

고전 논리에서는 정초성을 더 잘 알려진 방식으로 재정식화할 수 있습니다. 이하에서는 부분집합 $B : \mathcal{P}(A)$가 빈 부분집합 $(\lambda x.\, \bot) : \mathcal{P}(X)$와 같지 않을 때 **비어 있지 않다** 고 합니다. 배중률을 가정하면 이것이 단순 거주, 즉 조건 $\exists(x : A).\, x \in B$와 동치임을 확인하는 일은 독자에게 맡깁니다.

보조정리 10.3.8. 배중률을 가정하면, $<$가 정초적일 필요충분조건은 비어 있지 않은 모든 부분집합 $B : \mathcal{P}(A)$가 극소 원소를 단순히 가지는 것입니다.

증명. 먼저 $<$가 정초적이라고 가정하고, $B \subseteq A$가 극소 원소를 갖지 않는 부분집합이라고 가정합시다. 즉, $a \in B$인 임의의 $a : A$에 대해 $b < a$이고 $b \in B$인 $b : A$가 단순히 존재합니다.

임의의 $a : A$와 $s : \mathsf{acc}(a)$에 대해 $a \notin B$임을 주장합니다. 귀납법에 의해, s는 각 $a' < a$에 증명 $s(a') : \mathsf{acc}(a')$를 대응시키는 함수이며, 나아가 그러한 각 a'에 대해 $a' \notin B$라고 가정할 수 있습니다. 만약 $a \in B$라면, 가정에 의해 $b \in B$인 $b < a$가 단순히 존재할 것이고, 이는 위의 가정에 모순됩니다. 따라서 $a \notin B$이며, 이로써 귀납법이 완성됩니다. $<$가 정초적이므로 모든 $a : A$에 대해 $a \notin B$입니다. 즉, B는 공집합입니다.

이제 공집합이 아닌 각 부분집합이 극소 원소를 단순히 갖는다고 가정합시다. $B = \{\, a : A \mid \neg\mathsf{acc}(a) \,\}$라고 합시다. 그러면 B가 공집합이 아닐 경우 B는 극소 원소를 단순히 갖습니다. 따라서 $a \in B$이면서 모든 $b < a$에 대해 $\mathsf{acc}(b)$가 성립하는 $a : A$가 단순히 존재합니다. 그런데 그렇다면 정의에 의해 (그리고 절단에 대한 귀납법에 의해) a는 단순히 접근 가능하고, 따라서 접근 가능하며, 이는 $a \in B$에 모순됩니다. 따라서 B는 공집합이고, 그러므로 $<$는 정초적입니다. □

정의 10.3.9. 집합 A 위의 정초 관계 $<$가 **외연적** 이라는 것은 임의의 $a, b : A$에 대해 다음이 성립한다는 것입니다.

$$\Big(\forall(c : A).\,(c < a) \Leftrightarrow (c < b)\Big) \to (a = b).$$

A가 집합이므로 외연성은 단순 명제라는 점에 유의하십시오. 이 "외연성" 개념은 함수 외연성과 무관하며, 동일성 타입의 외연성과도 무관합니다. 오히려 이는 고전적 집합론의 외연성 공리에 대한 "국소적" 대응물입니다.

정리 10.3.10. 외연적 정초 관계의 타입은 집합입니다.

증명. 유니발런스 공리에 의해, $(A, <)$가 외연적이고 정초적이며 $f : (A, <) \cong (A, <)$이면 $f = \mathsf{id}_A$임을 보이는 것으로 충분합니다. 모든 $a : A$에 대해 $f(a) = a$임을 $<$에 대한 귀납법으로 증명합니다. 귀납 가설은 모든 $a' < a$에 대해 $f(a') = a'$가 성립한다는 것입니다.

이제 A가 외연적이므로, $f(a) = a$를 결론짓기 위해서는 다음을 보이는 것으로 충분합니다.

$$\forall(c : A).\,(c < f(a)) \Leftrightarrow (c < a).$$

그런데 f가 자기동형사상이므로 $(c < a) \Leftrightarrow (f(c) < f(a))$가 성립합니다. 그리고 귀납 가설에 의해 $c < a$이면 $f(c) = c$이므로, $(c < a) \to (c < f(a))$입니다. 한편 $c < f(a)$이면 $f^{-1}(c) < a$이고, 따라서 다시 귀납 가설에 의해 $c = f(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$이므로 $c < a$입니다. 그러므로 임의의 $c : A$에 대해 $(c < a) \Leftrightarrow (c < f(a))$가 성립하고, 따라서 $f(a) = a$입니다. □

정의 10.3.11. $(A, <)$와 $(B, <)$가 외연적이고 정초적일 때, **시뮬레이션** 이란 다음을 만족하는 함수 $f : A \to B$입니다.

(i) $a < a'$이면 $f(a) < f(a')$이며,
(ii) 모든 $a : A$와 $b : B$에 대해, $b < f(a)$이면 $f(a') = b$인 $a' < a$가 단순히 존재합니다.

보조정리 10.3.12. 모든 시뮬레이션은 단사입니다.

증명. 임의의 $a, b : A$에 대해 $f(a) = f(b)$이면 $a = b$임을 이중 정초 귀납법으로 증명합니다. $a : A$에 대한 귀납 가설은 임의의 $a' < a$와 임의의 $b : B$에 대해 $f(a') = f(b)$이면 $a = b$라는 것입니다. $b : A$에 대한 내부 귀납 가설은 임의의 $b' < b$에 대해 $f(a) = f(b')$이면 $a = b'$라는 것입니다.

$f(a) = f(b)$라고 가정합시다. 이때 $a = b$임을 보여야 합니다. 외연성에 의해, 임의의 $c : A$에 대해 $(c < a) \Leftrightarrow (c < b)$임을 보이는 것으로 충분합니다. $c < a$이면 정의 10.3.11(i)에 의해 $f(c) < f(a)$입니다. 따라서 $f(c) < f(b)$이므로, 정의 10.3.11(ii)에 의해 $c' < b$이고 $f(c) = f(c')$인 $c' : A$가 단순히 존재합니다. a에 대한 귀납 가설에 의해 $c = c'$이고, 따라서 $c < b$입니다. 반대 방향의 논증도 대칭적입니다. □

특히 이는 정의 10.3.11(ii)에서 "단순히"라는 단어를 의미의 변화 없이 생략할 수 있음을 함의합니다.

따름정리 10.3.13. $f : A \to B$가 시뮬레이션이면, 모든 $a : A$와 $b : B$에 대해 $b < f(a)$일 때 $f(a') = b$인 $a' < a$가 순수하게 존재합니다.

증명. f가 단사이므로 $\sum_{(a:A)}(f(a) = b)$는 단순 명제입니다. □

$c \in C$와 $b < c$로부터 $b \in C$가 따라 나올 때, 부분집합 $C : \mathcal{P}(B)$를 **시작 절편** 이라고 합니다. 시뮬레이션의 상은 반드시 시작 절편이고, 반대로 임의의 시작 절편의 포함은 시뮬레이션입니다. 따라서 유니벌런스에 의해 모든 시뮬레이션 $A \to B$는 B의 어떤 시작 절편의 포함과 같습니다.

정리 10.3.14. 집합 A에 대해 $P(A)$를 A 위의 외연적 정초 관계의 타입이라고 합시다. $<_A : P(A)$, $<_B : P(B)$, $f : A \to B$일 때, $H_{<_A <_B}(f)$를 f가 시뮬레이션이라는 단순 명제라고 합시다. 그러면 (P, H)는 §9.8의 의미에서 $\mathcal{S}et$ 위의 표준적인 구조 개념입니다.

증명. 항등 사상이 시뮬레이션이라는 것과 시뮬레이션의 합성이 시뮬레이션이라는 것의 확인은 독자에게 맡기겠습니다. 따라서 구조 개념을 얻습니다. 표준성을 위해서는, $<$와 $\prec$가 A 위의 두 외연적 정초 관계이고 id_A가 양방향으로 시뮬레이션이면 $<$와 $\prec$가 같음을 보여야 합니다. 외연성과 정초성은 단순 명제이므로, 이를 위해서는 $\forall(a, b : A).\,(a < b) \Leftrightarrow (a \prec b)$를 얻는 것으로 충분합니다. 그런데 이는 id_A에 대한 정의 10.3.11(i)로부터 따라 나옵니다. □

따름정리 10.3.15. 외연적 정초 관계를 갖춘 집합을 대상으로 하고 시뮬레이션을 사상으로 하는 범주가 존재합니다.

사실 이 범주는 부분 순서 집합입니다.

보조정리 10.3.16. 외연적이고 정초적인 $(A, <)$와 $(B, <)$에 대해, 시뮬레이션 $f : A \to B$는 많아야 하나 존재합니다.

증명. $f, g : A \to B$가 시뮬레이션이라고 가정합시다. 시뮬레이션이라는 것은 단순 성질이므로 $\forall(a : A).\,(f(a) = g(a))$임을 보이면 충분합니다. $<$에 대한 귀납법에 의해, 모든 $a' < a$에 대하여 $f(a') = g(a')$라고 가정할 수 있습니다. 또한 B의 외연성에 의해, $f(a) = g(a)$를 얻으려면 $\forall(b : B).\,(b < f(a)) \Leftrightarrow (b < g(a))$를 얻으면 충분합니다.

그런데 f는 시뮬레이션이므로, $b < f(a)$이면 $f(a') = b$인 $a' < a$가 존재합니다. 귀납 가설에 의해 $g(a') = b$도 성립하므로 $b < g(a)$입니다. 반대 방향의 논증도 대칭적입니다. □

따라서 A와 B에 외연적 정초 관계가 주어져 있을 때, 시뮬레이션 $f : A \to B$가 존재함을 뜻하는 의미로 $A \leq B$라고 쓸 수 있습니다. 따름정리 10.3.15에 의해 $A \leq B$이고 $B \leq A$이면 $A = B$입니다.

정의 10.3.17. **순서수** 란 추이적인, 즉 $\forall(a,b,c:A).(a<b)\to(b<c)\to(a<c)$를 만족하는 외연적 정초 관계를 가진 집합 A입니다.

예 10.3.18. 물론 $\mathbb{N}$ 위의 통상적인 엄격 순서는 추이적입니다. 이 순서가 외연적이기도 하다는 것도 쉽게 알 수 있으므로, 이는 순서수입니다. 관례에 따라 이 순서수를 ω로 나타냅니다.

순서수들의 타입을 Ord 로 나타냅시다. 앞의 결과들에 의해 Ord 는 집합이며 자연스러운 부분 순서를 가집니다. 이제 Ord 가 정초 관계도 가진다는 것을 보이겠습니다.

A가 순서수이고 $a:A$일 때, $A_{/a}:\equiv\{\,b:A\mid b<a\,\}$가 시작 절편을 나타낸다고 합시다. 순서수로서 $A_{/a}=A_{/b}$이면, (시뮬레이션들은 부분 순서 집합을 이루므로) 그 동형사상은 A로의 포함들을 보존해야 하고, 따라서 두 절편은 A의 부분집합으로서 같다는 점에 유의하십시오. 그러므로 A가 외연적이므로 $a=b$입니다. 따라서 함수 $a\mapsto A_{/a}$는 단사 $A\to\mathsf{Ord}$입니다.

정의 10.3.19. 순서수 A와 B에 대하여, $A=B_{/b}$인 $b:B$가 존재하면 시뮬레이션 $f:A\to B$를 **유계**라고 합니다.

위의 논의에 의해 그러한 b는 존재한다면 유일하므로, 유계성은 단순 성질입니다.

A에서 B로의 유계 시뮬레이션이 존재하면 $A<B$라고 씁니다. 시뮬레이션은 유일하므로 $A<B$ 역시 단순 명제입니다.

정리 10.3.20. $(\mathsf{Ord},<)$는 순서수입니다.

더 정확히 말하면, 이 정리는 한 유니버스에 속하는 순서수들의 타입 $\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}_i}$ 자체가 바로 다음 상위 유니버스의 순서수라는 것, 즉 $(\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}_i},<):\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}_{i+1}}$ 임을 말합니다.

증명. A를 순서수라고 합시다. 먼저 모든 $a:A$에 대하여 $A_{/a}$가 (Ord 에서) 접근 가능함을 보이겠습니다. A에 대한 정초 귀납법에 따라, 모든 $b<a$에 대하여 $A_{/b}$가 접근 가능하다고 가정합시다. 접근 가능성의 정의에 의해, 모든 $B<A_{/a}$에 대하여 B가 Ord 에서 접근 가능함을 보여야 합니다. 그런데 $B<A_{/a}$이면 $B=(A_{/a})_{/b}=A_{/b}$인 어떤 $b<a$가 존재하며, 이는 귀납 가설에 의해 접근 가능합니다. 따라서 모든 $a:A$에 대하여 $A_{/a}$는 접근 가능합니다.

이제 A가 Ord 에서 접근 가능함을 보이려면, 정의에 의해 모든 $B<A$에 대하여 B가 접근 가능함을 보여야 합니다. 그런데 앞에서와 같이 $B<A$는 어떤 $a:A$에 대하여 $B=A_{/a}$라는 뜻이며, 이는 방금 증명한 대로 접근 가능합니다. 따라서 Ord 는 정초되어 있습니다.

외연성을 보이기 위해, A와 B가 $\prod_{(C:\mathsf{Ord})}(C<A)\Leftrightarrow(C<B).$를 만족하는 순서수라고 가정합시다. 그러면 모든 $a:A$에 대해 $A_{/a}<A$이므로 $A_{/a}<B$이고, 따라서 $A_{/a}=B_{/b}$인 $b:B$가 존재합니다. 각 a를 대응하는 b로 보내는 $f:A\to B$를 정의합니다. f가 동형사상임은 쉽게 확인할 수 있습니다. 따라서 $A\cong B$이고, 유니밸런스에 의해 $A=B$입니다.

마지막으로, $<$가 추이적임은 쉽게 알 수 있습니다. □

Ord 를 순서수로 다루는 것은 흔히 매우 편리하지만, 함정도 있습니다. 예를 들어, 유니버스가 어떻게 사용되는지에 주의를 기울이면서 다음 보조정리를 살펴봅시다.

보조정리 10.3.21. $\mathcal{U}$ 를 유니버스라고 합시다. 임의의 $A:\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}}$에 대하여 $A<B$인 $B:\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}}$가 존재합니다.

증명. 원소 $\star:\mathbf{1}$이 A의 모든 원소보다 크도록 하여 $B=A+\mathbf{1}$이라고 합시다. 그러면 B는 순서수이며 $A\cong B_{/\star}$임을 쉽게 알 수 있습니다. □

보조정리 10.3.21의 증명에서 구성된 순서수 B를 A의 **후속자**라고 부릅니다.

이 보조정리는 임의의 특정되지 않은 유니버스를 나타내기 위해 $\mathcal{U}$ 를 사용하는 "전형적으로 모호한" 방식의 잠재적 함정을 보여 줍니다. 이 보조정리의 다음과 같은 다른 증명을 살펴봅시다.

보조정리 10.3.21의 또 다른 그럴듯해 보이는 증명. $C < A$일 필요충분조건은 어떤 $a : A$에 대해 $C = A_{/a}$인 것임에 유의하십시오. 이로부터 동형사상 $A \cong \mathsf{Ord}_{/A}$가 주어지므로 $A < \mathsf{Ord}$입니다. 따라서 $B :\equiv \mathsf{Ord}$로 잡을 수 있습니다. □

보조정리 10.3.21를 전형적 모호성 방식으로 서술했다면 두 번째 증명도 유효했을 것입니다. 그러나 그렇게 얻은 보조정리는 덜 유용할 것입니다. 두 번째 증명은 보조정리 서술에서 두 번째 "Ord"가 첫 번째보다 더 높은 유니버스 레벨을 가리키도록 제약하기 때문입니다. 첫 번째 증명은 두 유니버스가 같은 것을 허용합니다.

다음 보조정리에도 비슷한 논의가 적용됩니다. 이 보조정리는 임의의 $A : \mathsf{Ord}$에 대해 $A \leq \mathsf{Ord}$임을 관찰하여 덜 유용한 방식으로 증명할 수도 있습니다.

보조정리 10.3.22. $\mathcal{U}$ 를 유니버스라고 합시다. 임의의 $X : \mathcal{U}$와 $F : X \to \mathsf{Ord}_{\mathcal{U}}$에 대해, 모든 $x : X$에 대해 $Fx \leq B$를 만족하는 $B : \mathsf{Ord}_{\mathcal{U}}$가 존재합니다.

증명. B를 다음과 같이 정의되는 $\sum_{(x:X)} Fx$ 위의 동치 관계 $\sim$에 의한 집합 몫(주 6.10.1 참조)이라고 합시다:

$$(x, y) \sim (x', y') \ :\equiv \ \Big((Fx)_{/y} \cong (Fx')_{/y'}\Big).$$

$(Fx)_{/y} < (Fx')_{/y'}$이면 $(x, y) < (x', y')$로 정의합니다. 이는 분명히 몫 위로 내려가며, B를 순서수로 만든다는 것을 알 수 있습니다. 또한 각 $x : X$에 대해 유도된 사상 $Fx \to B$는 시뮬레이션입니다. □

10.4 고전적 정렬순서

이제 우리의 순서수가 더 익숙한 고전적 정렬순서와 동치임을 보이겠습니다.

보조정리 10.4.1. 배중률을 가정하면, 모든 순서수는 삼분적입니다:

$$\forall (a, b : A).\ (a < b) \vee (a = b) \vee (b < a).$$

증명. a에 대한 귀납법에 의해, 모든 $a' < a$와 모든 $b' : A$에 대해 $(a' < b') \vee (a' = b') \vee (b' < a')$가 성립한다고 가정할 수 있습니다. 이제 b에 대한 귀납법에 의해, 모든 $b' < b$에 대해 $(a < b') \vee (a = b') \vee (b' < a)$가 성립한다고 가정할 수 있습니다.

배중률에 의해, $a < b'$를 만족하는 $b' < b$가 단순히 존재하거나, $a = b'$를 만족하는 $b' < b$가 단순히 존재하거나, 모든 $b' < b$에 대해 $b' < a$가 성립합니다. 첫 번째 경우에는 추이성에 의해 단순히 $a < b$가 성립하며, 이것은 단순 명제이므로 $a < b$가 성립합니다. 마찬가지로 두 번째 경우에는 수송에 의해 $a < b$가 성립합니다. 따라서 $\forall (b' : A).\ (b' < b) \to (b' < a)$라고 가정합시다.

이제 마찬가지로, $b < a'$를 만족하는 $a' < a$가 단순히 존재하거나, $a' = b$를 만족하는 $a' < a$가 단순히 존재하거나, 모든 $a' < a$에 대해 $a' < b$가 성립합니다. 첫 번째와 두 번째 경우에는 $b < a$이므로, $\forall (a' : A).\ (a' < a) \to (a' < b)$라고 가정할 수 있습니다. 그런데 외연성에 의해, 이제 우리의 두 가정은 $a = b$를 함의합니다. □

보조정리 10.4.2. 정초 관계는 순환을 포함하지 않습니다. 즉,

$$\forall(n : \mathbb{N}).\, \forall(a : \mathbb{N}_n \to A).\, \neg\Big((a_0 < a_1) \wedge \cdots \wedge (a_{n-1} < a_n) \wedge (a_n < a_0)\Big).$$

증명. $a : A$에 대한 귀납법으로 a를 포함하는 순환이 없음을 증명합니다. 따라서 귀납법에 의해 모든 $a' < a$에 대해 a'를 포함하는 순환이 없다고 가정합시다. 그런데 a를 포함하는 임의의 순환에는 a보다 작으면서 같은 순환에 포함된 원소가 존재합니다. □

특히 정초 관계는 반드시 **비반사적**이어야 합니다. 즉, 모든 a에 대해 $\neg(a < a)$ 입니다.

정리 10.4.3. 배중률을 가정하면, $(A, <)$가 순서수일 필요충분조건은 공집합이 아닌 모든 부분집합 $B \subseteq A$가 최소 원소를 갖는 것입니다.

증명. A가 순서수이면, 보조정리 10.3.8에 의해 공집합이 아닌 모든 부분집합은 단순히 극소 원소를 갖습니다. 그런데 삼분성은 임의의 극소 원소가 최소 원소임을 함의합니다. 또한 최소 원소는 존재할 경우 유일하므로, 최소 원소를 단순히 갖는 것은 최소 원소를 갖는 것과 다름없습니다.

역으로, 공집합이 아닌 모든 부분집합이 최소 원소를 가지면, 보조정리 10.3.8에 의해 A는 정초적입니다. 또한 삼분성도 성립하는데, 임의의 a, b에 대해 부분집합 $\{a, b\} :\equiv \{x : A \mid x = a \vee x = b\}$가 단순히 최소 원소를 가지며, 그 원소는 a 또는 b여야 하기 때문입니다. 이는 추이성을 함의하는데, $a < b$이고 $b < c$이면 $a = c$와 $c < a$ 중 어느 쪽이든 순환을 만들어 내기 때문입니다. 마찬가지로 이는 외연성을 함의합니다. $\forall(c : A).\, (c < a) \Leftrightarrow (c < b)$이면, $a < b$는 (c를 a로 두면) $a < a$를 함의하는데 이는 순환이고, $b < a$인 경우도 마찬가지이므로 $a = b$이기 때문입니다. □

고전 수학에서는 정리 10.4.3의 특성화를 정렬순서의 정의로 삼으며, 순서수는 정렬순서의 동형사상 류들에 대한 표준적인 대표원들의 집합입니다. 우리의 맥락에서는 구조 동일성 원리에 의해 그러한 대표원을 찾을 필요가 없습니다. 어떤 정렬순서든 다른 정렬순서와 똑같이 좋습니다.

이제 선택 공리의 귀결을 살펴보겠습니다. 임의의 집합 X에 대해, $\mathcal{P}_+(X)$가 X의 단순히 거주된 부분집합들의 타입을 나타낸다고 합시다:

$$\mathcal{P}_+(X) :\equiv \{\, Y : \mathcal{P}(X) \mid \exists(x : X).\, x \in Y \,\}.$$

배중률을 가정하면, 이는 동치적으로 X의 공집합이 아닌 부분집합들의 타입이며, $\mathcal{P}(X) \simeq (\mathcal{P}_+(X)) + \mathbf{1}$가 성립합니다.

정리 10.4.4. 배중률을 가정하면, 다음은 서로 동치입니다.

(i) 모든 집합 X에 대해, 모든 $Y : \mathcal{P}_+(X)$에 대해 $f(Y) \in Y$를 만족하는 함수 $f : \mathcal{P}_+(X) \to X$가 단순히 존재합니다.

(ii) 모든 집합은 단순히 순서수의 구조를 허용합니다.

물론, (i)은 선택 공리의 표준적인 고전적 형태입니다. 연습문제 10.10을 참조하십시오.

증명. 한쪽 방향은 쉽습니다. (ii)를 가정합시다. 단순 명제인 (i)을 증명하는 것이 목표이므로, A가 순서수라고 가정할 수 있습니다. 그러면 $f(B)$를 B의 최소 원소로 정의할 수 있습니다.

이제 (i)을 가정합시다. 앞에서와 마찬가지로, (ii)는 단순 명제이므로 그러한 f가 주어졌다고 가정할 수 있습니다. f를 다음 함수로

$$\bar{f} : \mathcal{P}(X) \simeq (\mathcal{P}_+(X)) + \mathbf{1} \longrightarrow X + \mathbf{1}$$

자명한 방식으로 확장합니다. 이제 임의의 순서수 A에 대해 정초 재귀로 $g_A : A \to X + \mathbf{1}$를 다음과 같이 정의할 수 있습니다:

$$g_A(a) :\equiv \bar{f}\Big(X \setminus \{\, g_A(b) \mid (b < a) \wedge (g_A(b) \in X) \,\}\Big)$$

(여기서 X는 자명한 방식으로 $X + \mathbf{1}$의 부분집합으로 간주합니다).

$A' :\equiv \{\, a : A \mid g_A(a) \in X \,\}$를 $X \subseteq X + \mathbf{1}$의 역상이라고 합시다. 그러면 제한 $g'_A : A' \to X$가 단사임을 주장합니다. $a \neq a'$인 $a, a' : A$가 주어지면, 삼분성에 의해 일반성을 잃지 않고 $a' < a$라고 가정할 수 있기 때문입니다. 따라서 $g_A(a') \in \{\, g_A(b) \mid b < a \,\}$이고, 모든 Y에 대해 $f(Y) \in Y$이므로 $g_A(a) \neq g_A(a')$입니다.

또한 A'는 A의 시작 절편입니다. $g_A(a)$가 $\mathbf{1}$에 속하는 것은 $\{\, g_A(b) \mid b < a \,\} = X$인 것과 동치이며, 이것이 성립하면 임의의 $a' > a$에 대해서도 성립하기 때문입니다. 따라서 A' 자체도 순서수입니다.

마지막으로, Ord는 순서수이므로 $A :\equiv \mathsf{Ord}$로 잡을 수 있습니다. X'를 $g'_{\mathsf{Ord}} : \mathsf{Ord}' \to X$의 상이라고 합시다. 그러면 g'_{Ord}의 역함수로부터 단사 함수 $H : X' \to \mathsf{Ord}$를 얻습니다. 보조정리 10.3.22에 의해 모든 $x : X'$에 대해 $Hx \leq C$인 순서수 C가 존재합니다. 그러면 보조정리 10.3.21에 의해 $C < D$인 또 다른 순서수 D가 존재하므로, 모든 $x : X'$에 대해 $Hx < D$입니다. 이제 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} g_{\mathsf{Ord}}(D) &= \bar{f}\left(X \setminus \left\{\, g_{\mathsf{Ord}}(B) \;\middle|\; B < D \wedge (g_{\mathsf{Ord}}(B) \in X) \,\right\}\right) \\ &= \bar{f}\left(X \setminus \left\{\, g_{\mathsf{Ord}}(B) \;\middle|\; g_{\mathsf{Ord}}(B) \in X \,\right\}\right) \end{aligned}$$

$B : \mathsf{Ord}$이고 $(g_{\mathsf{Ord}}(B) \in X)$이면 어떤 $x : X'$에 대해 $B = Hx$이므로 $B < D$이기 때문입니다. 이제 만약 다음 집합

$$\left\{\, g_{\mathsf{Ord}}(B) \;\middle|\; g_{\mathsf{Ord}}(B) \in X \,\right\}$$

이 X 전체가 아니라면, $g_{\mathsf{Ord}}(D)$는 X에 속하지만 이 부분집합에는 속하지 않을 것이고, D 자체가 B의 가능한 값이므로 이는 모순입니다. 따라서 이 집합은 X 전체여야 하며, 그러므로 g'_{Ord}는 단사일 뿐만 아니라 전사이기도 합니다. 따라서 Ord' 위의 순서수 구조를 X로 수송할 수 있습니다. □

주 10.4.5. 보조정리 10.3.21나 보조정리 10.3.22에 대해 잘못된 증명을 제시했다면, 그 결과로 얻어지는 정리 10.4.4의 증명은 유효하지 않았을 것입니다. 유니버스 레벨을 일관되게 부여할 방법이 없었을 것이기 때문입니다. 실제로는 X'가 (동치를 제외하고) X와 같은 유니버스에 속하도록 보장하기 위해 (LEM 로부터 따라 나오는) 명제적 크기 재조정이 필요합니다.

따름정리 10.4.6. 선택 공리를 가정하면, (순서 구조를 잊는) 함수 $\mathsf{Ord} \to \mathsf{Set}$는 전사입니다.

Ord는 집합이지만 Set는 1-타입이라는 점에 유의하십시오. 일반적으로 1-타입이 집합으로부터의 전사 함수를 가질 이유는 없습니다. 선택 공리조차도 모든 1-타입이 그러하다는 것을 함의하지는 않는 것으로 보이지만(연습문제 7.9도 참고하십시오), §9.8에서와 같은 구조들의 범주의 대상 타입처럼 Set 로부터 구성된 1-타입에 대해서는 그러하다는 것을 쉽게 함의합니다. 다음 따름정리도 그러한 범주들에 적용됩니다.

따름정리 10.4.7. AC 를 가정하면, 어떤 엄격한 범주로부터 $\mathcal{S}et$ 로 가는 약한 동치 함자가 존재합니다.

증명. $X_0 :\equiv \mathsf{Ord}$로 두고, $A, B : X_0$에 대해 $\hom_X(A, B) :\equiv (A \to B)$로 둡시다. 그러면 Ord 가 집합이므로 X는 엄격한 범주이며, 위의 전사 함수 $X_0 \to \mathsf{Set}$는 약한 동치 함자 $X \to \mathcal{S}et$로 확장됩니다. □

이제 §10.2에서 또 다른 전사 함수 $|-|_0 : \mathsf{Set} \to \mathsf{Card}$가 있었고, 따라서 각 순서수를 그 기수로 보내는 합성 전사 함수 $\mathsf{Ord} \to \mathsf{Card}$가 있음을 상기하십시오.

정리 10.4.8. AC 를 가정하면, 전사 함수 $\mathsf{Ord} \to \mathsf{Card}$는 단면을 가집니다.

증명. 이에 대한 쉽지만 잘못된 증명이 있습니다. Ord 와 Card 가 모두 집합이므로, AC 에 의해 이들 사이의 임의의 전사는 단순히 단면을 가집니다. 그러나 실제로 우리는 표준적인 지정된 단면을 가집니다. Ord 는 순서수이므로 그 공집합이 아닌 모든 부분집합은 유일하게 지정된 최소 원소를 가집니다. 따라서 각 기수를 대응하는 섬유의 최소 원소로 보내는 사상을 정의할 수 있습니다. □

집합론에서는 전통적으로 기수를 Ord 안의 그 상, 즉 그 기수를 가지는 최소 순서수와 동일시합니다.

이로부터 Card 역시 표준적으로 순서수 구조를, 사실은 Ord 와 동형인 순서수 구조를 가진다는 것이 따라 나옵니다. 구체적으로, 정초 재귀로 함수 $\aleph : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$를 정의하되, $\aleph(A)$가 모든 $a : A$에 대해 $\aleph(A_{/a})$보다 큰 기수를 가지는 최소 순서수가 되도록 합니다. 그러면 (AC 를 가정할 때) $\aleph$의 상은 정확히 Card 의 상입니다.

10.5 누적 위계

주어진 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의 모든 집합들의 누적 위계 V를 고차 귀납적 타입으로 정의할 수 있으며, 이때 V는 다시 (더 큰 유니버스 $\mathcal{U}'$ 안의) 집합이 되고, 집합론의 통상적인 법칙들을 만족하는 이항 "소속" 관계 $x \in y$를 갖추게 됩니다.

정의 10.5.1. 타입 유니버스 $\mathcal{U}$에 대한 **누적 위계** V는 다음 생성자들로 생성되는 고차 귀납적 타입입니다.

(i) 모든 $A : \mathcal{U}$와 $f : A \to V$에 대해 원소 $\mathsf{set}(A, f) : V$가 있습니다.

(ii) $f : A \to V$와 $g : B \to V$가 다음을 만족하는 모든 $A, B : \mathcal{U}$에 대해

$$\big(\forall(a : A).\, \exists(b : B).\, f(a) =_V g(b)\big) \wedge \big(\forall(b : B).\, \exists(a : A).\, f(a) =_V g(b)\big) \tag{10.5.2}$$

경로 $\mathsf{set}(A, f) =_V \mathsf{set}(B, g)$가 있습니다.

(iii) 0-절단 생성자: 모든 $x, y : V$와 $p, q : x = y$에 대하여 $p = q$입니다.

집합론의 언어로 $\mathsf{set}(A, f)$는 f에 의한 A의 상인 (고전적 집합론의 의미에서의) 집합, 즉 $\{\, f(a) \mid a \in A \,\}$로 이해할 수 있습니다. 그러나 이 표기법은 부분 타입에 대한 우리의 표기법과 충돌하므로 사용하지 않겠습니다(단, 아래의 (10.5.3)과 정의 10.5.7를 참고하십시오).

위계 V는 빈 사상 $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(V) : \mathbf{0} \to V$로부터 부트스트랩되며, 이 사상은 공집합을 $\emptyset = \mathsf{set}(\mathbf{0}, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(V))$로 줍니다. 그다음 한원소 $\{\emptyset\}$는 $\star \mapsto \emptyset$로 정의된 $\mathbf{1} \to V$를 통해 V에 들어가며, 이후도 마찬가지입니다. (추가적인 점 생성자를 더함으로써 임의의 "원자" 또는 "원초원소"들의 집합을 포함하도록 이 정의를 변형할 수도 있습니다.) 타입 V는 기저 유니버스 $\mathcal{U}$와 같은 유니버스에 속합니다.

V의 두 번째 생성자는 지금까지 본 어떤 것과도 다른 형태를 가집니다. 이 생성자에는 V 안의 경로(§6.9에서 다소 미심쩍다고 말한 것)뿐만 아니라 그 경로들의 합의 절단까지 관여합니다. 이것은 §6.13에서 설명한 일반적인 틀에 분명히 들어맞지 않으며, 따라서 그 귀납 원리가 무엇이어야 하는지 명확하지 않을 수 있습니다. 다행히도 §6.9에서 제시한 0-절단의 첫 번째 정의와 마찬가지로, 보조

적인 고차 귀납적 타입을 사용하여 이를 다시 표현할 수 있습니다. 세부 사항은 독자에게 맡깁니다 (연습문제 10.11를 참조하십시오).

결국 (패턴 매칭의 언어로 쓴) V에 대한 귀납 원리에 따르면, $P : V \to \mathsf{Set}$가 주어졌을 때 $h : \prod_{(x:V)} P(x)$를 구성하려면 다음을 제시하는 것으로 충분합니다.

(i) 임의의 $f : A \to V$에 대하여, 모든 $a : A$에 대한 $h(f(a))$가 주어졌다고 가정하고 $h(\mathsf{set}(A, f))$를 구성하십시오.

(ii) $f : A \to V$와 $g : B \to V$가 (10.5.2)를 만족하면 $h(\mathsf{set}(A, f)) =^P_q h(\mathsf{set}(B, g))$ 임을 검증하십시오. 여기서 q는 V의 두 번째 생성자와 (10.5.2)로부터 생기는 경로이며, 귀납적으로 모든 $a : A$와 $b : B$에 대하여 $h(f(a))$와 $h(g(b))$가 정의되어 있고 다음 조건이 성립한다고 가정합니다.

$$\begin{aligned} &\big(\forall(a : A).\, \exists(b : B).\, \exists(p : f(a) = g(b)).\, h(f(a)) =^P_p h(g(b))\big) \\ \wedge\quad &\big(\forall(b : B).\, \exists(a : A).\, \exists(p : f(a) = g(b)).\, h(f(a)) =^P_p h(g(b))\big) \end{aligned}$$

두 번째 조항은 정의되는 사상이 (10.5.2)에서 도입된 경로를 보존해야 함을 확인합니다. 패턴 매칭을 사용하여 고차 귀납 원리를 서술할 때 늘 그렇듯이, 이것은 동어반복처럼 보일 수 있지만 그렇지 않습니다. 요점은 "$h(f(a))$"가 본질적으로 그 내부를 들여다볼 수 없는 형식적 기호이며, $h(\mathsf{set}(A, f))$는 이 기호를 사용하여 정의되어야 한다는 것입니다. 따라서 두 번째 조항에서는 적절한 경우 이러한 형식적 기호들이 같다고 가정하고, 첫 번째 조항의 구성으로 얻어지는 원소들 역시 같음을 검증합니다. 물론 P가 단순 명제들의 족이라면 두 번째 조항은 자동으로 성립합니다.

귀납법에 의해, 각 $v : V$에 대하여 $v = \mathsf{set}(A, f)$를 만족하는 $A : \mathcal{U}$와 $f : A \to V$가 단순히 존재함에 주목하십시오. 따라서 다음과 같이 두어 V 위의 **소속 관계** $x \in v$를 정의하려고 시도하는 것은 합리적입니다.

$$(x \in \mathsf{set}(A, f)) :\equiv (\exists(a : A).\, x = f(a)).$$

이 정의가 타당함을 확인하려면 V의 재귀 원리를 사용해야 합니다. 따라서 (10.5.2)를 통해 구성된 경로 $\mathsf{set}(A, f) = \mathsf{set}(B, g)$가 있다고 가정합시다. $x \in \mathsf{set}(A, f)$이면 $x = f(a)$를 만족하는 $a : A$가 단순히 존재하는데, (10.5.2)에 의해 $f(a) = g(b)$를 만족하는 $b : B$가 단순히 존재하므로 $x = g(b)$이고 $x \in \mathsf{set}(B, g)$입니다. 역방향도 대칭적입니다.

부분집합 관계 $x \subseteq y$는 V 위에서 통상적인 방식대로 다음과 같이 정의됩니다.

$$(x \subseteq y) :\equiv \forall(z : V).\, z \in x \Rightarrow z \in y.$$

클래스는 V 위의 단순 술어로 간주할 수 있습니다. 다음을 만족하는 $v : V$가 단순히 존재하면 클래스 $C : V \to \mathsf{Prop}$를 V-**집합** 이라고 할 수 있습니다.

$$\forall(x : V).\, C(x) \Leftrightarrow x \in v.$$

클래스에 대해 관례적인 표기법을 사용할 수도 있으며, 이는 부분 타입에 대한 우리의 표준 표기법과 일치합니다.

$$\{\, x \mid C(x) \,\} :\equiv \lambda x.\, C(x). \tag{10.5.3}$$

클래스 $C : V \to \mathsf{Prop}$의 모든 값 $C(x)$가 $\mathcal{U}$에 속할 때, 구체적으로 $C : V \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$일 때, 이 클래스를 $\mathcal{U}$-**작다** 고 부르겠습니다. V는 그것을 구성하는 데 사용된 기저 유니버스 $\mathcal{U}$와 같은 유니버스 $\mathcal{U}'$에 속하므로, 임의의 $v, w : V$에 대한 동일성 타입 $v =_V w$에 대해서도 마찬가지입니다. 따라서 명제적 크기 재조정이 없는 상황에서 잘 작동하는 이론을 얻기 위해서는, 동일성 관계의 $\mathcal{U}$-작은 "크기 재조정"을 갖추는 것이 편리하며, 이는 다음과 같이 귀납으로 정의할 수 있습니다.

정의 10.5.4. **쌍시뮬레이션** 관계를 다음과 같이 정의합니다.

$$\sim : V \times V \longrightarrow \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$$

이 정의는 V에 대한 이중 귀납법으로 이루어지며, $\mathsf{set}(A,f)$와 $\mathsf{set}(B,g)$에 대하여 다음과 같이 둡니다.

$$\mathsf{set}(A,f) \sim \mathsf{set}(B,g) :\equiv \big(\forall(a:A).\exists(b:B).f(a) \sim g(b)\big) \wedge \big(\forall(b:B).\exists(a:A).f(a) \sim g(b)\big).$$

이 정의가 올바름을 검증하려면, 이것이 (10.5.2)를 통해 구성된 경로 $\mathsf{set}(A,f) = \mathsf{set}(B,g)$를 보존한다는 것(이는 자명합니다)과 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$가 집합이라는 것(실제로 그렇습니다)만 확인하면 됩니다. 구성에 의해 $u \sim v$가 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$에 속함에 유의하십시오.

보조정리 10.5.5. 임의의 $u,v:V$에 대하여 $(u =_V v) = (u \sim v)$입니다.

증명. 간단한 귀납으로 $\sim$이 반사적임을 보일 수 있으므로, 수송에 의해 $(u =_V v) \to (u \sim v)$를 얻습니다. 따라서 $(u \sim v) \to (u =_V v)$임을 보이는 일만 남습니다. u와 v에 대한 귀납에 의해, 이들이 각각 $\mathsf{set}(A,f)$와 $\mathsf{set}(B,g)$라고 가정할 수 있습니다. ($(u \sim v) \to (u =_V v)$는 단순 명제이므로 V의 경로 생성자는 무시할 수 있습니다.) 그러면 정의에 의해 $\mathsf{set}(A,f) \sim \mathsf{set}(B,g)$는 $(\forall(a:A).\exists(b:B).f(a) \sim g(b))$와 그 역을 함의합니다. 그런데 귀납 가설에 의해 $(\forall(a:A).\exists(b:B).f(a) = g(b))$와 그 역이 성립합니다. 따라서 V의 경로 생성자에 의해 $\mathsf{set}(A,f) =_V \mathsf{set}(B,g)$를 얻습니다. □

V의 0-절단 생성자를 생략하고, 쌍시뮬레이션에 정리 7.2.2를 적용하여 V가 0-절단되어 있음을 증명할 수 있다고 생각할 수도 있습니다. 그러나 보조정리 10.5.5의 증명에서 우리는 V가 0-절단되어 있다는 사실을 사용하여 $(u \sim v) \to (u =_V v)$가 단순 명제임을 결론지었고, 그 덕분에 귀납에서 u와 v가 $\mathsf{set}(A,f)$와 $\mathsf{set}(B,g)$라고 가정하는 것으로 충분했습니다.

이제 크기 조정된 동일성 관계를 사용하여 다음의 유용한 원리를 얻을 수 있습니다.

보조정리 10.5.6. 모든 $u:V$에 대하여 $u = \mathsf{set}(A_u,m_u)$를 만족하는, 주어진 $A_u:\mathcal{U}$와 단사 사상 $m_u : A_u \rightarrowtail V$가 존재합니다.

증명. 임의의 표시 $u = \mathsf{set}(A,f)$를 택하고, $f:A \to V$를 전사 사상 다음에 단사 사상이 오는 형태로 분해하십시오:

$$f = m_u \circ e_u : A \twoheadrightarrow A_u \rightarrowtail V.$$

A_u가 여전히 $\mathcal{U}$에 속하기만 하면 $u = \mathsf{set}(A_u,m_u)$임은 분명하며, 이는 $e_u : A \twoheadrightarrow A_u$의 핵이 $\mathcal{U}$에 속하면 성립합니다. 그런데 $e_u : A \twoheadrightarrow A_u$의 핵은 V 위의 동일성을 $f:A \to V$를 따라 당긴 당김이며, 이는 방금 동치를 제외하고 $\mathcal{U}$-작음을 보였습니다. 이제 $u:V$로부터 $m_u : A_u \rightarrowtail V$이고 $u = \mathsf{set}(A_u,m_u)$인 쌍 (A_u,m_u)를 구성하는 이 방식은 V 위에서의 동치를 제외하고 유일하며, 따라서 유니밸런스에 의해 동일성을 제외하고 유일합니다. 그러므로 유일 선택 원리 (3.9.2)에 의해, 주장한 대로 $m_u : A_u \rightarrowtail V$이고 $u = \mathsf{set}(c(u))$이면서 $c(u) = (A_u,m_u)$인 사상 $c : V \to \sum_{(A:\mathcal{U})}(A \to V)$가 존재합니다. □

정의 10.5.7. $u:V$에 대하여, $u = \mathsf{set}(A_u,m_u)$를 만족하도록 방금 구성한 단사 표현 $m_u : A_u \rightarrowtail V$를 u의 **원소 타입**이라 부르고 $m_u : [u] \rightarrowtail V$, 또는 간단히 $[u] \rightarrowtail V$로 나타낼 수 있습니다. $[u]$는 "u의 원소들로 이루어진 V의 부분 클래스"로 생각할 수 있습니다.

정리 10.5.8. $(V,\in)$에 대하여 다음이 성립합니다.

(i) 외연성:
$$\forall(x, y : V).\, x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Leftrightarrow x = y.$$
(ii) 공집합: 모든 $x : V$에 대하여 $\neg(x \in \emptyset)$가 성립합니다.
(iii) 짝: 모든 $u, v : V$에 대하여 클래스 $\{u, v\} :\equiv \{\, x \mid x = u \vee x = v \,\}$는 V-집합입니다.
(iv) 무한: $\emptyset \in v$이고, $x \in v$이면 $x \cup \{x\} \in v$인 $v : V$가 존재합니다.
(v) 합집합: 모든 $v : V$에 대하여 클래스 $\cup v :\equiv \{\, x \mid \exists(u : V).\, x \in u \in v \,\}$는 V-집합입니다.
(vi) 함수 집합: 모든 $u, v : V$에 대하여 클래스 $v^u :\equiv \{\, x \mid x : u \to v \,\}$는 V-집합입니다.[1]
(vii) $\in$-귀납법: $C : V \to \mathsf{Prop}$가 모든 $x \in a$에 대하여 $C(x)$가 성립할 때마다 $C(a)$가 성립하는 클래스라면, 모든 $v : V$에 대하여 $C(v)$가 성립합니다.
(viii) 치환: 임의의 $r : V \to V$와 $x : V$가 주어지면, 다음 클래스는
$$\{\, y \mid \exists(z : V).\, z \in x \wedge y = r(z) \,\}$$
V-집합입니다.
(ix) 분리: 임의의 $a : V$와 $\mathcal{U}$-작은 $C : V \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$가 주어지면, 다음 클래스는
$$\{\, x \mid x \in a \wedge C(x) \,\}$$
V-집합입니다.

증명 개요.

(i) 외연성: $\mathsf{set}(A, f) \subseteq \mathsf{set}(B, g)$이면 모든 $a : A$에 대하여 $f(a) \in \mathsf{set}(B, g)$이므로, 모든 $a : A$에 대하여 $f(a) = g(b)$인 $b : B$가 단지 존재합니다. 가정 $\mathsf{set}(B, g) \subseteq \mathsf{set}(A, f)$는 (10.5.2)의 나머지 절반을 주므로, $\mathsf{set}(A, f) = \mathsf{set}(B, g)$입니다.
(ii) 공집합: $x \in \emptyset = \mathsf{set}(\mathbf{0}, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(V))$라고 가정합시다. 그러면 $\exists(a : \mathbf{0}).\, x = \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(V, a)$인데, 이는 모순입니다.
(iii) 짝: u와 v가 주어지면 $w = \mathsf{set}(\mathbf{2}, \mathsf{rec}_{\mathbf{2}}(V, u, v))$로 둡시다.
(iv) 무한: $w = \mathsf{set}(\mathbb{N}, I)$로 잡읍시다. 여기서 $I : \mathbb{N} \to V$는 재귀 $I(0) :\equiv \emptyset$와 $I(n+1) :\equiv I(n) \cup \{I(n)\}$로 주어집니다.
(v) 합집합: 임의의 $v : V$와 $v = \mathsf{set}(A, f)$인 임의의 표현 $f : A \to V$를 잡읍시다. 그리고 $\tilde{A} :\equiv \sum_{(a:A)} [fa]$로 둡시다. 여기서 $m_{fa} : [fa] \rightarrowtail V$는 정의 10.5.7의 원소 타입입니다. $\tilde{A}$는 명백히 $\mathcal{U}$-작으며, $\cup v :\equiv \mathsf{set}(\tilde{A}, \lambda x.\, m_{f(\mathsf{pr}_1(x))}(\mathsf{pr}_2(x)))$입니다.
(vi) 함수 집합: $u, v : V$가 주어지면 원소 타입 $[u] \rightarrowtail V$와 $[v] \rightarrowtail V$, 그리고 함수 타입 $[u] \to [v]$를 잡읍시다. 다음 사상을 정의하고자 합니다.
$$r : ([u] \to [v]) \longrightarrow V$$
이 사상은 "$r(f) = \{\, (x, f(x)) \mid x : [u] \,\}$"를 만족해야 하지만, 이것이 의미를 가지려면 먼저 순서쌍 (x, y)를 정의해야 하고, 그다음 사상 $r' : x \mapsto (x, f(x))$를 잡은 뒤 $r(f) :\equiv \mathsf{set}([u], r')$로 둘 수 있습니다. 그런데 순서쌍은 통상적인 방식대로 순서 없는 짝을 이용하여 정의할 수 있습니다.

[1] 여기서 $x : u \to v$는 집합론에서 함수를 부호화하는 통상적인 방식에 따라 x가 순서쌍들의 적절한 집합이라는 뜻입니다.

(vii) $\in$-귀납법: $C : V \to \mathsf{Prop}$를 모든 $x \in a$에 대하여 $C(x)$가 성립할 때마다 $C(a)$가 성립하는 클래스라 하고, 임의의 $v = \mathsf{set}(B, g)$를 잡읍시다. 귀납법으로 $C(v)$를 보이기 위해 모든 $b : B$에 대하여 $C(g(b))$가 성립한다고 가정합시다. 모든 $x \in v$에 대하여 $x = g(b)$인 어떤 $b : B$가 단지 존재하므로 $C(x)$가 성립합니다. 따라서 $C(v)$가 성립합니다.

(viii) 치환: C를 해당 클래스라 합시다. "C는 V-집합"이라는 진술은 단순 명제이므로, 다음과 같이 귀납법으로 진행할 수 있습니다. x가 $\mathsf{set}(A, f)$라고 가정하면, $w :\equiv \mathsf{set}(A, r \circ f)$가 우리가 찾는 집합이라고 주장합니다. $C(y)$이면 $z = f(a)$이고 $y = r(z)$인 $z : V$와 $a : A$가 단지 존재하므로 $y \in w$입니다. 역으로, $y \in w$이면 $y = r(f(a))$인 $a : A$가 단지 존재하므로, $z :\equiv f(a)$로 잡으면 $C(y)$가 성립함을 알 수 있습니다.

(ix) 클래스 $C : V \to \mathsf{Prop}$가 **분리 가능**하다는 것을 임의의 $a : V$에 대하여 다음 클래스

$$a \cap C :\equiv \{\, x \mid x \in a \wedge C(x) \,\}$$

가 V-집합이라는 것으로 정의합시다. 임의의 $\mathcal{U}$-작은 $C : V \to \mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$가 분리 가능함을 보여야 합니다. 실제로 $a = \mathsf{set}(A, f)$가 주어졌을 때 $A' = \sum_{(x:A)} C(fx)$라 하고, $i : A' \to A$가 자명한 포함 사상일 때 $f' = f \circ i$로 잡습니다. 그러면 $a' = \mathsf{set}(A', f')$로 잡을 수 있으며, 주장한 대로 $x \in a \wedge C(x) \Leftrightarrow x \in a'$가 성립합니다. $A' = \sum_{(x:A)} C(fx)$가 $\mathcal{U}$에 속하려면 C의 값이 $\mathcal{U}$에 속한다는 가정이 필요했습니다. □

분리 가능성에 대한 엄밀히 구문적인 판정 기준이 있으면, 클래스를 나타내는 표현식만 보고도 그 클래스가 V-집합을 만들어 낸다는 것을 읽어 낼 수 있으므로 편리합니다. 그러한 익숙한 조건 중 하나는 "Δ_0"라는 조건으로, 이는 표현식이 등식 $x =_V y$와 소속 관계 $x \in y$로부터 단순 명제 연결사 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$와 특정 집합에 대한 양화사 $\forall$, $\exists$, 즉 $\exists(x \in a)$ 및 $\forall(y \in b)$ 꼴의 양화사만을 사용하여 구성된다는 뜻입니다(이러한 양화사를 **유계** 양화사라고 합니다).

따름정리 10.5.9. 클래스 $C : V \to \mathsf{Prop}$가 위의 의미에서 Δ_0이면, 이는 분리 가능합니다.

증명. 동일성 $x = y$의 $\mathcal{U}$-작은 크기 재조정 $x \sim y$가 있다는 것을 상기하십시오. $x \in y$는 $x = y$를 사용하여 정의되므로, 소속의 $\mathcal{U}$-작은 크기 재조정도 얻습니다.

$$x \mathrel{\widetilde{\in}} \mathsf{set}(A, f) :\equiv \exists(a : A).\, x \sim f(a).$$

이제 Φ를 C에 대한 Δ_0 표현식이라 하여, 클래스로서 $\Phi = C$가 되도록 합시다(엄밀히 말하면 표현식과 그 의미를 구별해야 하지만, 여기서는 그 차이를 흐리게 두겠습니다). $\widetilde{\Phi}$를 $=$와 $\in$이 나타나는 모든 곳을 크기 조정된 대응물 $\sim$와 $\mathrel{\widetilde{\in}}$으로 각각 바꾼 결과라고 합시다. 그러면 모든 $x : V$에 대하여 $\widetilde{\Phi}(x) \Leftrightarrow C(x)$라는 의미에서 $\widetilde{\Phi}$도 C를 표현함이 분명하며, 따라서 유니밸런스에 의해 $\widetilde{\Phi} = C$입니다. 이제 $\widetilde{\Phi}$가 $\mathcal{U}$-작다는 것만 보이면 충분합니다. 그러면 정리에 의해 $\widetilde{\Phi}$는 분리 가능하기 때문입니다.

식의 구성에 대한 귀납으로 $\widetilde{\Phi}$가 $\mathcal{U}$-작음을 보입니다. 기저 사례는 $x \sim y$와 $x \mathrel{\widetilde{\in}} y$이며, 이들은 이미 $\mathcal{U}$로 크기 재조정되었습니다. 또한 $\mathcal{U}$가 단순 명제 연산(및 (-1)-절단)에 대해 닫혀 있음도 분명하므로, 유계 양화사 $\exists(x \in a)$와 $\forall(y \in b)$를 확인하는 일만 남습니다. 정의에 의해,

$$\exists(x \in a) P(x) :\equiv \left\| \sum_{x:V} (x \mathrel{\widetilde{\in}} a \wedge P(x)) \right\|,$$
$$\forall(y \in b) P(x) :\equiv \prod_{x:V} (x \mathrel{\widetilde{\in}} a \to P(x)).$$

$\left\|\sum_{(x:V)}(x \mathrel{\widetilde{\in}} a \wedge P(x))\right\|$를 생각해 봅시다. 귀납 가설에 의해 $P(x)$가 $\mathcal{U}$-작으므로 본체 $(x \mathrel{\widetilde{\in}} a \wedge P(x))$는 $\mathcal{U}$-작지만, V에 대한 양화는 반드시 $\mathcal{U}$ 안에 머무르지는 않습니다. 그러나 현재의 경우에는 이를 a의 원소들의 타입 $[a] \rightarrowtail V$에 대한 양화로 바꿀 수 있으며, 다음을 쉽게 보일 수 있습니다.

$$\sum_{x:V}(x \mathrel{\widetilde{\in}} a \wedge P(x)) = \sum_{x:[a]} P(x).$$

$[a]$와 $P(x)$가 모두 $\mathcal{U}$에 속하므로 우변은 실제로 $\mathcal{U}$ 안에 머무릅니다. $\prod_{(x:V)}(x \mathrel{\widetilde{\in}} a \to P(x))$의 경우도 $\prod_{(x:V)}(x \mathrel{\widetilde{\in}} a \to P(x)) = \prod_{(x:[a])} P(x)$를 사용하여 마찬가지로 처리됩니다. □

지금까지 유니버스 $\mathcal{U}$를 갖춘 타입 이론에서 누적 위계 V가 여러 표준 공리를 만족하는 "구성적 집합론" 의 모형임을 보였습니다. 그러나 우리가 아는 한, V에는 Constructive Zermelo–Fraenkel Set Theory [Acz78]에 포함된 강한 수집 공리와 부분집합 수집 공리가 없습니다. 이 집합론을 타입 이론으로 해석하는 통상적인 방식에서는 이 두 공리가 세토이드식 등식 정의로부터 따라 나오는 반면, 집합론의 다른 구성된 모형에서는 강한 수집이 다른 이유로 성립할 수도 있습니다. 우리의 모형 $(V, \in)$에서 이 공리들 중 어느 하나라도 성립하는지는 알지 못하지만, 그럴 가능성은 낮아 보입니다. V는 외부적 구성이 아니라 체계 내부의 고차 귀납적 타입이므로, 기존의 해석들과 몇 가지 점에서 다르다는 것은 놀라운 일이 아닙니다.

마지막으로, 위의 §10.1.5에 나온 AC의 형태로 집합에 대한 선택 공리를 우리의 타입 이론에 추가한 결과를 생각해 봅시다. 그러면 정리 10.1.14에 의해 LEM도 성립하게 되며, 따라서 정리 10.1.12에 의해 Set는 부분 대상 분류자 $\mathbf{2}$을 갖는 토포스가 됩니다. 이 경우 $\mathsf{Prop} = \mathbf{2} : \mathcal{U}$이므로 모든 클래스가 분리 가능합니다. 이로써 다음을 보였습니다.

보조정리 10.5.10. AC를 갖춘 타입 이론에서 V에 대해 **(완전) 분리** 법칙이 성립합니다. 즉, 임의의 클래스 $C : V \to \mathsf{Prop}$와 $a : V$가 주어지면 클래스 $a \cap C$는 V-집합입니다.

정리 10.5.11. AC와 유니버스 $\mathcal{U}$를 갖춘 타입 이론에서 누적 위계 V는 선택 공리를 포함한 체르멜로–프렝켈 집합론 ZFC의 모형입니다.

증명. 정리 10.5.8에 나열된 모든 공리에 더해 완전 분리도 성립하므로, 모든 $a : V$에 대하여 멱집합 $\mathcal{P}(a) : V$가 존재함만 보이면 됩니다. 그런데 LEM이 성립하므로 이들은 단순히 함수 타입 $\mathcal{P}(a) = (a \to \mathbf{2})$입니다. 따라서 V는 체르멜로–프렝켈 집합론 ZF의 모형입니다. AC로부터 집합론적 선택 공리를 검증하는 것은 쉬운 연습 문제로 남겨 둡니다. □

주

집합의 범주에 대해 기대되는 기본 성질들은 초등 토포스 이론의 초창기로 거슬러 올라갑니다. §10.1.5에서 언급한 집합 범주의 초등 이론은 Lawvere가 [Law05]에서 집합론의 범주론적 공리화로서 도입하였습니다. 초등 토포스의 서술적 버전으로 여겨지는 ΠW-준토포스의 개념은 [MP02]에서 도입되었습니다. [Pal09]도 참고하십시오.

§10.1에서 집합의 범주를 다룬 방식은 대체로 [RS13]의 방식을 따릅니다. 에피사상이 전사라는 사실(보조정리 10.1.4)은 고전 수학에서 잘 알려져 있지만, 이를 서술적으로 증명하는 것은 보기만큼 자명하지 않습니다. [MRR88]의 증명은 (비서술적인) 멱집합 연산을 사용하지만, 유니버스 $\mathcal{U}_i$ 안의 사상이 다음 유니버스 $\mathcal{U}_{i+1}$에서 에피사상이면 전사라는 더 약한 명제의 서술적 증명으로 볼 수도 있

습니다. 세토이드에 대한 서술적 증명은 Wilander [Wil10]가 제시했습니다. 우리의 증명은 Wilander의 증명과 비슷하지만, 푸시아웃과 유니밸런스를 사용하여 세토이드를 피합니다.

정리 10.1.14에서 AC로부터 LEM으로의 함의는 Diaconescu [Dia75]에 의한 토포스 이론의 정리를 호모토피 타입 이론에 맞게 옮긴 것입니다. 이는 이미 Bishop [Bis67, Problem 2]이 문제로 제기한 바 있습니다.

순서수의 직관주의적 이론에 대해서는 [Tay96, Tay99]와 [JM95]를 참고하십시오. 접근 가능성의 귀납적 술어를 포함하여, 귀납 원리를 통한 타입 이론에서의 정초성의 정의는 [Hue80, Pau86, Nor88]에서 연구되었지만, 그 아이디어는 Gentzen의 산술의 무모순성 증명 [Gen36]까지 거슬러 올라갑니다.

§10.5에서 누적 위계를 전개하는 데 바탕이 된 대수적 집합론의 아이디어는 [JM95]에 의한 것이지만, 이는 [Acz78]의 더 이른 연구에서 비롯되었습니다.

연습문제

연습문제 10.1. $\mathcal{S}et$의 패턴을 따라, (주어진 유니버스 $\mathcal{U}$ 안의) 모든 타입과 그 사이의 사상들로 이루어진 범주 $\mathcal{T}ype$를 만들고자 합니다. 그러나 이것이 §9.1의 의미에서 범주가 되려면, 먼저 $\hom(X,Y) :\equiv \|X \to Y\|_0$로 선언하고, 합성은 통상적인 합성 $(Y \to Z) \to (X \to Y) \to (X \to Z)$로부터 절단에 대한 귀납법으로 정의해야 합니다. 이는 예 9.1.18에서 타입의 호모토피 준범주로 정의되었습니다. 그러나 이는 여전히 범주가 아니라 준범주일 뿐입니다(그 대상의 타입 $\mathcal{U}$는 0-타입조차 아닙니다). 이는 Rezk 완비화 (예 9.9.7 참고)에 의해 범주가 되며, 연습문제 9.9에 의해 그 대상의 타입은 $\|\mathcal{U}\|_1$과 동일시될 수 있습니다. 이렇게 얻은 범주 $\mathcal{T}ype$는 $\mathcal{S}et$와 달리 준토포스가 아님을 보이십시오.

연습문제 10.2. 범주 $\mathcal{S}et$에서 모든 전사가 단면을 가지면 선택 공리가 성립함을 보이십시오.

연습문제 10.3. LEM이 있으면 범주 $\mathcal{S}et$가 다음 명제가 성립한다는 의미에서 잘 점찍힌 범주임을 보이십시오. 임의의 $f, g : A \to B$에 대하여 $f \neq g$이면 $f(a) \neq g(a)$인 함수 $a : 1 \to A$가 존재합니다. 함수 $A \to \mathbf{2}$과 가환 삼각형으로 이루어진 슬라이스 범주 $\mathcal{S}et/\mathbf{2}$는 이 성질을 갖지 않음을 보이십시오. (힌트: $\mathcal{S}et/\mathbf{2}$의 종대상은 항등 함수 $\mathbf{2} \to \mathbf{2}$이므로, 이 범주에는 원소 $1 \to X$를 갖지 않는 대상 X가 존재합니다.)

연습문제 10.4. $(A, <_A)$와 $(B, <_B)$가 정초적이거나 외연적이거나 서수이면 $A + B$도 각각 그러함을 증명하십시오. 여기서 $<$는 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned}
(a < a') &:\equiv (a <_A a') && \text{에 대해} a, a' : A\\
(b < b') &:\equiv (b <_B b') && \text{에 대해} b, b' : B\\
(a < b) &:\equiv \mathbf{1} && \text{에 대해} (a : A), (b : B)\\
(b < a) &:\equiv \mathbf{0} && \text{에 대해} (a : A), (b : B).
\end{aligned}$$

연습문제 10.5. $(A, <_A)$와 $(B, <_B)$가 정초적이거나 외연적이거나 서수이면 $A \times B$도 각각 그러함을 증명하십시오. 여기서 $<$는 다음과 같이 정의합니다.

$$((a, b) < (a', b')) :\equiv (a <_A a') \vee ((a = a') \wedge (b <_B b')).$$

연습문제 10.6. 순서수의 통상적인 대수적 연산들을 정의하고, 이 연산들이 통상적인 성질들을 만족함을 증명하십시오.

연습문제 10.7. $0_{\mathbf{2}} < 1_{\mathbf{2}}$만 성립하는 자명한 관계 $<$ 아래에서 $\mathbf{2}$이 순서수임에 유의하십시오.

(i) Prop을 순서수로 만드는 관계 $<$를 Prop 위에 정의하십시오.
(ii) $\mathbf{2} =_{\mathsf{Ord}} \mathsf{Prop}$일 필요충분조건이 LEM 이 성립하는 것임을 보이십시오.

연습문제 10.8. $\mathbb{N}$ 을 순서수로 간주할 때 ω로 표기한다는 것을 상기하십시오. 따라서 순서수 $\omega + 1$도 있습니다. 한편, 다음과 같이 정의합시다.

$$\mathbb{N}_\infty :\equiv \left\{ a : \mathbb{N} \to \mathbf{2} \;\middle|\; \forall(n : \mathbb{N}).\, (a_n \leq a_{\mathsf{succ}(n)}) \right\}$$

여기서 $\leq$는 $0_{\mathbf{2}} \leq 1_{\mathbf{2}}$인, $\mathbf{2}$ 위의 자명한 부분 순서를 나타냅니다.

(i) $\mathbb{N}_\infty$를 순서수로 만드는 관계 $<$를 $\mathbb{N}_\infty$ 위에 정의하십시오.
(ii) $\omega + 1 =_{\mathsf{Ord}} \mathbb{N}_\infty$일 필요충분조건이 제한된 전지 원리 (11.5.8)가 성립하는 것임을 보이십시오.

연습문제 10.9. $(A, <)$가 정초적이고 외연적이며 $A : \mathcal{U}$이면, 시뮬레이션 $A \to V$가 존재함을 보이십시오. 여기서 $(V, \in)$는 유니버스 $\mathcal{U}$ 로부터 구성한 §10.5의 누적 위계입니다.

연습문제 10.10. 정리 10.4.4(i)이 선택 공리 (3.8.1)와 동치임을 보이십시오.

연습문제 10.11. 타입 A와 B가 주어졌을 때, 다음을 만족하는 $R : A \to B \to \mathsf{Prop}$를 **양쪽 전역 관계**로 정의합니다.

$$\Big(\forall(a : A).\, \exists(b : B).\, R(a, b)\Big) \wedge \Big(\forall(b : B).\, \exists(a : A).\, R(a, b)\Big).$$

이러한 A, B, R에 대해, $A \sqcup^R B$를 다음에 의해 생성되는 고차 귀납적 타입이라 합시다.

- $i : A \to A \sqcup^R B$
- $j : B \to A \sqcup^R B$
- $R(a, b)$를 만족하는 각 $a : A$와 $b : B$에 대해, 경로 $i(a) = j(b)$가 있습니다.

누적 위계 V를 다음과 같은 더 직접적인 생성자 목록으로 정의할 수 있으며, 그 결과로 얻는 귀납 원리가 §10.5에서 주어진 것과 같음을 보이십시오.

- 모든 $A : \mathcal{U}$와 $f : A \to V$에 대해, 원소 $\mathsf{set}(A, f) : V$가 있습니다.
- 임의의 $A, B : \mathcal{U}$와 양쪽 전역 관계 $R : A \to B \to \mathsf{Prop}$, 그리고 임의의 사상 $h : A \sqcup^R B \to V$에 대해, 경로 $\mathsf{set}(A, h \circ i) = \mathsf{set}(B, h \circ j)$가 있습니다.
- 0-절단 생성자.

연습문제 10.12. Constructive Zermelo–Fraenkel Set Theory에서 **강한 수집 공리** 는 다음과 같은 형태입니다:

$$\Big(\forall(x \in v).\, \exists(y).\, R(x, y)\Big) \Rightarrow \exists(w).\, \big[\big(\forall(x \in v).\, \exists(y \in w).\, R(x, y)\big) \wedge \big(\forall(y \in w).\, \exists(x \in v).\, R(x, y)\big)\big]$$

이것은 누적 위계 V에서 성립합니까? (우리는 이에 대한 답을 알지 못합니다.)

연습문제 10.13. AC를 가정하면, 누적 위계 V가 다음과 같은 형태로 서술할 수 있는 통상적인 집합론적 선택 공리를 만족함을 확인하십시오:

$$\forall(x : V).\, \Big((\forall(y \in x).\, \exists(z : V).\, z \in y) \Rightarrow \exists(c \in (\cup x)^x).\, \forall(y \in x).\, c(y) \in y\Big)$$

연습문제 10.14. 명제적 크기 재조정을 가정하고, 임의의 $A : \mathsf{Ord}$에 대해 다음이 성립하는 단순 술어 $\mathsf{isPlump} : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Prop}$가 존재함을 보이십시오.

$$\mathsf{isPlump}(A) = \Big(\forall (B < A).\, \mathsf{isPlump}(B)\Big) \wedge \Big(\forall (C, B : \mathsf{Ord}).\, C \leq B < A \wedge \mathsf{isPlump}(C) \Rightarrow C < A\Big).$$

$\mathsf{isPlump}$는 Ord 에 대한 단순한 정초 귀납법으로는 정의할 수 없음에 유의하십시오. 다른 정초 관계를 사용해야 합니다. $\mathsf{isPlump}(A)$이면 순서수 A가 **충만하다** [Tay96, Tay99]고 합니다.

연습문제 10.15. LEM 이 "모든 순서수는 충만함"이라는 명제와 동치임을 보이십시오.

연습문제 10.16. 순서수 A의 **충만 후속자**를 다음과 같이 정의하십시오.

$$t(A) :\equiv \{\, B : \mathsf{Ord} \mid (B \leq A) \wedge \mathsf{isPlump}(B) \,\}$$

(i) 정의에 의해 $t(A)$는 바로 다음 상위 유니버스에 속합니다. 명제적 크기 재조정을 가정하면, 이것이 A와 같은 유니버스에 있는 순서수와 같음을 보이십시오.

(ii) 다시 명제적 크기 재조정을 가정하고, A가 plump이면(연습문제 10.14) $t(A)$도 plump임을 보이십시오.

연습문제 10.17. 유니버스 $\mathcal{U}_i$에 대한 ZF-**대수** [JM95] 는 $\mathcal{U}_i$의 타입들로 첨자화된 모든 상한을 가지며 "후속자" 함수 $s : V \to V$(반드시 어떤 방식으로든 $\leq$를 보존할 필요는 없음)를 갖춘 부분 순서 집합(예 9.1.14 참고) $V : \mathcal{U}_{i+1}$입니다.

(i) 누적 위계 $(V_{\mathcal{U}_i}, \subseteq, s)$가 시작 ZF-대수임을 보이십시오. 여기서 $s(x)$는 한원소 집합 $\{\, x \,\}$입니다.

(ii) $(\mathsf{Ord}_{\mathcal{U}_i}, \leq, s)$가 모든 x에 대해 $x \leq s(x)$라는 성질을 갖는 시작 ZF-대수임을 보이십시오. 여기서 $s(A) = A + \mathbf{1}$는 보조정리 10.3.21의 후속자입니다.

(iii) 명제적 크기 재조정을 가정하고, $\Big(\{\, A : \mathsf{Ord}_{\mathcal{U}_i} \mid \mathsf{isPlump}(A) \,\}, \leq, t\Big)$가 모든 x, y에 대해 $(x \leq y) \Rightarrow (t(x) \leq t(y))$라는 성질을 갖는 시작 ZF-대수임을 보이십시오. 여기서 t는 연습문제 10.16의 plump 후속자입니다.

연습문제 10.18. 범주 A에서 $g \circ f = 1_a$를 만족하는 사상 $g : \hom_A(b, a)$가 존재하면 사상 $f : \hom_A(a, b)$를 **분할 단사 사상**이라고 합니다. (이러한 g를 f의 **수축**이라고 합니다.) 다음이 논리적으로 동치임을 증명하십시오.

(i) LEM.

(ii) 임의의 집합 A와 B에 대하여, A에 원소가 존재하면 $\mathcal{S}et$의 모든 단사 사상 $f : A \to B$에 대하여 f 역시 $\mathcal{S}et$에서 분할 단사 사상입니다.

제11장

실수

수학의 기초라는 이름에 걸맞은 기초 체계라면 결국 수학적 해석학에서 이해하는 실수, 즉 완비 아르키메데스적 순서체로서의 실수의 구성을 다루어야 합니다. 완비성에는 두 가지 개념이 있습니다. Cauchy의 완비성은 실수가 Cauchy 수열의 극한에 대해 닫혀 있을 것을 요구하고, 이보다 더 강한 Dedekind의 완비성은 Dedekind 절단에 대해 닫혀 있을 것을 요구합니다. 이로부터 실수를 구성하는 두 가지 방법이 나오며, 이를 각각 §11.2와 §11.3에서 살펴봅니다. 정리 11.2.14 및 11.3.50에서는 두 구성을 보편 성질로 특징짓습니다. Dedekind 실수는 종 아르키메데스적 순서체이고, Cauchy 실수는 시작 Cauchy 완비 아르키메데스적 순서체입니다.

전통적인 구성적 수학에서 실수는 항상 어느 정도의 타협을 요구하는 것처럼 보입니다. 예를 들어 Dedekind 실수는 멱집합이나 다른 형태의 비술어성이 있을 때 더 잘 작동하고, Cauchy 실수는 가산 선택이 있을 때 잘 작동합니다. 그러나 우리는 Cauchy 실수를 고차 귀납-귀납적 타입으로 구성하는 새로운 방법을 제시하는데, 이는 멱집합도 가산 선택도 필요로 하지 않는 세 번째 가능성으로 보입니다.

§11.4에서는 실수의 두 구성을 비교합니다. Cauchy 실수는 Dedekind 실수에 포함됩니다. 배중률이나 가산 선택이 성립하면 두 실수는 일치하지만, 일반적으로는 이 포함이 진포함일 수도 있습니다.

§11.5에서는 닫힌 구간 $[0,1]$의 콤팩트성에 대한 세 가지 개념을 살펴봅니다. 먼저 $[0,1]$이 완비이고 완전 유계라는 의미에서 거리 콤팩트임을 보이고, 거리 콤팩트 공간 위의 균등 연속 사상이 예상대로 동작함을 보입니다. 이와 대조적으로, 모든 수열이 수렴하는 부분수열을 가진다는 Bolzano–Weierstraß 성질은 배중률의 한 사례인 제한된 전지 원리를 함의합니다. 마지막으로 Heine–Borel 콤팩트성을 논의합니다. 유한 부분덮개 성질을 소박하게 정식화하면 제대로 작동하지 않지만, 증명 관련적인 귀납적 덮개 개념은 작동합니다. 이 절은 기본적으로 표준적인 구성적 해석학입니다.

호모토피 타입 이론에서 실수와 해석학을 전개하는 방식은 고전 수학과 쉽게 양립하도록 만들 수 있습니다. 배중률과 선택 공리를 가정하면 표준적인 고전 해석학을 얻습니다. 즉 Dedekind 실수와 Cauchy 실수가 일치하고, Dedekind 실수의 비술어적 성격에 관한 기초적 문제가 사라지며, 구간은 가능한 한 최대로 콤팩트해집니다.

이 장은 §11.6에서 콘웨이의 초현실수를 고차 귀납-귀납적 타입으로 구성하면서 마무리합니다. 이 구성은 고전적 집합론보다 유니벌런트 타입 이론에서 더 자연스럽습니다.

장 2 및 3의 기본 이론에 더해, 앞서 언급했듯이 코시 실수와 초현실수에는 "고차 귀납-귀납적 타입"을 사용합니다. 이는 제6장의 아이디어와 §5.7에서 언급한 귀납-귀납적 타입 개념을 결합한 것입니다. 또한 §3.7에서 설명한 전통적인 논리 표기법과, 저희의 "집합"이 기대한 대로 동작한다는 사실(§10.1에서 증명)도 자주 사용할 것입니다.

§8.1.5에서 고전적 대수적 위상수학의 "실수"와 비슷한 역할을 했던 원의 보편 피복의 전체 공간은

우리가 찾고 있는 실수 타입이 아니라는 점에 유의하십시오. 그 타입은 축약 가능하므로 한원소 타입과 동치이고, 따라서 자명하지 않은 대수적 구조를 갖출 수 없습니다.

11.1 유리수체

먼저 유리수 $\mathbb{Q}$ 를 구성합니다. 그러면 실수를 $\mathbb{Q}$ 의 완비화로 볼 수 있기 때문입니다. 전문가라면 $\mathbb{Q}$ 를 임의의 근사체, 즉 임의로 정밀한 근사 역원이 존재하는 $\mathbb{Q}$ 의 부분환으로 대체할 수 있다고 지적할 것입니다. 그 예로 이진 유리수환이 있으며, 이는 $n/2^k$ 꼴의 수들입니다. 컴퓨터에서 구성적 수학을 구현한다면 근사체가 더 적합하겠지만, 그러한 세부 사항은 π 의 자릿수에 관심 있는 분들께 맡기겠습니다.

§6.10에서 정수 $\mathbb{Z}$ 를 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 의 몫으로 구성했고, 이 몫이 멱등 사상으로 생성됨을 관찰했습니다. §6.11에서는 $\mathbb{Z}$ 가 $\mathbf{1}$ 위의 자유군임을 보았습니다. 마찬가지로 $\mathbb{Z}$ 가 $\mathbf{0}$ 위의 자유 가환환임도 보일 수 있습니다. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 도 같은 방식으로, 즉 다음과 같은 몫으로 구성됩니다.

$$\mathbb{Q} :\equiv (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\approx$$

여기서

$$(u, a) \approx (v, b) :\equiv (u(b+1) = v(a+1)).$$

다시 말해 쌍 (u, a) 는 유리수 $u/(1+a)$ 를 나타냅니다. 분모 a 에 교묘하게 1을 더했으므로 0으로 나누는 일은 생기지 않습니다. 여기서도 대표원을 표준적으로 선택할 수 있는데, 바로 기약분수입니다. 따라서 보조정리 6.10.8를 적용하여 집합 $\mathbb{Q}$ 를 얻을 수 있으며, 이 집합 역시 결정 가능한 상등을 가집니다.

$\mathbb{Q}$ 위의 산술 연산은 굳이 적지 않겠습니다. 분모에 1을 더한 경우에도 독자 여러분이 분수 계산을 할 줄 안다고 믿기 때문입니다. 결정 가능한 상등과 결정 가능한 순서를 가진 유리수 순서체 $\mathbb{Q}$ 를 전혀 문제없이 구성할 수 있다는 결론만 기록해 둡시다. 이는 시작 순서체로 특징지을 수도 있습니다.

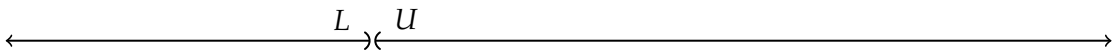
마지막으로 양의 유리수 타입을 $\mathbb{Q}_+ :\equiv \{\, q : \mathbb{Q} \mid q > 0 \,\}$ 로 표기하겠습니다.

11.2 Dedekind 실수

먼저 Dedekind 구성의 기본 아이디어를 상기해 봅시다. 우리는 흔히 사용되는 단측 버전 대신 양측 Dedekind 절단을 사용하는데, 대칭성 덕분에 구성이 더 우아해지고 고전적으로뿐 아니라 구성적으로도 작동하기 때문입니다. Dedekind 절단은 각각 아래 절단과 위 절단이라 불리는 부분집합 $L, U \subseteq \mathbb{Q}$ 의 쌍 (L, U) 로 이루어지며, 이들은 다음을 만족합니다.

(i) 거주됨: $q \in L$ 과 $r \in U$ 가 존재하고,
(ii) 둥굶: $q \in L \Leftrightarrow \exists (r \in \mathbb{Q}).\, q < r \wedge r \in L$ 이고 $r \in U \Leftrightarrow \exists (q \in \mathbb{Q}).\, q \in U \wedge q < r$ 이며,
(iii) 서로소: $\neg(q \in L \wedge q \in U)$ 이고,
(iv) 위치 결정됨: $q < r \Rightarrow q \in L \vee r \in U$ 입니다.

둥굶 조건을 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 절단이 열려 있음을 알 수 있고, 오른쪽에서 왼쪽으로 읽으면 절단이 각각 아래 집합, 위 집합임을 알 수 있습니다. 위치성 조건은 L 과 U 사이에 큰 틈이 없다는 것을 말합니다. 절단은 항상 열려 있으므로, "사이에 있는 점"이 유리수인 경우에도 그 점을 결코 포함하지 않습니다. 전형적인 Dedekind 절단은 다음과 같은 모습입니다.



비형식적인 정의를 타입 이론으로 소박하게 옮겨서, 절단은 사상의 쌍 $L, U : \mathbb{Q} \to \mathsf{Prop}$이라고 말할 수도 있을 것입니다. 그러나 §3.5에서 보았듯이 Prop은 $\mathcal{U}_i$가 유니버스일 때 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i}$를 나타내는 모호한 표기입니다. 절단을 정의하는 데 특정한 $\mathcal{U}_i$를 사용하면, 실수 타입은 다음 유니버스 $\mathcal{U}_{i+1}$에, 실수의 성질은 두 레벨 위인 $\mathcal{U}_{i+2}$에, 실수의 부분집합의 성질은 $\mathcal{U}_{i+3}$에 놓이게 되는 식입니다. 원칙적으로는 특히 증명 보조기의 도움을 받아 유니버스 레벨을 추적할 수 있어야 하지만, 여기서 그렇게 하면 피하고 싶은 번거로운 절차만 늘어날 뿐입니다. 따라서 하나의 명제 타입 Ω로 우리의 모든 목적에 충분하다는 단순화 가정을 하겠습니다.

사실 Dedekind 실수의 구성은 논리적 조작에 대해 꽤 견고합니다. 하나의 타입 Ω를 사용하는 것을 정당화할 수 있는 방법은 여러 가지가 있습니다.

(i) Ω를 모호한 Prop과 동일시하고, 정의와 구성에 나타나는 모든 유니버스를 추적할 수 있습니다.

(ii) §3.5에서처럼 명제적 크기 재조정 공리를 가정할 수 있습니다. 이 공리는 본질적으로 $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}_i}$들을 가장 낮은 레벨로 붕괴시키며, 이를 Ω라고 부릅니다.

(iii) 타입 이론적 유니버스나 계산의 복잡한 세부 사항에 관심이 없는 고전 수학자는 단순 명제에 대한 배중률 (3.4.1)을 그냥 가정하여 $\Omega \equiv \mathbf{2}$이 되게 할 수 있습니다. 이렇게 하면 Prop의 수준에 관한 문제가 사라질 뿐 아니라, 우리가 하는 모든 작업이 실수의 표준적인 고전적 구성으로 바뀝니다.

(iv) 그 반대쪽 끝에서는 구성이 작동하게 하는 최소한의 요구 조건이 무엇인지 물을 수 있습니다. 단순 술어가 Dedekind 절단이라는 조건은 논리곱, 선언, 그리고 가산 집합인 $\mathbb{Q}$ 위의 존재 양화사만으로 표현할 수 있습니다. 따라서 Ω를 시작 σ-프레임, 즉 가산 조인을 가지며 이항 만남이 가산 조인에 대해 분배되는 격자로 잡을 수 있습니다. (배중률을 가정하지 않는 한 $\mathbf{2}$은 가산 조인에 대해 닫혀 있지 않으므로, 시작 σ-프레임은 두 점 격자 $\mathbf{2}$일 수 없습니다.) 이렇게 하면 Ω를 고차 귀납-귀납적 타입으로 구성하게 되겠지만, 이런 종류의 실험은 §11.3에서 한 번 하는 것으로 충분합니다.

위의 모든 경우에 Ω는 집합입니다. 더 지체하지 않고 비형식적 정의를 타입 이론으로 옮기겠습니다. 이 장 전체에서 우리는 정의 3.7.1의 논리 표기법을 사용합니다.

정의 11.2.1. Dedekind **절단** 은 단순 술어 $L : \mathbb{Q} \to \Omega$와 $U : \mathbb{Q} \to \Omega$의 쌍 (L, U)로서 다음을 만족하는 것입니다.

(i) 거주됨(즉, 유계): $\exists(q : \mathbb{Q}).\, L(q)$이고 $\exists(r : \mathbb{Q}).\, U(r)$,

(ii) 둥굶: 모든 $q, r : \mathbb{Q}$에 대해,

$$L(q) \Leftrightarrow \exists(r : \mathbb{Q}).\, (q < r) \wedge L(r) \qquad \text{그리고}$$
$$U(r) \Leftrightarrow \exists(q : \mathbb{Q}).\, (q < r) \wedge U(q),$$

(iii) 서로소: 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $\neg(L(q) \wedge U(q))$,

(iv) 위치 결정됨: 모든 $q, r : \mathbb{Q}$에 대해 $(q < r) \Rightarrow L(q) \vee U(r)$.

이 조건들의 논리곱을 $\mathsf{isCut}(L, U)$로 나타냅니다. Dedekind **실수**의 타입은 다음과 같습니다.

$$\mathbb{R}_{\mathsf{d}} :\equiv \{\, (L, U) : (\mathbb{Q} \to \Omega) \times (\mathbb{Q} \to \Omega) \mid \mathsf{isCut}(L, U) \,\}.$$

$\mathsf{isCut}(L,U)$가 단순 명제임은 명백하며, $\mathbb{Q} \to \Omega$가 집합이므로 Dedekind 실수 역시 집합을 이룹니다. 확장 실수, 하위 실수와 상위 실수, 그리고 구간 정의역으로 이어지는 Dedekind 절단의 변형에 대해서는 연습문제 11.2 to 11.4를 참고하십시오.

각 유리수 $q : \mathbb{Q}$에 절단 (L_q, U_q)를 대응시키는 매장 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_\mathsf{d}$가 존재하며, 여기서 절단은 다음과 같습니다.

$$L_q(r) :\equiv (r < q) \qquad \text{그리고} \qquad U_q(r) :\equiv (q < r).$$

유리수에 대응하는 절단 (L_q, U_q)를 간단히 q로 쓰겠습니다.

11.2.1 Dedekind 실수의 대수적 구조

Dedekind 실수의 대수적 구조와 순서론적 구조의 구성은 직관주의 논리에서 늘 하던 대로 진행됩니다. 세부 사항을 길게 다루기보다는 고전적 설정과 직관주의적 설정 사이의 차이점을 짚어 보겠습니다. 실수 $x : \mathbb{R}_\mathsf{d}$의 아래 절단과 위 절단을 L_x와 U_x로 쓰면, 덧셈을 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} L_{x+y}(q) &:\equiv \exists(r,s:\mathbb{Q}).\, L_x(r) \wedge L_y(s) \wedge q = r + s, \\ U_{x+y}(q) &:\equiv \exists(r,s:\mathbb{Q}).\, U_x(r) \wedge U_y(s) \wedge q = r + s, \end{aligned}$$

그리고 덧셈 역원은 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} L_{-x}(q) &:\equiv \exists(r:\mathbb{Q}).\, U_x(r) \wedge q = -r, \\ U_{-x}(q) &:\equiv \exists(r:\mathbb{Q}).\, L_x(r) \wedge q = -r. \end{aligned}$$

이 연산들에 대해 $(\mathbb{R}_\mathsf{d}, 0, +, -)$는 아벨 군입니다. 곱셈은 조금 더 번거롭습니다:

$$\begin{aligned} L_{x\cdot y}(q) :\equiv \exists(a,b,c,d:\mathbb{Q}).\, & L_x(a) \wedge U_x(b) \wedge L_y(c) \wedge U_y(d) \wedge \\ & q < \min(a\cdot c, a\cdot d, b\cdot c, b\cdot d), \\ U_{x\cdot y}(q) :\equiv \exists(a,b,c,d:\mathbb{Q}).\, & L_x(a) \wedge U_x(b) \wedge L_y(c) \wedge U_y(d) \wedge \\ & \max(a\cdot c, a\cdot d, b\cdot c, b\cdot d) < q. \end{aligned}$$

이 공식들은 구간 산술에서의 구간 곱셈과 관련이 있으며, 구간 산술에서는 유리수 끝점을 갖는 구간 $[a,b]$와 $[c,d]$를 곱하면 다음 구간이 됩니다.

$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)].$$

예를 들어, 하위 절단에 대한 공식은 x와 y를 각각 포함하는 구간 $[a,b]$와 $[c,d]$가 존재하여 q가 $[a,b]\cdot[c,d]$의 왼쪽에 있을 때 $q < x \cdot y$라는 뜻으로 읽을 수 있습니다. 일반적으로 $L_x(a)$이고 $U_x(b)$인 구간 $[a,b]$를 x의 근사로 생각하면 유용합니다. 연습문제 11.4를 참조하십시오.

이제 단위원 을 갖는 가환환 $(\mathbb{R}_\mathsf{d}, 0, 1, +, -, \cdot)$을 얻었습니다. 곱셈 역원을 다루려면 먼저 순서를 도입해야 합니다. $\leq$와 $<$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} (x \leq y) &:\equiv \forall(q:\mathbb{Q}).\, L_x(q) \Rightarrow L_y(q), \\ (x < y) &:\equiv \exists(q:\mathbb{Q}).\, U_x(q) \wedge L_y(q). \end{aligned}$$

보조정리 11.2.2. 모든 $x : \mathbb{R}_\mathsf{d}$와 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $L_x(q) \Leftrightarrow (q < x)$이고 $U_x(q) \Leftrightarrow (x < q)$입니다.

증명. $L_x(q)$이면 둥긂에 의해 $L_x(r)$를 만족하는 $r > q$가 단지 존재하며, $U_q(r)$이므로 $q < x$가 따라 나옵니다. 역으로 $q < x$이면 $U_q(r)$와 $L_x(r)$를 만족하는 $r : \mathbb{Q}$가 존재하고, L_x는 하방 집합이므로 $L_x(q)$가 성립합니다. 증명의 나머지 절반은 대칭적입니다. □

관계 $\leq$는 부분 순서이고, $<$는 추이적이며 비반사적입니다. 다음 선형성은

$$(x < y) \vee (y \leq x)$$

배중률을 가정하면 성립하지만, 배중률 없이는 다음과 같은 약한 선형성을 얻습니다.

$$(x < y) \Rightarrow (x < z) \vee (z < y). \tag{11.2.3}$$

언뜻 보기에는 (11.2.3)가 선형 순서와 무슨 관계가 있는지 분명하지 않을 수 있습니다. 그러나 $\epsilon > 0$에 대해 $x \equiv u - \epsilon$, $y \equiv u + \epsilon$으로 두면 다음을 얻습니다.

$$(u - \epsilon < z) \vee (z < u + \epsilon).$$

이는 "작은 수치 오차를 허용하는" 선형성입니다. 즉, 실제로 무한한 정밀도로 계산할 수 있으리라 기대하는 것은 무리이므로, 우리가 계산한 유한한 정밀도까지만 $<$를 판정할 수 있다는 것은 놀라운 일이 아닙니다.

(11.2.3)가 성립함을 보이기 위해 $x < y$라고 가정합시다. 그러면 $U_x(q)$이고 $L_y(q)$인 $q : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다. 둥긂에 의해 $r < q < s$, $U_x(r)$, $L_y(s)$를 만족하는 $r, s : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다. 그러면 위치성에 의해 $L_z(r)$이거나 $U_z(s)$입니다. 첫 번째 경우에는 $x < z$를 얻고, 두 번째 경우에는 $z < y$를 얻습니다.

고전적으로는 0이 아닌 모든 수에 곱셈 역원이 존재합니다. 그러나 배중률이 없으면 더 강한 조건이 필요합니다. $(x < y) \vee (y < x)$일 때 $x, y : \mathbb{R}_\mathsf{d}$가 서로 **떨어져 있다** 고 하고, 이를 $x \# y$로 표기합니다:

$$(x \# y) :\equiv (x < y) \vee (y < x).$$

$x \# y$이면 $\neg(x = y)$입니다. 그 역은 배중률을 가정하면 참이지만, 구성적으로는 증명할 수 없습니다. 실제로 $\neg(x = y)$가 $x \# y$를 함의한다면 약간의 배중률이 따라나옵니다. 연습문제 11.10를 참조하십시오.

정리 11.2.4. 실수가 가역일 필요충분조건은 0과 떨어져 있는 것입니다.

주 11.2.5. 실수가 가역일 필요충분조건은 단지 가역인 것임을 알 수 있습니다. 실제로 이는 임의의 환에서도 참인데, 환은 집합이고 곱셈 역원은 존재한다면 유일하기 때문입니다. 따름정리 3.9.2 다음의 논의를 참조하십시오.

증명. $x \cdot y = 1$이라고 가정합시다. 그러면 $a < x < b$, $c < y < d$, $0 < \min(ac, ad, bc, bd)$를 만족하는 $a, b, c, d : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다. $0 < ac$와 $0 < bc$로부터 a, b, c는 모두 양수이거나 모두 음수임이 따라나옵니다. 따라서 $0 < a < x$이거나 $x < b < 0$이므로 $x \# 0$입니다.

역으로 $x \# 0$이면 $x > 0$이거나 $x < 0$입니다. $x > 0$이면 x^{-1}을 다음과 같이 정의합니다:

$$L_{x^{-1}}(q) :\equiv (q > 0) \Rightarrow \exists(r : \mathbb{Q}).\, U_x(r) \wedge (qr < 1),$$
$$U_{x^{-1}}(q) :\equiv (q > 0) \wedge \exists(r : \mathbb{Q}).\, L_x(r) \wedge (qr > 1).$$

$x < 0$이면 이를 다음과 같이 정의합니다.

$$L_{x^{-1}}(q) :\equiv (q < 0) \wedge \exists(r : \mathbb{Q}).\, U_x(r) \wedge (qr > 1),$$
$$U_{x^{-1}}(q) :\equiv (q < 0) \Rightarrow \exists(r : \mathbb{Q}).\, L_x(r) \wedge (qr < 1).$$

□

아르키메데스 원리는 여러 가지 방식으로 서술할 수 있습니다. 우리는 $\mathbb{Q}$가 $\mathbb{R}_d$에서 조밀하다는 형태가 가장 명료하다고 생각합니다.

정리 11.2.6 ($\mathbb{R}_d$에 대한 아르키메데스 원리). 모든 $x, y : \mathbb{R}_d$에 대해, $x < y$이면 $x < q < y$를 만족하는 $q : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다.

증명. $<$의 정의에 의해 성립합니다. □

Dedekind 실수의 완비성을 다루기 전에, 이들이 어떤 대수적 구조를 갖는지 정확히 기술해 봅시다. 다음 정의에서는 최소한의 공리화를 목표로 하는 것이 아니라, 유용한 만큼의 구조와 성질을 목표로 합니다.

정의 11.2.7. **순서체** 는 상수 0, 1, 연산 $+$, $-$, $\cdot$, min, max, 그리고 단순 관계 $\leq$, $<$, $\#$가 함께 주어진 집합 F로서 다음을 만족하는 것입니다:

(i) $(F, 0, 1, +, -, \cdot)$는 단위원을 갖는 가환환입니다;
(ii) $x : F$가 가역일 필요충분조건은 $x \# 0$입니다;
(iii) $(F, \leq, \min, \max)$는 격자입니다;
(iv) 엄격 순서 $<$는 추이적이고, 비반사적이며, 약하게 선형적($x < y \Rightarrow x < z \vee z < y$)입니다;
(v) 분리 $\#$는 비반사적이고 대칭적이며 쌍대추이적($x \# y \Rightarrow x \# z \vee y \# z$)입니다.
(vi) 모든 $x, y, z : F$에 대해 다음이 성립합니다:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow \neg(y < x), & x < y \leq z &\Rightarrow x < z, \\ x \# y &\Leftrightarrow (x < y) \vee (y < x), & x \leq y < z &\Rightarrow x < z, \\ x \leq y &\Leftrightarrow x + z \leq y + z, & x \leq y \wedge 0 \leq z &\Rightarrow xz \leq yz, \\ x < y &\Leftrightarrow x + z < y + z, & 0 < z &\Rightarrow (x < y \Leftrightarrow xz < yz), \\ 0 < x + y &\Rightarrow 0 < x \vee 0 < y, & 0 &< 1. \end{aligned}$$

이러한 체는 모두 표준 매장 $\mathbb{Q} \to F$를 가집니다. 순서체가 **아르키메데스적** 이라는 것은, 모든 $x, y : F$에 대해 $x < y$이면 $x < q < y$를 만족하는 $q : \mathbb{Q}$가 단지 존재한다는 뜻입니다.

정리 11.2.8. Dedekind 실수는 아르키메데스적 순서체를 이룹니다.

증명. 지금까지 보인 내용으로 이 정리가 충분히 납득되기를 바라며 증명은 생략합니다. □

11.2.2 Dedekind 실수는 Cauchy 완비입니다

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$가 다음을 만족할 때 Cauchy 수열이라고 했음을 상기하십시오.

$$\prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} \sum_{(n:\mathbb{N})} \prod_{(m,k \geq n)} |x_m - x_k| < \epsilon. \tag{11.2.9}$$

내부 존재 양화사를 절단하지 않았다는 점에 주목하십시오. 실제로 수렴 속도를 계산하고 싶기 때문입니다. 오차 추정이 없는 근사는 유용한 정보를 거의 담고 있지 않습니다. 정리 2.15.7에 의해 (11.2.9)로부터 함수 $M : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$을 얻습니다. 이 함수를 수렴 모듈러스라고 부르며, $m, k \geq M(\epsilon)$이면 $|x_m - x_k| < \epsilon$이 성립합니다. 이로부터 모든 $\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $|x_{M(\delta/2)} - x_{M(\epsilon/2)}| < \delta + \epsilon$을 얻습니다. 사실 사상 $(\epsilon \mapsto x_{M(\epsilon/2)}) : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}$는 원래의 Cauchy 조건 (11.2.9)과 똑같은 극한 정보를 담고 있습니다. 앞으로는 Cauchy 수열 대신 이러한 근사 함수를 사용하겠습니다.

정의 11.2.10. Cauchy **근사** 는 다음을 만족하는 사상 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 입니다.

$$\forall(\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+). |x_\delta - x_\epsilon| < \delta + \epsilon. \tag{11.2.11}$$

Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 의 **극한** 은 다음을 만족하는 수 $\ell : \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 입니다.

$$\forall(\epsilon, \theta : \mathbb{Q}_+). |x_\epsilon - \ell| < \epsilon + \theta.$$

정리 11.2.12. $\mathbb{R}_\mathsf{d}$ 의 모든 Cauchy 근사는 극한을 가집니다.

증명. 여기서 보이는 것은 극한의 단순 존재가 아니라 존재라는 점에 주목하십시오. Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 가 주어졌을 때, 다음과 같이 정의합니다.

$$L_y(q) :\equiv \exists(\epsilon, \theta : \mathbb{Q}_+). L_{x_\epsilon}(q + \epsilon + \theta),$$
$$U_y(q) :\equiv \exists(\epsilon, \theta : \mathbb{Q}_+). U_{x_\epsilon}(q - \epsilon - \theta).$$

L_y 와 U_y 가 원소를 가지며 둥글다는 것은 분명합니다. 서로소성은 Cauchy 근사 조건으로부터 따라 나옵니다. 위치성을 보이기 위해 $q < r$ 인 임의의 $q, r : \mathbb{Q}$ 를 생각합시다. $4\epsilon < r - q$ 인 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$ 가 존재합니다. $q + 2\epsilon < r - 2\epsilon$ 이므로 단순히 $L_{x_\epsilon}(q + 2\epsilon)$ 또는 $U_{x_\epsilon}(r - 2\epsilon)$ 가 성립합니다. 첫 번째 경우에는 $L_y(q)$ 를, 두 번째 경우에는 $U_y(r)$ 를 얻습니다.

y 가 x 의 극한임을 보이기 위해 임의의 $\epsilon, \theta : \mathbb{Q}_+$ 를 생각하십시오. $\mathbb{Q}$ 는 $\mathbb{R}_\mathsf{d}$ 에서 조밀하므로 다음을 만족하는 $q, r : \mathbb{Q}$ 가 단지 존재합니다.

$$x_\epsilon - \epsilon - \theta < q < x_\epsilon - \epsilon - \theta/2 < x_\epsilon < x_\epsilon + \epsilon + \theta/2 < r < x_\epsilon + \epsilon + \theta,$$

따라서 $q < y < r$ 입니다. 이로부터 $|y - x_\epsilon| < \epsilon + \theta$ 가 따라 나옵니다. □

완결성을 위해 고전적인 정식화도 함께 기록해 둡니다.

따름정리 11.2.13. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 가 코시 조건 (11.2.9)을 만족한다고 가정합시다. 그러면 다음을 만족하는 $y : \mathbb{R}_\mathsf{d}$ 가 존재합니다.

$$\prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} \sum_{(n:\mathbb{N})} \prod_{(m \geq n)} |x_m - y| < \epsilon.$$

증명. 정리 2.15.7에 의해 $\bar{x}(\epsilon) :\equiv x_{M(\epsilon/2)}$ 가 Cauchy 근사가 되는 $M : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ 이 존재합니다. y 를 그 극한이라고 합시다. 이 극한은 정리 11.2.12에 의해 존재합니다. 임의의 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$ 가 주어졌을 때 $n :\equiv M(\epsilon/4)$ 라 두면, 임의의 $m \geq n$ 에 대해 다음이 성립함을 관찰할 수 있습니다.

$$|x_m - y| \leq |x_m - x_n| + |x_n - y| = |x_m - x_n| + |\bar{x}(\epsilon/2) - y| < \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon.$$ □

11.2.3 Dedekind 실수의 Dedekind 완비성

우리는 $\mathbb{R}_\mathsf{d}$ 를 $\mathbb{Q}$ 위의 Dedekind 절단들의 타입으로 얻었습니다. 그러나 그 대신 임의의 아르키메데스적 순서체 F 에서 출발하여 F 위의 Dedekind 절단을 구성할 수도 있었습니다. 이들은 다시 아르키메데스적 순서체 $\bar{F}$ 를 이루며, 이를 F **의** Dedekind **완비화**라고 합니다. 이때 F 는 부분체로 포함됩니다. 이 구성을 $\mathbb{R}_\mathsf{d}$ 에 적용하면 어떻게 될까요? 더 많은 실수를 얻게 될까요? 답은 부정적입니다. 사실 우리는 더 강한 결과, 즉 $\mathbb{R}_\mathsf{d}$ 가 최종적이라는 것을 증명할 것입니다.

순서체 F 위의 엄격한 순서 $<$ 가 사상 $< : F \to F \to \Omega$ 일 때, 순서체 F 가 Ω**에 대해 허용 가능**하다고 합니다.

정리 11.2.14. Ω에 대해 허용 가능한 모든 아르키메데스적 순서체는 $\mathbb{R}_d$의 부분체입니다.

증명. F를 아르키메데스적 순서체라 합시다. 모든 $x : F$에 대해 $L_x, U_x : \mathbb{Q} \to \Omega$를 다음과 같이 정의합니다.

$$L_x(q) :\equiv (q < x) \qquad \text{그리고} \qquad U_x(q) :\equiv (x < q).$$

(방금 F가 Ω에 대해 허용 가능하다는 가정을 사용하였습니다.) 그러면 (L_x, U_x)는 Dedekind 절단입니다. 실제로 이 절단들은 F가 아르키메데스적이고 $<$가 추이적이므로 원소를 가지며 둥글고, $<$가 비반사적이므로 서로소이며, $<$가 약한 선형 순서이므로 위치가 정해져 있습니다. $e : F \to \mathbb{R}_d$를 사상 $e(x) :\equiv (L_x, U_x)$라고 합시다.

e가 순서를 보존하고 반영하는 체 매장임을 주장합니다. 우선 유리수 q에 대해 $e(q) = q$임에 주목하십시오. 다음으로, 모든 $x, y : F$에 대해 다음 동치들이 성립합니다.

$$x < y \Leftrightarrow (\exists(q : \mathbb{Q}).\, x < q < y) \Leftrightarrow (\exists(q : \mathbb{Q}).\, U_x(q) \wedge L_y(q)) \Leftrightarrow e(x) < e(y),$$

따라서 e는 실제로 순서를 보존하고 반영합니다. $e(x + y) = e(x) + e(y)$가 성립하는 이유는 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 다음이 성립하기 때문입니다.

$$q < x + y \Leftrightarrow \exists(r, s : \mathbb{Q}).\, r < x \wedge s < y \wedge q = r + s.$$

오른쪽에서 왼쪽으로의 함의는 자명합니다. 반대 방향의 경우, $q < x + y$이면 $q - y < r < x$를 만족하는 $r : \mathbb{Q}$가 단지 존재하며, $s :\equiv q - r$로 두면 원하는 r과 s를 얻습니다. e가 곱셈을 보존한다는 것은 연습 문제로 남겨 둡니다. □

$\mathbb{R}_d$ 위의 Dedekind 절단이 새로운 것을 주지 않는다는 것을 보이려면 보조정리 하나만 더 필요합니다.

보조정리 11.2.15. F가 Ω에 대해 허용 가능하면 그 Dedekind 완비화도 그렇습니다.

증명. $\bar{F}$를 F의 Dedekind 완비화라고 합시다. $\bar{F}$ 위의 엄격한 순서는 다음과 같이 정의됩니다.

$$((L, U) < (L', U')) :\equiv \exists(q : \mathbb{Q}).\, U(q) \wedge L'(q).$$

$U(q)$와 $L'(q)$는 Ω의 원소이므로, Ω가 논리곱과 가산 존재 양화에 대해 닫혀 있기만 하면 이 보조정리가 성립하며, 이는 처음부터 가정한 것입니다. □

따름정리 11.2.16. Dedekind 실수는 Dedekind 완비입니다. 즉, 모든 실수값 Dedekind 절단 (L, U)에 대해, 모든 $y : \mathbb{R}_d$에 대하여 $L(y) = (y < x)$이고 $U(y) = (x < y)$인 $x : \mathbb{R}_d$가 유일하게 존재합니다.

증명. 보조정리 11.2.15에 의해 $\mathbb{R}_d$의 Dedekind 완비화 $\bar{\mathbb{R}}_d$는 Ω에 대해 허용 가능하므로, 정리 11.2.14에 의해 매장 $\bar{\mathbb{R}}_d \to \mathbb{R}_d$와 매장 $\mathbb{R}_d \to \bar{\mathbb{R}}_d$를 얻습니다. 그런데 이 매장들은 동형사상이어야 합니다. 그 합성은 조밀한 부분체 $\mathbb{Q}$를 고정하는 순서 보존 체 준동형사상이고, 이는 곧 그 합성이 항등이라는 뜻이기 때문입니다. 이제 따름정리는 $\bar{\mathbb{R}}_d \to \mathbb{R}_d$가 동형사상이라는 사실로부터 즉시 따라 나옵니다. □

11.3 Cauchy 실수

Cauchy 실수는 의도상 Cauchy 수열의 극한에 대한 $\mathbb{Q}$ 의 완비화입니다. Cauchy 실수의 고전적인 구성에서는 $\mathbb{Q}$ 의 모든 Cauchy 수열로 이루어진 집합 $\mathcal{C}$를 생각한 다음 적절한 몫 $\mathcal{C}/{\approx}$를 만듭니다. 그런 다음 $\mathcal{C}/{\approx}$가 Cauchy 완비임을 보이기 위해 Cauchy 수열 $x : \mathbb{N} \to \mathcal{C}/{\approx}$를 생각하고, 이를 수열들의 수열 $\bar{x} : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$로 들어 올린 뒤, $\bar{x}$를 사용하여 x의 극한을 구성합니다. 그러나 x를 $\bar{x}$로 들어 올리는 데에는 가산 선택 공리($X = \mathbb{N}$인 경우의 (3.8.1))나 배중률이 사용되는데, 우리는 이를 피하고 싶을 수 있습니다. 마지막 단계가 몫인 모든 실수 구성은 이러한 결함을 안고 있습니다. 구성적 수학에서 이 난제를 벗어나는 일반적인 방법은 세 가지가 있습니다.

(i) 실수가 세토이드 $(\mathcal{C}, \approx)$, 즉 행정적 명령에 의해 일치 관계가 부여된 Cauchy 수열들의 타입 $\mathcal{C}$인 것처럼 간주합니다. 그러면 실수의 수열은 단순히 그 실수들을 나타내는 Cauchy 수열들의 수열입니다.

(ii) 유혹에 굴복하여 가산 선택 공리를 받아들이는 것입니다. 어쨌든 이 공리는 실현 가능성 모델과 같이 계산적 관점에 기반한 구성적 수학의 대부분의 모델에서 타당합니다.

(iii) Cauchy 실수를 가치 없는 것으로 선언하고 대신 Dedekind 실수를 구성합니다. 이러한 판정은 구성적 수학의 층 이론적 모형과 같은 특정 맥락에서는 전적으로 타당합니다. 그러나 §11.2에서 보았듯이, 구성적 Dedekind 실수에도 나름의 문제가 있습니다.

그러나 고차 귀납적 타입을 사용하면 네 번째 해법이 있습니다. 우리는 이 해법이 위의 어느 방법보다도 바람직하며, 고전 수학자에게도 흥미로울 것이라고 믿습니다. 그 아이디어는 Cauchy 실수가 $\mathbb{Q}$ 로 생성된 자유 완비 거리 공간이어야 한다는 것입니다. 일반적으로 어떤 종류의 자유 대상이든 그것을 구성하려면 생성원에 해당 연산을 여러 번 반복하여 적용해야 합니다. 예를 들어 집합 X 위의 자유군의 원소는 X의 원소들의 이항 곱과 역에 그치지 않고, 곱과 역 구성을 반복하여 얻은 단어들입니다. 따라서 Cauchy 완비화에서도 같은 일이 성립하리라고 자연스럽게 기대할 수 있으며, 이때 관련된 "연산"은 "Cauchy 수열의 극한을 취하는 것"입니다. (이 경우 반복은 초한적으로 이루어져야 합니다. 무한히 많은 단계를 거친 후에도 극한을 취해야 할 새로운 Cauchy 수열이 생기기 때문입니다.)

위에서 언급한 논증은 배중률이나 가산 선택이 성립하면 Cauchy 완비화가 매우 특별하다는 것을 보여 줍니다. 즉, 공간의 완비화를 만들 때 한 단계 후에 연산 적용을 멈추어도 충분합니다. 이는 자유 모노이드와 자유군이 (기약) 단어를 사용하여 명시적으로 기술될 수 있다는 사실과 유사한 것으로 볼 수 있습니다. 그러나 §6.11에서 보았듯이, 고차 귀납적 타입을 사용하면 명시적 기술이 존재하든 존재하지 않든 자유 대상을 직접 구성할 수 있습니다. 이 절에서는 Cauchy 실수에서도 같은 일이 성립함을 보입니다(비슷한 기법으로 임의의 거리 공간의 Cauchy 완비화를 구성할 수 있습니다. 연습문제 11.9을 참조하십시오). 구체적으로, 고차 귀납적 타입을 사용하면 Cauchy 수열의 극한을 추가하는 것과 일치 관계로 몫을 취하는 것을 동시에 할 수 있으므로, 실수의 수열을 대표원의 수열로 들어 올리는 문제를 피할 수 있습니다.

11.3.1 Cauchy 실수의 구성

고차 귀납적 타입으로서 Cauchy 실수 $\mathbb{R}_c$를 구성하는 것은 §6.11에서 살펴본 자유 대수적 구조의 구성보다 조금 더 미묘합니다. 우리는 실수의 Cauchy 수열을 입력으로 받는 "극한을 취하는" 생성자를 포함하려고 하지만, "실수의 Cauchy 수열"이라는 개념은 실수 사이의 "거리"를 측정하는 어떤 방법이

있어야 성립합니다. 물론 일반적으로 두 실수 사이의 거리는 또 다른 실수이므로, 잠재적으로 문제가 될 수 있는 순환성이 생깁니다.

그러나 실수의 Cauchy 수열 개념에 실제로 필요한 것은 일반적인 "거리" 개념이 아니라, 임의의 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 "두 실수 사이의 거리가 ϵ보다 작다"고 말하는 방법입니다. 이는 이항 관계들의 족으로 나타낼 수 있으며, 이를 $\sim_\epsilon : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathsf{Prop}$로 표기하겠습니다. $x \sim_\epsilon y$의 의도된 의미는 $|x-y| < \epsilon$이지만, 아직 뺄셈, 절댓값, 부등식 개념을 사용할 수 없으므로(결국 우리는 이제 막 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$를 정의하고 있는 중입니다), 이 관계 $\sim_\epsilon$들을 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$ 자체를 정의하는 것과 동시에 정의해야 합니다. 또한 $\sim_\epsilon$는 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 두 복사본으로 색인된 타입 족이므로, 일반적인 상호 (고차) 귀납적 정의로는 이를 할 수 없으며, 대신 고차 귀납-귀납적 정의를 사용해야 합니다.

§5.7에서 일반적인 귀납-귀납적 정의 개념을 사용하면 타입과 그 타입으로 색인된 타입 족을 동시 귀납법으로 정의할 수 있었음을 떠올리십시오. 물론 이것의 "고차" 버전에서는 타입과 족 모두가 점 생성자뿐 아니라 경로 생성자도 가질 수 있습니다. 고차 귀납-귀납적 정의의 일반 이론을 정식화하려고 시도하지는 않겠지만, 앞으로 제시할 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\sim_\epsilon$의 기술이 그 발상을 명료하게 해 주기를 바랍니다.

주 11.3.1. 또한 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 귀납적 정의와 동시에 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 재귀 원리를 사용하여 $\sim_\epsilon$을 정의하는 고차 귀납적-재귀적 정의를 고려할 수도 있습니다. 그러나 우리는 두 가지 이유로 귀납-귀납적 방식을 택합니다. 첫째, 고차 귀납적-재귀적 정의는 호모토피적 의미론에서 정당화하기가 더 어려워 보입니다. 둘째로, 그리고 더 중요하게는, 귀납-귀납적 정의가 더 강력한 귀납 원리를 제공하며, Cauchy 실수의 기본적인 이론을 전개하는 데에도 이 귀납 원리가 필요합니다.

마지막으로, §11.2.2에서 Dedekind 실수의 Cauchy 완비성을 논의할 때와 마찬가지로, Cauchy 수열 대신 Cauchy 근사(정의 11.2.10)를 사용합니다. 물론 이제 우리의 Cauchy 근사는 Dedekind 실수나 유리수가 아니라 Cauchy 실수로 이루어집니다.

정의 11.3.2. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$와 관계 $\sim : \mathbb{R}_\mathsf{c} \times \mathbb{R}_\mathsf{c} \times \mathbb{Q}_+ \to \mathcal{U}$을 다음과 같은 고차 귀납-귀납적 타입 족이라고 합시다. Cauchy **실수** 의 타입 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$는 다음 생성자들로 생성됩니다.

- 유리수 점: 임의의 $q : \mathbb{Q}$에 대해 실수 $\mathsf{rat}(q)$가 있습니다.
- 극한점: 다음을 만족하는 임의의 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해

$$\forall(\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \sim_{\delta+\epsilon} x_\epsilon \tag{11.3.3}$$

  점 $\mathsf{lim}(x) : \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 있습니다. 이러한 x를 Cauchy **근사**라고 부릅니다.
- 경로: 다음을 만족하는 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해

$$\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, u \sim_\epsilon v \tag{11.3.4}$$

  그러면 경로 $\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_\mathsf{c}}(u, v) : u =_{\mathbb{R}_\mathsf{c}} v$가 존재합니다.

이와 동시에, 타입 족 $\sim : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathcal{U}$은 다음 생성자들로 생성됩니다. 여기서 q와 r는 유리수를, δ, ϵ, η는 양의 유리수를, u와 v는 Cauchy 실수를, x와 y는 Cauchy 근사를 나타냅니다.

- 임의의 q, r, ϵ에 대해 $-\epsilon < q - r < \epsilon$이면 $\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(r)$가 성립합니다,
- 임의의 q, y, ϵ, δ에 대해 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$이면 $\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \mathsf{lim}(y)$가 성립합니다,
- 임의의 x, r, ϵ, δ에 대해 $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$이면 $\mathsf{lim}(x) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(r)$가 성립합니다,
- 임의의 $x, y, \epsilon, \delta, \eta$에 대해 $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$이면 $\mathsf{lim}(x) \sim_\epsilon \mathsf{lim}(y)$가 성립합니다,
- 임의의 u, v, ϵ에 대해 $\xi, \zeta : u \sim_\epsilon v$이면 $\xi = \zeta$가 성립합니다(명제 절단).

$\mathbb{R}_c$의 첫 번째 생성자는 모든 유리수를 실수로 간주할 수 있음을 말합니다. 두 번째 생성자는 실수에 대한 임의의 Cauchy 근사로부터 그 "극한"이라고 불리는 새로운 실수를 얻을 수 있음을 말합니다. 그리고 세 번째 생성자는 두 Cauchy 근사가 일치하면 그 극한들이 같다는 생각을 표현합니다.

$\sim$의 처음 네 생성자는 두 유리수가 언제 가까운지, 유리수가 언제 극한에 가까운지, 두 극한이 언제 가까운지를 규정합니다. 두 유리수의 경우 이는 유리수에 대한 통상적인 ϵ-근접성 개념일 뿐이며, 나머지 경우들은 각 근사항 x_δ가 극한 $\mathsf{lim}(x)$로부터 δ 이내에 있어야 한다는 점에 주목하여 유도할 수 있습니다.

증명 관련성을 상기해 봅시다. lim으로부터 얻은 실수는 Cauchy 근사 x뿐만 아니라 (11.3.3)의 증명 p로도 표현되므로, 엄밀하게는 단순히 $\mathsf{lim}(x)$가 아니라 $\mathsf{lim}(x,p)$라고 써야 했습니다. 비슷한 관찰이 $\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_c}$와 (11.3.4)에도 적용되지만, $\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_c}(u,v,p) : u = v$ 대신 단순히 $\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_c} : u = v$라고 쓰겠습니다. 이러한 표기법의 남용은 우리가 생략하는 것이 단순 명제와 쉽게 추측할 수 있는 정보뿐이라는 사실로 완화됩니다. 마찬가지로, $\sim_\epsilon$의 마지막 생성자는 나머지 네 생성자에 이름을 붙이지 않는 것을 정당화합니다.

우리는 곧바로 $\mathbb{R}_c$를 많은 실수로 채울 수 있습니다. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$가 유리수의 전통적인 Cauchy 수열이고, $M : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$이 그 수렴 모듈러스라고 가정합시다. 그러면 필요한 증거를 만들어 내는 데 $\sim$의 첫 번째 생성자를 사용하여, $\mathsf{rat} \circ x \circ M : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_c$가 Cauchy 근사임을 알 수 있습니다. 따라서 $\mathsf{lim}(\mathsf{rat} \circ x \circ M)$는 실수입니다. $\sqrt{2}$, π, e, $\cdots$ 등 여러 유명한 실수는 모두 이러한 유리수 Cauchy 수열의 극한입니다.

11.3.2 Cauchy 실수에 대한 귀납과 재귀

물론 $\mathbb{R}_c$로 유용한 일을 하려면 그 귀납 원리를 제시해야 합니다. 둘 이상의 대상을 한꺼번에 귀납적으로 정의할 때 늘 그렇듯이, $\mathbb{R}_c$와 $\sim$의 기본 귀납 원리는 둘 모두에 대한 동시 귀납을 필요로 합니다. 따라서 이 원리는 각각 $\mathbb{R}_c$와 $\sim$ 위의 두 타입 족과 각 생성자에 대응하는 데이터가 주어지면 이 두 족 모두의 단면이 존재한다는 내용일 것으로 예상할 수 있습니다. 그러나 $\sim$은 $\mathbb{R}_c$의 두 사본으로 인덱싱되므로 이 족들의 정확한 의존 관계는 다소 미묘합니다. 귀납 원리는 다음과 같은 임의의 타입 족 쌍에 적용됩니다.

$$\begin{aligned} &A : \mathbb{R}_c \to \mathcal{U} \\ &B : \prod_{x,y:\mathbb{R}_c} A(x) \to A(y) \to \prod_{\epsilon:\mathbb{Q}_+} (x \sim_\epsilon y) \to \mathcal{U}. \end{aligned}$$

A의 타입은 자명하지만 B의 타입은 약간의 생각이 필요합니다. B는 $\sim$에 의존해야 하는데 $\sim$은 다시 $\mathbb{R}_c$의 두 사본과 $\mathbb{Q}_+$의 한 사본에 의존하므로, B가 $(x \sim_\epsilon y)$의 원소뿐만 아니라 변수 $x, y : \mathbb{R}_c$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에도 의존해야 한다는 것은 꽤 자명합니다. 조금 덜 자명한 점은 B가 $A(x)$와 $A(y)$에도 의존해야 한다는 것입니다.

A가 (타입 족이 아닌) 단순한 타입인 비의존적 경우(재귀 원리)를 생각하면 이 점이 더 분명해질 수 있습니다. 이 경우 B는 $x, y : \mathbb{R}_c$나 $x \sim_\epsilon y$에 의존하지 않을 것으로 예상됩니다. 그런데 재귀 원리는 (그에 따르는 유일성 원리와 함께) $\sim_\epsilon$을 갖춘 $\mathbb{R}_c$가 어떤 범주의 "시작 대상"임을 말해야 하므로, 이 경우 A와 B의 의존 구조는 $\mathbb{R}_c$와 $\sim_\epsilon$의 의존 구조를 그대로 반영해야 합니다. 즉, $B : A \to A \to \mathbb{Q}_+ \to \mathcal{U}$이어야 합니다. 이 관찰을 의존적인 경우에는 B가 $x, y : \mathbb{R}_c$와 $x \sim_\epsilon y$에도 의존해야 한다는 사실과 결합하면, 필연적으로 위에서 제시한 B의 타입에 이르게 됩니다.

B를 타입 $A(x)$와 $A(y)$ 사이의 관계들로 이루어진 ϵ-인덱스 족으로 생각하면 도움이 됩니다. 이를 염두에 두고 $B(x,y,a,b,\epsilon,\xi)$를 $(x,a) \sim_\epsilon^\xi (y,b)$로 쓸 수 있습니다. $\xi : x \sim_\epsilon y$는 존재할 경우

유일하므로 일반적으로 표기에서 이를 생략하고 $(x,a) \frown_\epsilon (y,b)$로 씁니다. 이 관계가 $x \sim_\epsilon y$일 때만 정의된다는 점을 염두에 두는 한 이렇게 해도 무방합니다. 때로는 더 단순화하여 $a \frown_\epsilon b$로 쓰고 x와 y는 a와 b의 타입으로부터 추론할 수도 있지만, 명확성을 위해 이들을 포함해야 할 때도 있습니다.

이제 타입 족 $A : \mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathcal{U}$과 위와 같은 관계 족 $\frown$이 주어지면, 귀납 원리의 가정은 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ 또는 $\sim$의 각 생성자마다 하나씩 대응하는 다음 데이터로 이루어집니다.

- 임의의 $q : \mathbb{Q}$에 대한 원소 $f_q : A(\mathsf{rat}(q))$입니다.
- 임의의 Cauchy 근사 x와 다음을 만족하는 임의의 $a : \prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} A(x_\epsilon)$에 대해

$$\forall(\delta,\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (x_\delta, a_\delta) \frown_{\delta+\epsilon} (x_\epsilon, a_\epsilon), \tag{11.3.5}$$

  원소 $f_{x,a} : A(\mathsf{lim}(x))$. 이러한 a를 x 위의 **의존** Cauchy **근사** 라고 부릅니다.
- $h : \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, u \sim_\epsilon v$를 만족하는 $u, v : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}$와, $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (u,a) \frown_\epsilon (v,b)$를 만족하는 모든 $a : A(u)$와 $b : A(v)$에 대한 의존 경로 $a =^A_{\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_{\mathsf{c}}}(u,v)} b$입니다.
- $q, r : \mathbb{Q}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $-\epsilon < q - r < \epsilon$이면 다음이 성립합니다. $(\mathsf{rat}(q), f_q) \frown_\epsilon (\mathsf{rat}(r), f_r)$.
- $q : \mathbb{Q}$와 $\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+$, Cauchy 근사 y, 그리고 y 위의 의존 Cauchy 근사 b에 대해, $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$이면

$$(\mathsf{rat}(q), f_q) \frown_{\epsilon-\delta} (y_\delta, b_\delta) \;\Rightarrow\; (\mathsf{rat}(q), f_q) \frown_\epsilon (\mathsf{lim}(y), f_{y,b}).$$

- 마찬가지로, $r : \mathbb{Q}$와 $\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+$, Cauchy 근사 x, 그리고 x 위의 의존 Cauchy 근사 a에 대해, $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$이면

$$(x_\delta, a_\delta) \frown_{\epsilon-\delta} (\mathsf{rat}(r), f_r) \;\Rightarrow\; (\mathsf{lim}(x), f_{x,a}) \frown_\epsilon (\mathsf{rat}(q), f_r).$$

- $\epsilon, \delta, \eta : \mathbb{Q}_+$와 Cauchy 근사 x, y, 그리고 각각 x와 y 위의 의존 Cauchy 근사 a와 b에 대해, $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$이면

$$(x_\delta, a_\delta) \frown_{\epsilon-\delta-\eta} (y_\eta, b_\eta) \;\Rightarrow\; (\mathsf{lim}(x), f_{x,a}) \frown_\epsilon (\mathsf{lim}(y), f_{y,b}).$$

- $\epsilon : \mathbb{Q}_+$와 $x, y : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}$, $\xi, \zeta : x \sim_\epsilon y$, 그리고 $a : A(x)$와 $b : A(y)$에 대하여 $(x,a) \frown^\xi_\epsilon (y,b)$와 $(x,a) \frown^\zeta_\epsilon (y,b)$에서 각각 취한 임의의 두 원소는 $\xi = \zeta$ 위에서 의존적으로 같습니다. 늘 그렇듯이 이는 $\frown$의 값이 단순 명제이기를 요구하는 것과 동치임에 유의하십시오.

이러한 가정 아래에서 다음 함수들을 이끌어 냅니다.

$$f : \prod_{x:\mathbb{R}_{\mathsf{c}}} A(x)$$
$$g : \prod_{(x,y:\mathbb{R}_{\mathsf{c}})} \prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} \prod_{(\xi:x\sim_\epsilon y)} (x, f(x)) \frown^\xi_\epsilon (y, f(y))$$

이 함수들은 예상대로 다음과 같이 계산됩니다:

$$f(\mathsf{rat}(q)) :\equiv f_q, \tag{11.3.6}$$
$$f(\mathsf{lim}(x)) :\equiv f_{x,(f,g)[x]}. \tag{11.3.7}$$

여기서 $(f,g)[x]$는 Cauchy 근사 x에 f와 g를 적용하여 얻은 x 위의 의존 Cauchy 근사를 나타냅니다. 즉, $(f,g)[x]_\epsilon :\equiv f(x_\epsilon) : A(x_\epsilon)$으로 정의하고, 그러면 임의의 $\epsilon,\delta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $g(x_\epsilon, x_\delta, \epsilon+\delta, \xi)$가 $(f,g)[x]$가 의존 Cauchy 근사라는 사실의 증거가 됩니다. 여기서 $\xi : x_\epsilon \sim_{\epsilon+\delta} x_\delta$는 x가 Cauchy 근사라는 가정으로부터 나옵니다.

이 표기법은 다시는 사용하지 않을 것이므로 기억하려고 애쓰지 않아도 됩니다. 일반적으로 우리는 패턴 매칭 관례를 사용하며, 여기서 f는 (11.3.6)과 (11.3.7) 같은 등식으로 정의되고, (11.3.7)의 우변에는 기호 $f(x_\epsilon)$과 이들이 의존 Cauchy 근사를 이룬다는 가정이 포함될 수 있습니다.

그러나 이 귀납 원리는 여전히 상당히 장황하다는 점을 인정해야 합니다. 이를 이해하는 데 도움이 되도록, 이 원리가 특수한 경우로서 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\sim$ 각각에 대한 두 개의 별개의 귀납 원리를 포함한다는 점을 살펴봅니다. 첫째, 타입 족 $A : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathcal{U}$만 주어졌다고 가정하고, $\frown$을 $\mathbf{1}$에서 상수인 것으로 정의하십시오. 그러면 요구되는 데이터의 대부분이 자명해지며, 다음이 남습니다.

- 임의의 $q : \mathbb{Q}$에 대하여 원소 $f_q : A(\mathsf{rat}(q))$,
- 임의의 Cauchy 근사 x와 임의의 $a : \prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} A(x_\epsilon)$에 대해, 원소 $f_{x,a} : A(\mathsf{lim}(x))$,
- $u,v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $h : \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, u \sim_\epsilon v$, 그리고 $a : A(u)$와 $b : A(v)$에 대하여 $a =^A_{\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_\mathsf{c}}(u,v)} b$가 성립합니다.

이러한 데이터가 주어지면 귀납 원리는 다음을 만족하는 함수 $f : \prod_{(x:\mathbb{R}_\mathsf{c})} A(x)$를 제공합니다.

$$f(\mathsf{rat}(q)) :\equiv f_q,$$
$$f(\mathsf{lim}(x)) :\equiv f_{x,f(x)}.$$

이 원리를 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-**귀납법**이라고 부릅니다. 이 원리가 본질적으로 말하는 바는, $\sim_\epsilon$을 주어진 것으로 받아들이면 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$가 그 생성자들에 의해 귀납적으로 생성된다는 것입니다.

A가 단순 성질이면 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납의 세 번째 가설은 자동으로 성립한다는 점에 유의하십시오(곧 보겠지만 이들은 사실 동치인 명제입니다). 따라서 실수의 단순 성질은 유리수와 Cauchy 근사의 극한에 대해서만 증명하면 증명할 수 있습니다. 다음은 그 예입니다.

보조정리 11.3.8. 임의의 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대하여 $u \sim_\epsilon u$가 성립합니다.

증명. $A(u) :\equiv \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (u \sim_\epsilon u)$로 정의합니다. ($\sim$의 마지막 생성자에 의해) 이것은 단순 명제이므로, $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법에 의해 u가 $\mathsf{rat}(q)$인 경우와 u가 $\mathsf{lim}(x)$인 경우에 증명하면 충분합니다. 첫 번째 경우에는 임의의 ϵ에 대하여 $|q-q| < \epsilon$이 분명히 성립하므로, $\sim$의 첫 번째 생성자에 의해 $\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(q)$가 성립합니다. 두 번째 경우에는 모든 $\delta,\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대하여 $x_\delta \sim_\epsilon x_\delta$라고 귀납적으로 가정할 수 있습니다. 그러면 특히 $x_{\epsilon/3} \sim_{\epsilon/3} x_{\epsilon/3}$가 성립하므로, $\sim$의 네 번째 생성자에 의해 $\mathsf{lim}(x) \sim_\epsilon \mathsf{lim}(x)$가 성립합니다. □

보조정리 11.3.8로부터, $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법을 직접 적용하는 방법은 타입족 $A : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathcal{U}$이 단순 성질일 때에만 성공할 가능성이 있음을 알 수 있습니다. 이를 확인하기 위해 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 고정합니다. v를 u로 두면, $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법의 세 번째 가정에 의해 임의의 $a : A(u)$에 대하여 $a =^A_{\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_\mathsf{c}}(u,u)} a$가 성립합니다. 여기에 점 $b : A(u)$가 추가로 주어지면 $a =^A_{\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_\mathsf{c}}(u,u)} b$도 얻습니다. 의존 경로 타입의 정의로부터 이 두 경로를 결합하면 $a = b$가 함의된다는 결론을 얻습니다. 즉 $A(u)$의 모든 점은 서로 같습니다.

정리 11.3.9. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$는 집합입니다.

증명. 방금 단순 관계 $P(u,v) :\equiv \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\,(u \sim_\epsilon v)$가 반사적임을 보였습니다. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 경로 생성자에 의해 이 관계는 동일성을 함의하므로, 결과는 정리 7.2.2에서 따라 나옵니다. □

또한 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$가 유리수의 Cauchy 수열들의 집합의 몫이 아닐 수는 있지만, 그럼에도 실수의 Cauchy 수열들의 집합의 몫이라는 것을 보일 수 있습니다. (물론 이것은 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 유효한 정의가 아니지만, 유용한 성질입니다.) Cauchy 근사들의 타입을 다음과 같이 정의합니다.

$$\mathcal{C} :\equiv \{\, x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \mid \forall(\epsilon,\delta : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \sim_{\delta+\epsilon} x_\epsilon \,\}.$$

$\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 두 번째 생성자는 함수 $\lim : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 제공합니다.

보조정리 11.3.10. 모든 실수는 단순히(merely) 극한점입니다: $\forall(u : \mathbb{R}_\mathsf{c}).\,\exists(x : \mathcal{C}).\,u = \lim(x)$. 다시 말해 $\lim : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$는 전사입니다.

증명. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납에 의해 u에 대해 경우를 나눌 수 있습니다. 물론 u가 극한 $\lim(x)$이면 명제는 자명합니다. 따라서 u가 유리수 점 $\mathsf{rat}(q)$라고 가정합시다. 우리는 u가 $\lim(\lambda\epsilon.\,\mathsf{rat}(q))$와 같다고 주장합니다. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$의 경로 생성자에 의해, 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \lim(\lambda\epsilon.\,\mathsf{rat}(q))$임을 보이면 충분합니다. 그리고 $\sim$의 두 번째 생성자에 의해, 이를 위해서는 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(q)$를 만족하는 $\delta : \mathbb{Q}_+$를 찾으면 충분합니다. 그런데 $\sim$의 첫 번째 생성자에 의해, $\delta < \epsilon$인 임의의 $\delta : \mathbb{Q}_+$를 택할 수 있습니다. □

보조정리 11.3.11. A가 집합이고 $f : \mathcal{C} \to A$가 다음과 같은 의미에서 Cauchy 근사의 일치를 존중한다면

$$\forall(x,y : \mathcal{C}).\,\lim(x) = \lim(y) \Rightarrow f(x) = f(y),$$

f는 $\lim : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 통해 유일하게 인수분해됩니다.

증명. $\lim$은 전사이므로, 정리 10.1.5에 의해 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$는 $\mathcal{C}$를 $\lim$의 핵쌍으로 나눈 몫입니다. 그런데 이것이 바로 보조정리의 진술입니다. □

귀납 원리의 두 번째 특수한 경우로, 이번에는 A를 $\mathbf{1}$에서 상수인 것으로 택한다고 가정합시다. 이 경우 $\frown$은 단순히 ϵ-근접한 실수 쌍들 위의 ϵ으로 첨자화된 관계족이므로, $(u,\star) \frown_\epsilon (v,\star)$ 대신 $u \frown_\epsilon v$라고 쓸 수 있습니다. 그러면 필요한 데이터는 다음으로 줄어듭니다. 여기서 q,r는 유리수를, ϵ,δ,η는 양의 유리수를, x,y는 Cauchy 근사를 나타냅니다.

- $-\epsilon < q - r < \epsilon$이면 $\mathsf{rat}(q) \frown_\epsilon \mathsf{rat}(r)$이며,
- $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$이고 $\mathsf{rat}(q) \frown_{\epsilon-\delta} y_\delta$이면 $\mathsf{rat}(q) \frown_\epsilon \lim(y)$이며,
- $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$이고 $x_\delta \frown_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$이면 $\lim(y) \frown_\epsilon \mathsf{rat}(q)$이며,
- $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$이고 $x_\delta \frown_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$이면 $\lim(x) \frown_\epsilon \lim(y)$입니다.

그 결과 얻는 결론은 $\forall(u,v : \mathbb{R}_\mathsf{c}).\,\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\,(u \sim_\epsilon v) \to (u \frown_\epsilon v)$입니다. 이 원리를 **$\sim$-귀납법**이라고 부릅니다. 이는 본질적으로, $\mathbb{R}_\mathsf{c}$를 주어진 것으로 받아들이면 $\sim_\epsilon$이 (타입족으로서) 자신의 생성자들에 의해 귀납적으로 생성된다는 것을 말합니다. 예를 들어, 이를 사용하여 $\sim$이 대칭적임을 보일 수 있습니다.

보조정리 11.3.12. 임의의 $u,v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $(u \sim_\epsilon v) = (v \sim_\epsilon u)$가 성립합니다.

증명. 둘 다 단순 명제이므로, 대칭성에 의해 한 방향의 함의만 보이면 충분합니다. 따라서 $(u \frown_\epsilon v) :\equiv (v \sim_\epsilon u)$라고 둡시다. $\sim$-귀납법에 의해, $u \sim_\epsilon v$가 $\sim$의 네 가지 흥미로운 생성자 중 하나로부터 도출되는 경우로 귀착시킬 수 있습니다. u와 v가 모두 유리수인 첫 번째 경우에는 결과가 자명합니다(첫 번째 생성자를 다시 적용하면 됩니다). 나머지 세 경우에는 귀납 가설이 ($\mathbb{Q}$에서 덧셈의 교환법칙과 함께) $\sim$의 다른 생성자에 필요한 입력을 정확히 제공합니다(두 번째와 세 번째 생성자는 서로 바꿔고, 네 번째 생성자는 그대로 유지됩니다). □

따라서 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-**귀납법**이라고 부를 수 있는 일반적인 귀납 원리는 일종의 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법과 $\sim$-귀납법의 결합입니다. 예를 들어, 그 비의존 버전을 생각해 봅시다. 이를 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-**재귀**라고 부르며, 앞으로 가장 많이 사용하게 될 것이 바로 이것입니다. 통상적인 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-재귀는 함수 $f : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to A$를 정의하려면 다음을 하면 충분하다고 알려 줍니다:

(i) 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $f(\mathsf{rat}(q)) : A$를 구성하고,
(ii) 모든 Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해, 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $f(x_\epsilon)$이 이미 정의되었다고 가정하고 $f(x) : A$를 구성합니다,
(iii) $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, u \sim_\epsilon v$를 만족하는 모든 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 $f(u) = f(v)$임을 증명합니다.

그러나 f가 ϵ-가까운 Cauchy 실수에 어떻게 작용하는지에 대해 무언가를 알지 못하면 일반적으로 (iii)을 보이기가 상당히 어렵습니다. 강화된 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀 원리는 이 결함을 보완합니다. 이 원리를 사용하면 "f가 ϵ-가까운 Cauchy 실수에 작용하는 방식"을 임의로 지정할 수 있으며, 그 방식이 실제로 성립함은 f의 정의와 동시에 진행하는 귀납으로 증명할 수 있습니다. 이것이 관계족 $\frown$입니다. A는 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$에 의존하지 않으므로, 간단히 하기 위해 $\frown$이 A와 $\mathbb{Q}_+$에만 의존한다고 가정할 수 있습니다. 따라서 $(u, a) \frown_\epsilon (v, b)$ 대신 $a \frown_\epsilon b$라고 써도 모호함이 없습니다. 이 경우 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀로 함수 $f : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to A$를 정의하려면 다음 경우들이 필요합니다(이제 이를 패턴 매칭 관례를 사용하여 씁니다).

- 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $f(\mathsf{rat}(q)) : A$를 구성하십시오.
- 모든 Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해, 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $f(x_\epsilon)$이 이미 정의되었고 "$\frown$에 관한 Cauchy 근사"를 이룬다고, 즉 $\forall(\epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+).\, (f(x_\epsilon) \frown_{\epsilon+\delta} f(x_\delta))$라고 귀납적으로 가정하고 $f(\mathsf{lim}(x)) : A$를 구성합니다.
- 관계 $\frown$이 분리적임을, 즉 임의의 $a, b : A$에 대해 다음이 성립함을 증명하십시오. $(\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, a \frown_\epsilon b) \Rightarrow (a = b)$.
- $q, r : \mathbb{Q}$에 대해 $-\epsilon < q - r < \epsilon$이면 $f(\mathsf{rat}(q)) \frown_\epsilon f(\mathsf{rat}(r))$임을 증명하십시오.
- 임의의 $q : \mathbb{Q}$와 임의의 Cauchy 근사 y에 대해, 어떤 $\delta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$이고 $f(\mathsf{rat}(q)) \frown_{\epsilon-\delta} f(y_\delta)$이며 $\eta \mapsto f(x_\eta)$가 $\frown$에 관한 Cauchy 근사라고 귀납적으로 가정하고 $f(\mathsf{rat}(q)) \frown_\epsilon f(\mathsf{lim}(y))$, 임을 증명합니다.
- 임의의 Cauchy 근사 x와 임의의 $r : \mathbb{Q}$에 대해, 어떤 $\delta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$이고 $f(x_\delta) \frown_{\epsilon-\delta} f(\mathsf{rat}(r))$이며 $\eta \mapsto f(x_\eta)$가 $\frown$에 관한 Cauchy 근사라고 귀납적으로 가정하고 $f(\mathsf{lim}(x)) \frown_\epsilon f(\mathsf{rat}(r))$, 임을 증명합니다.
- 임의의 Cauchy 근사 x, y에 대해, 어떤 $\delta, \eta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$이고 $f(x_\delta) \frown_{\epsilon-\delta-\eta} f(y_\eta)$이며 $\theta \mapsto f(x_\theta)$와 $\theta \mapsto f(y_\theta)$가 $\frown$에 관한 Cauchy 근사라고 귀납적으로 가정하고 $f(\mathsf{lim}(x)) \frown_\epsilon f(\mathsf{lim}(y))$, 임을 증명합니다.

마지막 네 증명에서는 처음 두 데이터에서 주어진 $f(\mathsf{rat}(q))$와 $f(\mathsf{lim}(x))$의 구체적인 정의를 자유롭게 사용할 수 있다는 점에 유의하십시오. 그러나 분리성의 증명은 f와 아무 관계 없이 A의 임의의 두

원소에 대해 성립해야 합니다. 이는 관계족 $\frown$에 대한 일종의 "허용성" 조건입니다. 따라서 흔히 $\frown$을 정의한 직후, $f(\mathsf{rat}(q))$와 $f(\mathsf{lim}(x))$를 정의하기 전에 이를 먼저 검증합니다.

위의 가정 아래에서 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀는 $f(\mathsf{rat}(q))$와 $f(\mathsf{lim}(x))$가 처음 두 항목에서 이들에 대해 주어진 정의와 판단적으로 같은 함수 $f : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to A$를 산출합니다. 또한 다음도 결론지을 수 있습니다.

$$\forall(u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}).\, \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (u \sim_\epsilon v) \to (f(u) \frown_\epsilon f(v)). \tag{11.3.13}$$

대표적인 예로, $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀를 사용하면 $\mathbb{Q}$ 위에서 정의된 함수가 충분히 연속이기만 하면 이를 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$ 전체로 확장할 수 있습니다.

정의 11.3.14. 함수 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$는 다음을 만족하는 $L : \mathbb{Q}_+$(**립시츠 상수**)가 존재하면 **립시츠** 라고 합니다.

$$|q - r| < \epsilon \Rightarrow (f(q) \sim_{L\epsilon} f(r))$$

이는 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$와 $q, r : \mathbb{Q}$에 대해 성립해야 합니다. 마찬가지로, $g : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$는 다음을 만족하는 $L : \mathbb{Q}_+$가 존재하면 **립시츠**라고 합니다.

$$(u \sim_\epsilon v) \Rightarrow (g(u) \sim_{L\epsilon} g(v))$$

이는 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$와 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 성립해야 합니다..

특히 $\sim$의 첫 번째 생성자에 의해, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$가 자명한 의미에서 립시츠이면 합성 $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$도 립시츠라는 점에 유의하십시오.

보조정리 11.3.15. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 상수 $L : \mathbb{Q}_+$를 갖는 립시츠 함수라고 가정합시다. 그러면 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) \equiv f(q)$를 만족하며 역시 상수 L을 갖는 립시츠 사상 $\bar{f} : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 존재합니다.

증명. 공역을 $A :\equiv \mathbb{R}_\mathsf{c}$로 하여 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀로 $\bar{f}$를 정의합니다. 관계 $\frown : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$(u \frown_\epsilon v) :\equiv (u \sim_{L\epsilon} v).$$

$q : \mathbb{Q}$에 대해 다음과 같이 정의합니다.

$$\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) :\equiv \mathsf{rat}(f(q)).$$

Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 다음과 같이 정의합니다

$$\bar{f}(\mathsf{lim}(x)) :\equiv \mathsf{lim}(\lambda\epsilon.\, \bar{f}(x_{\epsilon/L})).$$

이것이 의미를 가지려면 $y :\equiv \lambda\epsilon.\, \bar{f}(x_{\epsilon/L})$가 Cauchy 근사임을 확인해야 합니다. 그런데 이 단계의 귀납 가설은 임의의 $\delta, \epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $\bar{f}(x_\delta) \frown_{\delta+\epsilon} \bar{f}(x_\epsilon)$, 즉 $\bar{f}(x_\delta) \sim_{L\delta+L\epsilon} \bar{f}(x_\epsilon)$라는 것입니다. 따라서 다음이 성립합니다

$$y_\delta \equiv f(x_{\delta/L}) \sim_{\delta+\epsilon} f(x_{\epsilon/L}) \equiv y_\epsilon.$$

분리성을 증명하려면 $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, a \frown_\epsilon b$가 $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, a \sim_{L\epsilon} b$를 뜻하고, 이는 $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, a \sim_\epsilon b$를 함의하며 따라서 $a = b$라는 것만 관찰하면 됩니다.

$(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀를 완성하려면 $\frown$에 대한 네 가지 조건을 검증하는 일이 남아 있습니다. 이는 기본적으로 $\sim$의 네 생성자 모두에 대해 $\bar{f}$가 립시츠임을 증명하는 것과 같습니다.

(i) u가 $\mathsf{rat}(q)$이고 v가 $\mathsf{rat}(r)$이며 $-\epsilon < |q-r| < \epsilon$일 때, f가 립시츠라는 가정으로부터 $f(q) \sim_{L\epsilon} f(r)$를 얻으므로, 정의에 의해 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) \frown_\epsilon \bar{f}(\mathsf{rat}(r))$가 성립합니다.

(ii) u가 $\mathsf{lim}(x)$이고 v가 $\mathsf{rat}(q)$이며 $x_\eta \sim_{\epsilon-\eta} \mathsf{rat}(q)$일 때, 귀납 가설은 $\bar{f}(x_\eta) \sim_{L\epsilon-L\eta} \mathsf{rat}(f(q))$이고, 이는 $\sim$의 세 번째 생성자에 의해 $\bar{f}(\mathsf{lim}(x)) \sim_{L\epsilon} \bar{f}(\mathsf{rat}(q))$를 증명합니다.

(iii) u가 유리수이고 v가 극한인 대칭적인 경우도 본질적으로 동일합니다.

(iv) u가 $\mathsf{lim}(x)$이고 v가 $\mathsf{lim}(y)$이며 $\delta, \eta : \mathbb{Q}_+$가 $x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta$를 만족할 때, 귀납 가설은 $\bar{f}(x_\delta) \sim_{L\epsilon-L\delta-L\eta} \bar{f}(y_\eta)$이고, 이는 $\sim$의 네 번째 생성자에 의해 $\bar{f}(\mathsf{lim}(x)) \sim_{L\epsilon} \bar{f}(\mathsf{lim}(y))$를 증명합니다.

이로써 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀가 완성되며, 따라서 $\bar{f}$의 구성도 완성됩니다. 원하던 등식 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) \equiv f(q)$는 정확히 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, \sim)$-재귀의 첫 번째 계산 규칙이며, 추가 조건 (11.3.13)는 정확히 $\bar{f}$가 상수 L을 갖는 립시츠 함수임을 말해 줍니다. □

$\sim$을 더 잘 특징짓지 않고는 이제 더 나아가기 어렵습니다. 우리는 $\sim$의 생성자들에서 서로 다른 두 형태의 Cauchy 실수가 ϵ-가깝기를 원하는 조건들을 지정했습니다. 그러나 그 결과로 얻어지는 귀납-귀납적 타입 족에서 이것들이 이 사실의 유일한 증거라는 것을 어떻게 알 수 있겠습니까? 귀납적 타입 족(예를 들어 동일성 타입, §5.8 참고)과 고차 귀납적 타입은 "집어넣은 것보다 더 많은 것"을 포함하는 경향이 있음을 이미 보았으므로, 이는 결코 쓸데없는 질문이 아닙니다.

$\sim$을 더 정확하게 특성화하기 위해, 생성자에 대해 계산되도록 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$ 위의 관계족 $\approx_\epsilon$을 재귀적으로 정의하고, 이 관계족이 $\sim_\epsilon$과 동치임을 증명하겠습니다.

정리 11.3.16. 다음을 만족하는 단순 관계족 $\approx : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$가 존재합니다.

$$(\mathsf{rat}(q) \approx_\epsilon \mathsf{rat}(r)) :\equiv (-\epsilon < q - r < \epsilon) \tag{11.3.17}$$
$$(\mathsf{rat}(q) \approx_\epsilon \mathsf{lim}(y)) :\equiv \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, \mathsf{rat}(q) \approx_{\epsilon-\delta} y_\delta \tag{11.3.18}$$
$$(\mathsf{lim}(x) \approx_\epsilon \mathsf{rat}(r)) :\equiv \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \approx_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r) \tag{11.3.19}$$
$$(\mathsf{lim}(x) \approx_\epsilon \mathsf{lim}(y)) :\equiv \exists(\delta, \eta : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \approx_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta. \tag{11.3.20}$$

또한 다음이 성립합니다.

$$(u \approx_\epsilon v) \Leftrightarrow \exists(\theta : \mathbb{Q}_+).\, (u \approx_{\epsilon-\theta} v) \tag{11.3.21}$$
$$(u \approx_\epsilon v) \to (v \sim_\delta w) \to (u \approx_{\epsilon+\delta} w) \tag{11.3.22}$$
$$(u \sim_\epsilon v) \to (v \approx_\delta w) \to (u \approx_{\epsilon+\delta} w). \tag{11.3.23}$$

추가 조건 (11.3.21)–(11.3.23)은 귀납적 정의가 성립하도록 하는 데 필요한 것으로 밝혀집니다. 조건 (11.3.21)을 만족하는 것을 **둥글다**고 합니다. 이를 오른쪽에서 왼쪽으로 읽으면 $\approx$의 **단조성**을 얻고,

$$(\delta < \epsilon) \wedge (u \approx_\delta v) \Rightarrow (u \approx_\epsilon v)$$

왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 $\approx$의 **열림성**을 얻습니다.

$$(u \approx_\epsilon v) \Rightarrow \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, (\delta < \epsilon) \wedge (u \approx_\delta v).$$

조건 (11.3.22)와 (11.3.23)는 삼각 부등식의 형태이며, $\approx$가 양쪽에서 $\sim$ 위의 "가군"임을 말해 줍니다.

증명. $\approx : \mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$를 이중 $(\mathbb{R}_{\mathsf{c}}, \sim)$-재귀로 정의하겠습니다. 먼저 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$의 부분집합 가운데 둥글고 삼각 부등식의 알맞은 한 형태를 만족하는 술어족들로 이루어진 부분집합을 공역으로 하여 $(\mathbb{R}_{\mathsf{c}}, \sim)$-재귀를 적용하겠습니다. 이 술어들을 이항 관계의 절반으로 생각하여 $(u, \epsilon) \mapsto (\diamondsuit \approx_\epsilon u)$로 쓰고, 기호 $\diamondsuit$은 관계 전체를 가리키도록 하겠습니다. 이제 A를 정확히 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$A :\equiv \left\{ \diamondsuit : \mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop} \;\middle|\; \begin{aligned} &\Big(\forall(u : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}).\, \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, \big((\diamondsuit \approx_\epsilon u) \Leftrightarrow \exists(\theta : \mathbb{Q}_+).\, (\diamondsuit \approx_{\epsilon-\theta} u)\big)\Big) \\ &\quad \wedge \Big(\forall(u, v : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}).\, \forall(\eta, \epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (u \sim_\epsilon v) \to \\ &\qquad \big((\diamondsuit \approx_\eta u) \to (\diamondsuit \approx_{\eta+\epsilon} v)\big) \wedge \big((\diamondsuit \approx_\eta v) \to (\diamondsuit \approx_{\eta+\epsilon} u)\big)\Big) \end{aligned} \right\}$$

부분집합에서 늘 그렇듯이, A의 원소와 그 첫 번째 성분 $\diamondsuit$에 같은 표기를 사용하겠습니다. $(\mathbb{R}_{\mathsf{c}}, \sim)$-재귀에 필요한 관계족으로는 다음을 고려하며, 이는 삼각 부등식의 다른 형태를 보장합니다:

$$(\diamondsuit \frown_\epsilon \heartsuit) :\equiv \forall(u : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}).\, \forall(\eta : \mathbb{Q}_+).\, ((\diamondsuit \approx_\eta u) \to (\heartsuit \approx_{\epsilon+\eta} u)) \wedge ((\heartsuit \approx_\eta u) \to (\diamondsuit \approx_{\epsilon+\eta} u)).$$

이 관계들은 분리되어 있음을 관찰합니다. $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (\diamondsuit \frown_\epsilon \heartsuit)$,라고 가정하면, $\diamondsuit = \heartsuit$을 보이기 위해서는 모든 $u : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}$에 대해 $(\diamondsuit \approx_\epsilon u) \Leftrightarrow (\heartsuit \approx_\epsilon u)$임을 보이는 것으로 충분하기 때문입니다. 그런데 둥굶에 의해 $\diamondsuit \approx_\epsilon u$이면 어떤 θ에 대해 $\diamondsuit \approx_{\epsilon-\theta} u$이고, 이것과 $\diamondsuit \frown_\epsilon \heartsuit$을 함께 사용하면 $\heartsuit \approx_\epsilon u$가 따라 나옵니다. 역방향도 똑같습니다.

이제 재귀 원리가 요구하는 처음 두 데이터는 다음과 같습니다.

- 임의의 $q : \mathbb{Q}$에 대해 A의 원소를 하나 주어야 하며, 이를 $(\mathsf{rat}(q) \approx_{(-)} -)$로 나타냅니다.
- 임의의 Cauchy 근사 x에 대해, $\epsilon \mapsto (x_\epsilon \approx_{(-)} -)$로 표기할 함수 $\mathbb{Q}_+ \to A$가 다음 성질을 갖도록 정의되었다고 가정하면

$$\forall(u : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}).\, \forall(\delta, \epsilon, \eta : \mathbb{Q}_+).\, (x_\delta \approx_\eta u) \to (x_\epsilon \approx_{\eta+\delta+\epsilon} u), \tag{11.3.24}$$

  A의 원소를 하나 주어야 하며, 이를 $(\mathsf{lim}(x) \approx_{(-)} -)$로 씁니다.

두 경우 모두, 필요한 정의는 중첩된 $(\mathbb{R}_{\mathsf{c}}, \sim)$-재귀를 사용하여 주며, 이때 공역은 $\mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$의 부분집합 가운데 단순 명제들의 둥근 족들로 이루어진 부분집합입니다. 이 명제들을 이항 관계의 0개의 절반으로 생각하여 $\epsilon \mapsto (\bullet \approx_\epsilon \triangle)$로 쓰고, 기호 $\triangle$은 족 전체를 가리키도록 하겠습니다. 이제 이 내부 재귀들의 공역을 정확히 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$C :\equiv \left\{ \triangle : \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop} \;\middle|\; \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, \Big((\bullet \approx_\epsilon \triangle) \Leftrightarrow \exists(\theta : \mathbb{Q}_+).\, (\bullet \approx_{\epsilon-\theta} \triangle)\Big) \right\}$$

필요한 관계족으로는 삼각 부등식의 남은 부분을 택합니다:

$$(\triangle \smile_\epsilon \square) :\equiv \forall(\eta : \mathbb{Q}_+).\, ((\bullet \approx_\eta \triangle) \to (\bullet \approx_{\epsilon+\eta} \square)) \wedge ((\bullet \approx_\eta \square) \to (\bullet \approx_{\epsilon+\eta} \triangle)).$$

이 관계들은 C의 모든 원소의 둥긂을 사용하여 $\frown$의 경우와 같은 논증으로 분리되어 있음을 보일 수 있습니다.

이러한 내부 재귀가 성공하면, ($\mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$에서의 상이 C에 속하므로) 둥글고 다음을 만족하는 술어족 $\diamondsuit : \mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{Q}_+ \to \mathsf{Prop}$를 얻게 된다는 점에 유의하십시오.

$$\forall(u, v : \mathbb{R}_{\mathsf{c}}).\, \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, (u \sim_\epsilon v) \to \big((\diamondsuit \approx_{(-)} u) \smile_\epsilon (\diamondsuit \approx_{(-)} u)\big).$$

$\smile$의 정의를 풀어 쓰면, 이는 정확히 $\diamondsuit$이 A에 속하기 위한 세 번째 조건이 됩니다. 따라서 이것이 바로 우리에게 필요한 것입니다.

바로 이 시점에서 정의 (11.3.17)–(11.3.20)를 유리수 점과 극한에 대응하는 두 내부 재귀 각각의 처음 두 절로 제시할 수 있습니다. 각 경우에 관계가 둥글며 따라서 C에 속함을 확인해야 합니다. 유리수-유리수 경우 (11.3.17)에서는 이것이 자명하며, 다른 경우에는 귀납 가설로부터 따라 나옵니다. ((11.3.18)에서 관련 귀납 가설은 $(\mathsf{rat}(q) \approx_{(-)} y_\delta) : C$이고, (11.3.19)과 (11.3.20)에서는 $(x_\delta \approx_{(-)} -) : A$입니다.)

하위 재귀의 나머지 데이터는 (11.3.17)–(11.3.20)가 $\sim$의 생성자들에 대하여 오른쪽 삼각 부등식을 만족함을 보이는 것으로 이루어집니다. 식 (11.3.22)의 u, v, w를 각각 유리수 점 또는 극한으로 택하는 여덟 가지 가능한 방법에 대응하여 여덟 가지 경우 — 각 하위 재귀마다 네 가지 — 가 있습니다. 먼저 u가 $\mathsf{rat}(q)$인 경우들을 고려합니다.

(i) $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \mathsf{rat}(r)$과 $-\epsilon < |r - s| < \epsilon$을 가정하면, $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{rat}(s)$를 보여야 합니다. 그런데 $\approx$의 정의에 의해 이는 유리수에 대한 삼각 부등식으로 귀결됩니다.

(ii) $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \mathsf{rat}(r)$이고 $\mathsf{rat}(r) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$인 $\phi, \epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+$를 가정하고, 귀납적으로 다음을 가정합니다.

$$\forall(\psi : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi \mathsf{rat}(r)) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\epsilon-\delta} y_\delta). \tag{11.3.25}$$

또한 $\psi, \delta \mapsto (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\delta)$가 $\smile$에 관한 Cauchy 근사라고, 즉 다음이 성립한다고 가정합니다

$$\forall(\psi, \xi, \zeta : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\xi) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\xi+\zeta} y_\zeta), \tag{11.3.26}$$

다만 이 경우에는 이 가정이 필요하지 않습니다. 실제로 $\psi :\equiv \phi$로 둔 (11.3.25)로부터 곧바로 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon-\delta} y_\delta$를 얻고, 따라서 $\approx$의 정의에 의해 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon} \lim(y)$를 얻습니다.

(iii) $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \lim(y)$이고 $y_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$인 $\phi, \epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+$를 가정하고, 귀납적으로 다음을 가정합니다.

$$\forall(\psi : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\delta) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)). \tag{11.3.27}$$
$$\forall(\psi, \xi, \zeta : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\xi) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\xi+\zeta} y_\zeta). \tag{11.3.28}$$

정의에 의해 $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \lim(y)$는 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi-\theta} y_\theta$를 만족하는 $\theta : \mathbb{Q}_+$가 존재한다는 뜻입니다. 따라서 가정 (11.3.28)에 의해 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\delta} y_\delta$도 성립하고, 이어서 (11.3.27)에 의해 원하는 대로 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{rat}(r)$가 따라 나옵니다.

(iv) $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \lim(y)$이고 $y_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} z_\eta$인 $\phi, \epsilon, \delta, \eta : \mathbb{Q}_+$를 가정하고, 귀납적으로 다음을 가정합니다.

$$\forall(\psi : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\delta) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\epsilon-\delta-\eta} z_\eta), \tag{11.3.29}$$
$$\forall(\psi, \xi, \zeta : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi y_\xi) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\xi+\zeta} y_\zeta), \tag{11.3.30}$$
$$\forall(\psi, \xi, \zeta : \mathbb{Q}_+).\, (\mathsf{rat}(q) \approx_\psi z_\xi) \to (\mathsf{rat}(q) \approx_{\psi+\xi+\zeta} z_\zeta). \tag{11.3.31}$$

마찬가지로, $\mathsf{rat}(q) \approx_\phi \mathsf{lim}(y)$는 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi-\xi} y_\xi$를 만족하는 $\xi : \mathbb{Q}_+$가 존재한다는 뜻입니다. 이때 (11.3.30)에서 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\delta} y_\delta$가 따라 나오고, (11.3.29)에서 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon-\eta} z_\eta$가 따라 나옵니다. 그런데 $\approx$의 정의에 따라 이로부터 원하던 대로 $\mathsf{rat}(q) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{lim}(z)$가 따라 나옵니다.

이제 x가 Cauchy 근사일 때 u가 $\mathsf{lim}(x)$인 경우로 넘어갑니다. 이 경우 $(\mathsf{lim}(x) \approx_{(-)} -) : A$의 정의에 대한 상위 귀납 가설은 $(x_\delta \approx_{(-)} -) : A$라는 것입니다. 따라서 이 관계들은 둥글 뿐만 아니라 오른쪽에서 삼각 부등식도 만족합니다.

(v) $\mathsf{lim}(x) \approx_\phi \mathsf{rat}(r)$와 $-\epsilon < |r-s| < \epsilon$을 가정하면 $\mathsf{lim}(x) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{rat}(s)$를 보여야 합니다. $\approx$의 정의에 따라 전자는 $x_\delta \approx_{\phi-\delta} \mathsf{rat}(r)$를 뜻합니다. 따라서 위의 삼각 부등식에서 $x_\delta \approx_{\epsilon+\phi-\delta} \mathsf{rat}(s)$가 따라 나오고, 그러므로 원하던 대로 $\mathsf{lim}(x) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{rat}(s)$가 성립합니다.

(vi) $\mathsf{lim}(x) \approx_\phi \mathsf{rat}(r)$와 $\mathsf{rat}(r) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$를 만족하는 $\phi, \epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+$가 있다고 가정합니다. 필요하지 않은 귀납 가설 두 개도 함께 가정합니다. 정의에 따라 $x_\eta \approx_{\phi-\eta} \mathsf{rat}(r)$를 만족하는 $\eta : \mathbb{Q}_+$가 존재합니다. 따라서 귀납 가설의 삼각 부등식에서 $x_\eta \approx_{\phi+\epsilon-\eta-\delta} y_\delta$가 나옵니다. 그러면 $\approx$의 정의에서 곧바로 $\mathsf{lim}(x) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{lim}(y)$가 나옵니다.

(vii) $\mathsf{lim}(x) \approx_\phi \mathsf{lim}(y)$이고 $y_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)$인 $\phi, \epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+$와, 필요하지 않은 두 귀납 가설을 가정합니다. 정의에 의해 $x_\xi \approx_{\phi-\xi-\theta} y_\theta$인 $\xi, \theta : \mathbb{Q}_+$가 존재합니다. y가 Cauchy 근사이므로 $y_\theta \sim_{\theta+\delta} y_\delta$이고, 따라서 귀납적 삼각 부등식에 의해 $x_\xi \approx_{\phi+\delta-\xi} y_\delta$를 얻고 이어서 $x_\xi \sim_{\phi+\epsilon-\xi} \mathsf{rat}(r)$을 얻습니다. 그러면 $\approx$의 정의에 의해 원하는 대로 $\mathsf{lim}(x) \approx_{\phi+\epsilon} \mathsf{rat}(r)$을 얻습니다.

(viii) 마지막으로 $\mathsf{lim}(x) \approx_\phi \mathsf{lim}(y)$와 $y_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} z_\eta$를 만족하는 $\phi, \epsilon, \delta, \eta : \mathbb{Q}_+$가 있다고 가정합니다. 그러면 앞에서와 같이 $x_\xi \approx_{\phi-\xi-\theta} y_\theta$를 만족하는 $\xi, \theta : \mathbb{Q}_+$가 존재합니다. 앞에서처럼 삼각 부등식을 두 번 적용하면 충분합니다.

이로써 두 내부 재귀가 완성됩니다. 따라서 관계족 $(\mathsf{rat}(q) \approx_{(-)} -)$와 $(\mathsf{lim}(x) \approx_{(-)} -)$의 정의도 완성됩니다. 이들은 모두 A의 원소이므로 둥근 관계이며, $\sim$에 대해 오른쪽 삼각 부등식을 만족합니다. 남은 것은 $\frown$에 관한 조건들을 확인하는 것입니다. 즉 이 관계들이 $\sim$의 생성자들에 대해 왼쪽에서 삼각 부등식을 만족함을 확인해야 합니다. 네 가지 경우는 (11.3.23)에서 u와 v를 각각 유리수 점 또는 극한 점으로 고르는 네 가지 선택에 대응합니다. 또한 이들은 모두 단순 명제이므로 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납을 적용하여 w도 유리수이거나 극한이라고 가정할 수 있습니다. 그러면 또 다른 여덟 가지 경우가 생기는데, 그 증명들은 방금 제시한 증명들과 본질적으로 같으므로 독자에게 이를 늘어놓지 않겠습니다. □

이제 다음을 증명할 수 있습니다:

정리 11.3.32. 임의의 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $(u \sim_\epsilon v) = (u \approx_\epsilon v)$가 성립합니다.

증명. 양쪽 모두 단순 명제이므로 양방향 함의를 증명하는 것으로 충분합니다. 왼쪽에서 오른쪽 방향에 대해서는 $C(u, v, \epsilon) :\equiv (u \approx_\epsilon v)$에 $\sim$-귀납을 적용합니다. 따라서 $\sim$의 네 생성자를 고려하는 것으로 충분합니다. 각 경우에 u와 v는 유리수 점이나 극한으로 특수화되므로 $\approx$의 정의가 계산되고, 귀납 가설은 언제나 적용됩니다.

오른쪽에서 왼쪽 방향에 대해서는 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납을 사용하여 u와 v가 유리수 점이거나 극한이라고 가정하며, 이렇게 하면 $\approx$가 계산됩니다. 그러면 이제 $\approx$의 정의와 귀납 가설이 $\sim$의 해당 생성자들에 필요한 데이터를 정확히 제공합니다. □

다소 무리하게 말하자면, $\approx$를 $\sim$에 대한 "코드"의 올뭉치라고 부를 수 있습니다. 이때 위 증명의 두 방향은 각각 encode 와 decode 에 해당합니다. $\approx$의 정의에 따라 정리 11.3.32에서 다음 동치들을

얻습니다

$$\begin{aligned}(\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(r)) &= (-\epsilon < q - r < \epsilon)\\ (\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon \lim(y)) &= \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, \mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta\\ (\lim(x) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(r)) &= \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \sim_{\epsilon-\delta} \mathsf{rat}(r)\\ (\lim(x) \sim_\epsilon \lim(y)) &= \exists(\delta, \eta : \mathbb{Q}_+).\, x_\delta \sim_{\epsilon-\delta-\eta} y_\eta.\end{aligned}$$

이 증명은 다음과 같은 추가 정보도 제공합니다.

따름정리 11.3.33. $\sim$은 둥근 관계이며 삼각 부등식을 만족합니다:

$$(u \sim_\epsilon v) \simeq \exists(\theta : \mathbb{Q}_+).\, u \sim_{\epsilon-\theta} v \tag{11.3.34}$$

$$(u \sim_\epsilon v) \to (v \sim_\delta w) \to (u \sim_{\epsilon+\delta} w). \tag{11.3.35}$$

삼각 부등식을 손에 넣었으므로, Cauchy 근사의 "극한"이 실제로 극한처럼 행동함을 보일 수 있습니다.

보조정리 11.3.36. 임의의 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$, Cauchy 근사 y, 그리고 $\epsilon, \delta : \mathbb{Q}_+$에 대해, $u \sim_\epsilon y_\delta$이면 $u \sim_{\epsilon+\delta} \lim(y)$입니다.

증명. u에 대해 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법을 사용합니다. u가 $\mathsf{rat}(q)$이면 이는 바로 $\sim$의 두 번째 생성자입니다. 이제 u가 $\lim(x)$라고 가정합니다. 또 각 x_η가 다음 성질을 가진다고 가정합니다. 임의의 y, ϵ, δ에 대해 $x_\eta \sim_\epsilon y_\delta$이면 $x_\eta \sim_{\epsilon+\delta} \lim(y)$가 성립합니다. 특히 이 가정에서 $y :\equiv x$, $\delta :\equiv \eta$로 두면 임의의 $\eta, \theta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $x_\eta \sim_{\eta+\theta} \lim(x)$가 성립한다는 결론을 얻습니다.

이제 y, ϵ, δ가 임의로 주어졌다고 하고 $\lim(x) \sim_\epsilon y_\delta$라고 가정합니다. 둥긂에 의해 $\lim(x) \sim_{\epsilon-\theta} y_\delta$인 θ가 존재합니다. 그러면 위의 관찰에 의해 임의의 η에 대해 $x_\eta \sim_{\eta+\theta/2} \lim(x)$이고, 따라서 삼각 부등식에 의해 $x_\eta \sim_{\epsilon+\eta-\theta/2} y_\delta$입니다. 그러므로 $\sim$의 네 번째 생성자에 의해 $\lim(x) \sim_{\epsilon+2\eta+\delta-\theta/2} \lim(y)$를 얻습니다. 따라서 $\eta :\equiv \theta/4$로 택하면 결과가 따라 나옵니다. □

보조정리 11.3.37. 임의의 Cauchy 근사 y와 임의의 $\delta, \eta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $y_\delta \sim_{\delta+\eta} \lim(y)$입니다.

증명. 앞의 보조정리에서 $u :\equiv y_\delta$, $\epsilon :\equiv \eta$로 두십시오. □

주 11.3.38. $y_\delta \sim_\delta \lim(y)$가 성립하리라고 기대했을 수도 있습니다. 그러나 이것이 성립하지 않는 예가 있습니다. 예를 들어 $x_\epsilon :\equiv \epsilon$으로 정의된 x를 생각해 보십시오. 그 극한은 분명히 0입니다. 그러나 $|\epsilon - 0| < \epsilon$은 성립하지 않고 $\leq$만 성립합니다.

이를 응용하면 보조정리 11.3.37을 사용하여 보조정리 11.3.15에서 얻은 립시츠 함수의 확장이 유일함을 보일 수 있습니다.

보조정리 11.3.39. $f, g : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 다음과 같은 의미에서 연속이라고 합시다.

$$\forall(u : \mathbb{R}_\mathsf{c}).\, \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, \exists(\delta : \mathbb{Q}_+).\, \forall(v : \mathbb{R}_\mathsf{c}).\, (u \sim_\delta v) \to (f(u) \sim_\epsilon f(v))$$

g에 대해서도 마찬가지라고 합시다. 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $f(\mathsf{rat}(q)) = g(\mathsf{rat}(q))$이면 $f = g$입니다.

증명. 모든 u에 대해 $f(u) = g(u)$임을 $\mathbb{R}_c$-귀납법으로 증명합니다. 유리수인 경우는 가정 그 자체입니다. 따라서 모든 δ에 대해 $f(x_\delta) = g(x_\delta)$라고 가정합시다. $\mathbb{R}_c$의 경로 생성자를 적용할 수 있도록, 모든 ϵ에 대해 $f(\mathsf{lim}(x)) \sim_\epsilon g(\mathsf{lim}(x))$임을 보이겠습니다.

f와 g가 연속이므로, 모든 v에 대해 다음이 성립하는 θ, η가 존재합니다.

$$(\mathsf{lim}(x) \sim_\theta v) \to (f(\mathsf{lim}(x)) \sim_{\epsilon/2} f(v))$$
$$(\mathsf{lim}(x) \sim_\eta v) \to (g(\mathsf{lim}(x)) \sim_{\epsilon/2} g(v)).$$

$\delta < \min(\theta, \eta)$를 택하면, 보조정리 11.3.37에 의해 $\mathsf{lim}(x) \sim_\theta y_\delta$와 $\mathsf{lim}(x) \sim_\eta y_\delta$가 모두 성립합니다. 따라서 다음이 성립하고,

$$f(\mathsf{lim}(x)) \sim_{\epsilon/2} f(y_\delta) = g(y_\delta) \sim_{\epsilon/2} g(\mathsf{lim}(x))$$

그러므로 삼각 부등식에 의해 $f(\mathsf{lim}(x)) \sim_\epsilon g(\mathsf{lim}(x))$입니다. □

11.3.3 Cauchy 실수의 대수적 구조

먼저 덧셈 구조 $(\mathbb{R}_c, 0, +, -)$를 정의합니다. 덧셈의 단위 원소 0은 분명히 $\mathsf{rat}(0)$일 뿐이며, 덧셈의 역 $-: \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$는 립시츠 상수 1로 보조정리 11.3.15를 사용하여 덧셈의 역 $-: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$를 확장한 것으로 얻어집니다. 덧셈에는 조금 더 공을 들여야 합니다.

보조정리 11.3.40. $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$가 모든 $q, r, s : \mathbb{Q}$에 대해 다음을 만족한다고 합시다.

$$|f(q,s) - f(r,s)| \le |q - r| \qquad \text{그리고} \qquad |f(q,r) - f(q,s)| \le |r - s|.$$

그러면 모든 $q, r : \mathbb{Q}$에 대해 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q), \mathsf{rat}(r)) = f(q,r)$를 만족하는 함수 $\bar{f} : \mathbb{R}_c \times \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$가 존재합니다. 또한 모든 $u, v, w : \mathbb{R}_c$와 $q : \mathbb{Q}_+$에 대해 다음이 성립합니다.

$$u \sim_\epsilon v \Rightarrow \bar{f}(u,w) \sim_\epsilon \bar{f}(v,w) \quad \text{그리고} \quad v \sim_\epsilon w \Rightarrow \bar{f}(u,v) \sim_\epsilon \bar{f}(u,w).$$

증명. $(\mathbb{R}_c, \sim)$-재귀를 사용하여 $\bar{f}$의 커리된 형태를 사상 $\mathbb{R}_c \to A$로 구성합니다. 여기서 A는 비확장 실숫값 함수들의 공간입니다.

$$A :\equiv \{\, h : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c \mid \forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, \forall(u, v : \mathbb{R}_c).\, u \sim_\epsilon v \Rightarrow h(u) \sim_\epsilon h(v) \,\}.$$

또한 A 위의 적절한 $\frown_\epsilon$이 필요하며, 이를 다음과 같이 정의합니다.

$$(h \frown_\epsilon k) :\equiv \forall(u : \mathbb{R}_c).\, h(u) \sim_\epsilon k(u).$$

당연히 $\forall(\epsilon : \mathbb{Q}_+).\, h \frown_\epsilon k$이면 모든 $u : \mathbb{R}_c$에 대해 $h(u) = k(u)$이므로, $\frown$은 분리되어 있습니다.

기저 사례에서는 $q : \mathbb{Q}$에 대해 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) : A$를, 립시츠 상수 1로 보조정리 11.3.15에서 구성한 대로 립시츠 사상 $\lambda r.\, f(q,r)$을 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$에서 $\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$로 확장한 것으로 정의합니다. 다음으로, Cauchy 근사 x에 대해 $\bar{f}(\mathsf{lim}(x)) : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\bar{f}(\mathsf{lim}(x))(v) :\equiv \mathsf{lim}(\lambda\epsilon.\, \bar{f}(x_\epsilon)(v)).$$

이것이 올바른 정의가 되려면 $\lambda\epsilon.\, \bar{f}(x_\epsilon)(v)$가 Cauchy 근사여야 하므로, 임의의 $\delta, \epsilon : \mathbb{Q}$를 생각합시다. 그러면 가정에 의해 $\bar{f}(x_\delta) \frown_{\delta+\epsilon} \bar{f}(x_\epsilon)$이므로 $\bar{f}(x_\delta)(v) \sim_{\delta+\epsilon} \bar{f}(x_\epsilon)(v)$입니다. 또한 귀납 가설에

의해 $\bar{f}(x_\epsilon)$이 비확장적이므로 $\bar{f}(\mathsf{lim}(x))$도 비확장적입니다. 실제로 $u \sim_\epsilon v$이면 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\bar{f}(x_{\epsilon/3})(u) \sim_{\epsilon/3} \bar{f}(x_{\epsilon/3})(v),$$

따라서 $\sim$의 네 번째 생성자에 의해 $\bar{f}(\mathsf{lim}(x))(u) \sim_\epsilon \bar{f}(\mathsf{lim}(x))(v)$입니다.

아직 네 가지 조건을 더 확인해야 하는데, 그중 하나만 예시로 보이겠습니다. $\epsilon : \mathbb{Q}_+$이고, 어떤 $\delta : \mathbb{Q}_+$에 대해 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\epsilon-\delta} y_\delta$와 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) \frown_{\epsilon-\delta} \bar{f}(y_\delta)$가 성립한다고 합시다. $\bar{f}(\mathsf{rat}(q)) \frown_\epsilon \bar{f}(\mathsf{lim}(y))$임을 보이기 위해, 임의의 $v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 생각하고 다음을 살펴봅시다.

$$\bar{f}(\mathsf{rat}(q))(v) \sim_{\epsilon-\delta} \bar{f}(y_\delta)(v).$$

그러므로 $\sim$의 두 번째 생성자에 의해, 요구한 대로 $\bar{f}(\mathsf{rat}(q))(v) \sim_\epsilon \bar{f}(\mathsf{lim}(y))(v)$가 성립합니다. □

각 변수에 대해 개별적으로 비확장인 모든 이변수 유리 함수에 보조정리 11.3.40을 적용할 수 있습니다. 덧셈이 바로 그러한 함수이므로 $+ : \mathbb{R}_\mathsf{c} \times \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 얻습니다. 또한 각 변수에 대해 비확장일 것을 요구하는 한 그 확장은 유일하며, 일변수의 경우와 마찬가지로 유리수에서의 항등식은 실수에서의 항등식으로 확장됩니다. 비확장 사상의 합성은 다시 비확장이므로, 덧셈이 교환법칙과 결합법칙 같은 통상적인 성질을 만족한다고 결론지을 수 있습니다. 따라서 $(\mathbb{R}_\mathsf{c}, 0, +, -)$는 가환군입니다.

함수 $\min : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$와 $\max : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$에도 보조정리 11.3.40을 적용할 수 있으며, 이를 통해 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$는 격자가 됩니다. $\mathbb{R}_\mathsf{c}$ 위의 부분 순서 $\leq$는 max를 사용하여 다음과 같이 정의됩니다.

$$(u \leq v) :\equiv (\max(u, v) = v).$$

관계 $\leq$는 부분 순서입니다. $\mathbb{Q}$ 위에서 부분 순서이고, 부분 순서의 공리들은 min과 max를 사용한 등식으로 표현할 수 있으므로 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$로 옮겨지기 때문입니다.

같은 방법으로 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$로 확장되는 또 다른 함수는 절댓값 $|-|$입니다. 이번에도 기대되는 성질들이 $\mathbb{Q}$에서 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$로 옮겨지므로 절댓값은 그 성질들을 가집니다.

$\leq$로부터 다음과 같이 엄격한 순서 $<$를 얻습니다.

$$(u < v) :\equiv \exists(q, r : \mathbb{Q}).\, (u \leq \mathsf{rat}(q)) \wedge (q < r) \wedge (\mathsf{rat}(r) \leq v).$$

즉, $x \leq \mathsf{rat}(q)$이고 $\mathsf{rat}(r) \leq v$인 유리수 쌍 $q < r$이 단순히 존재할 때 $u < v$가 성립합니다. $<$가 비반사적이고 추이적이며, 순서체에 기대되는 다른 성질들을 가진다는 것은 어렵지 않게 확인할 수 있습니다. 아르키메데스 원리는 $<$의 정의로부터 바로 따라 나옵니다.

정리 11.3.41 ($\mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대한 아르키메데스 원리). $u < v$를 만족하는 모든 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 $u < q < v$를 만족하는 $q : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다.

증명. $u < v$로부터 $u \leq r < s \leq v$를 만족하는 $r, s : \mathbb{Q}$를 단지 얻으며, $q :\equiv (r + s)/2$로 잡을 수 있습니다. □

이제 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$에는 $u \sim_\epsilon v$를 표준적인 개념으로 표현하기에 충분한 구조가 갖추어져 있습니다.

보조정리 11.3.42. $q : \mathbb{Q}$와 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 $u \leq \mathsf{rat}(q)$를 만족하면, 임의의 $v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $u \sim_\epsilon v$일 때 $v \leq \mathsf{rat}(q + \epsilon)$입니다.

증명. 함수 $\max(\mathsf{rat}(q), -) : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$는 상수 1을 갖는 립시츠 함수임에 유의하십시오. 먼저 $u = \mathsf{rat}(r)$가 유리수인 경우를 생각합니다. 이 경우에는 v에 대한 귀납법을 사용합니다. v가 유리수이면 명제는 자명합니다. v가 $\mathsf{lim}(y)$이면, 임의의 ϵ, δ에 대해 $\mathsf{rat}(r) \sim_\epsilon y_\delta$이면 $y_\delta \leq \mathsf{rat}(q+\epsilon)$, 즉 $\max(\mathsf{rat}(q+\epsilon), y_\delta) = \mathsf{rat}(q+\epsilon)$이라고 귀납적으로 가정합니다.

이제 ϵ과 $\mathsf{rat}(r) \sim_\epsilon \mathsf{lim}(y)$를 가정하면, $\mathsf{rat}(r) \sim_{\epsilon-\theta} \mathsf{lim}(y)$를 만족하는 θ가 있으므로 $\delta < \theta$일 때마다 $\mathsf{rat}(r) \sim_\epsilon y_\delta$입니다. 따라서 귀납 가설에 의해 그러한 δ에 대해 $\max(\mathsf{rat}(q+\epsilon), y_\delta) = \mathsf{rat}(q+\epsilon)$입니다. 그런데 정의에 의해 다음이 성립합니다.

$$\max(\mathsf{rat}(q+\epsilon), \mathsf{lim}(y)) \equiv \mathsf{lim}(\lambda\delta.\ \max(\mathsf{rat}(q+\epsilon), y_\delta)).$$

결국 상수가 되는 Cauchy 근사의 극한은 그 상수이므로

$$\max(\mathsf{rat}(q+\epsilon), \mathsf{lim}(y)) = \mathsf{rat}(q+\epsilon)$$

이 성립하고, 따라서 $\mathsf{lim}(y) \leq \mathsf{rat}(q+\epsilon)$입니다.

이제 일반적인 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$를 생각합니다. $u \leq \mathsf{rat}(q)$는 $\max(\mathsf{rat}(q), u) = \mathsf{rat}(q)$를 뜻하므로, 가정 $u \sim_\epsilon v$와 $\max(\mathsf{rat}(q), -)$의 립시츠 성질로부터 $\max(\mathsf{rat}(q), v) \sim_\epsilon \mathsf{rat}(q)$가 따라 나옵니다. 따라서 $\mathsf{rat}(q) \leq \mathsf{rat}(q)$이므로 첫 번째 경우에 의해 $\max(\mathsf{rat}(q), v) \leq \mathsf{rat}(q+\epsilon)$이고, $\leq$의 추이성에 의해 $v \leq \mathsf{rat}(q+\epsilon)$입니다. □

보조정리 11.3.43. $q : \mathbb{Q}$와 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 $u < \mathsf{rat}(q)$를 만족한다고 가정합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

(i) 임의의 $v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $u \sim_\epsilon v$이면 $v < \mathsf{rat}(q+\epsilon)$입니다.

(ii) 임의의 $v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 $u \sim_\epsilon v$이면 $v < \mathsf{rat}(q)$가 성립하도록 하는 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 존재합니다.

증명. 정의에 의해 $u < \mathsf{rat}(q)$는 $r < q$이고 $u \leq \mathsf{rat}(r)$인 $r : \mathbb{Q}$가 존재한다는 뜻입니다. 그러면 보조정리 11.3.42에 의해 임의의 ϵ에 대해 $u \sim_\epsilon v$이면 $v \leq \mathsf{rat}(r+\epsilon)$입니다. $r + \epsilon < q + \epsilon$이므로 결론 (i)이 바로 따라 나오며, (ii)에 대해서는 $\epsilon < q - r$인 임의의 ϵ을 잡으면 됩니다. □

이제 보조 관계 $\sim$이 우리가 생각하는 바로 그 관계임을 보일 수 있습니다.

정리 11.3.44. 모든 $u, v : \mathbb{R}_\mathsf{c}$와 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대해 $(u \sim_\epsilon v) \simeq (|u - v| < \mathsf{rat}(\epsilon))$입니다.

증명. 뺄셈과 절댓값의 립시츠 성질로부터 $u \sim_\epsilon v$이면 $|u - v| \sim_\epsilon |u - u| = 0$이 따라 나옵니다. 따라서 왼쪽에서 오른쪽 방향에 대해서는 $u \sim_\epsilon 0$이면 $|u| < \mathsf{rat}(\epsilon)$임을 보이는 것으로 충분합니다. u에 대한 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법으로 진행합니다.

u가 유리수이면 절댓값과 순서가 $\mathbb{Q}_+$ 위의 표준적인 절댓값과 순서를 확장하므로 명제가 바로 따라 나옵니다. u가 $\mathsf{lim}(x)$이면, 둥굶 성질에 의해 $\mathsf{lim}(x) \sim_{\epsilon-\theta} 0$을 만족하는 $\theta : \mathbb{Q}_+$가 있습니다. 따라서 삼각 부등식에 의해 $x_{\theta/3} \sim_{\epsilon-2\theta/3} 0$이므로, 귀납 가설에 의해 $|x_{\theta/3}| < \mathsf{rat}(\epsilon - 2\theta/3)$입니다. 그런데 $x_{\theta/3} \sim_{2\theta/3} \mathsf{lim}(x)$이므로 립시츠 성질에 의해 $|x_{\theta/3}| \sim_{2\theta/3} |\mathsf{lim}(x)|$이고, 따라서 보조정리 11.3.43(i)에 의해 $|\mathsf{lim}(x)| < \mathsf{rat}(\epsilon)$입니다.

반대 방향에 대해서는 u와 v에 대한 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$-귀납법을 사용합니다. 둘 다 유리수이면 이는 $\sim$의 첫 번째 생성자입니다.

u가 $\mathsf{rat}(q)$이고 v가 $\mathsf{lim}(y)$이면, 임의의 ϵ, δ에 대해 $|\mathsf{rat}(q) - y_\delta| < \mathsf{rat}(\epsilon)$이면 $\mathsf{rat}(q) \sim_\epsilon y_\delta$라고 귀납적으로 가정합니다. $|\mathsf{rat}(q) - \mathsf{lim}(y)| < \mathsf{rat}(\epsilon)$을 만족하는 ϵ을 고정합니다. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$에서 순서

조밀하므로 $|\mathsf{rat}(q) - \mathsf{lim}(y)| < \mathsf{rat}(\theta)$를 만족하는 $\theta < \epsilon$이 존재합니다. 이제 임의의 δ, η에 대해 $\mathsf{lim}(y) \sim_{2\delta} y_\delta$이므로, 립시츠 성질에 의해 다음이 성립합니다.

$$|\mathsf{rat}(q) - \mathsf{lim}(y)| \sim_{\delta+\eta} |\mathsf{rat}(q) - y_\delta|.$$

따라서 보조정리 11.3.43(i)에 의해 $|\mathsf{rat}(q) - y_\delta| < \mathsf{rat}(\theta + 2\delta)$입니다. 그러므로 귀납 가설에 의해 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\theta+2\delta} y_\delta$이고, 따라서 삼각 부등식에 의해 $\mathsf{rat}(q) \sim_{\theta+4\delta} \mathsf{lim}(y)$입니다. 따라서 $\delta :\equiv (\epsilon - \theta)/4$로 택하면 충분합니다.

나머지 두 경우도 완전히 같은 방식으로 증명됩니다. □

다음으로 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$에 곱셈 구조를 부여하고자 합니다. 각 $q : \mathbb{Q}$에 대해 사상 $r \mapsto q \cdot r$는 상수[1] $|q| + 1$을 갖는 립시츠 사상이므로, 이를 실수 위에서 q를 곱하는 연산으로 확장할 수 있습니다. 따라서 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$는 $\mathbb{Q}$ 위의 벡터 공간입니다. 일반적으로 실수의 곱셈은 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$u \cdot v :\equiv \tfrac{1}{2} \cdot ((u+v)^2 - u^2 - v^2), \tag{11.3.45}$$

따라서 제곱 함수 $u \mapsto u^2$를 사상 $\mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$로 정의하기만 하면 됩니다. 제곱 함수는 립시츠 사상이 아니지만 모든 유계 정의역에서는 립시츠이며, 이 덕분에 이들을 이어 붙일 수 있습니다. 열린 구간과 닫힌 구간을 다음과 같이 정의합니다.

$$[u, v] :\equiv \{\, x : \mathbb{R}_\mathsf{c} \mid u \le x \le v \,\} \qquad \text{그리고} \qquad (u, v) :\equiv \{\, x : \mathbb{R}_\mathsf{c} \mid u < x < v \,\}.$$

엄밀히 말하면 $[u, v]$ 또는 (u, v)의 원소는 Cauchy 실수와 증명의 쌍이지만, 후자는 단순 명제의 원소이므로 관심의 대상이 아닙니다. 따라서 부분집합 타입에서 흔히 그렇듯이, $x : \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 $u \le x \le v$를 만족할 때는 일반적으로 간단히 $x : [u, v]$라고 쓰며, 다른 경우도 마찬가지입니다.

정리 11.3.46. 유리수의 제곱 $q \mapsto q^2$을 확장하며 다음을 만족하는 유일한 함수 $(-)^2 : \mathbb{R}_\mathsf{c} \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$가 존재합니다.

$$\forall (n : \mathbb{N}).\, \forall (u, v : [-n, n]).\, |u^2 - v^2| \le 2 \cdot n \cdot |u - v|.$$

증명. 먼저 모든 $u : \mathbb{R}_\mathsf{c}$에 대해 $-n \le u \le n$을 만족하는 $n : \mathbb{N}$이 단지 존재한다는 점에 주목합니다 (연습문제 11.7 참조). 따라서 사상

$$e : \left(\sum_{n:\mathbb{N}} [-n, n]\right) \to \mathbb{R}_\mathsf{c} \qquad \text{다음으로 정의됩니다} \qquad e(n, x) :\equiv x$$

은 전사입니다. 다음으로, 각 $n : \mathbb{N}$에 대해 제곱 사상

$$s_n : \{\, q : \mathbb{Q} \mid -n \le q \le n \,\} \to \mathbb{Q} \qquad \text{다음으로 정의됩니다} \qquad s_n(q) :\equiv q^2$$

은 상수 $2n$을 갖는 립시츠 사상이므로, 보조정리 11.3.15를 사용하여 이를 립시츠 상수가 $2n$인 사상 $\bar{s}_n : [-n, n] \to \mathbb{R}_\mathsf{c}$로 확장할 수 있습니다. 자세한 내용은 연습문제 11.8을 참조하십시오. 사상 $\bar{s}_n$들은 서로 호환됩니다. 어떤 $m, n : \mathbb{N}$에 대해 $m < n$이면, $[-m, m]$으로 제한한 s_n은 s_m과 일치해야 합니다. 둘 다 립시츠이고, 따라서 보조정리 11.3.39의 의미에서 연속이기 때문입니다. 그러므로 정리 10.1.5에 의해 사상

$$\left(\sum_{n:\mathbb{N}} [-n, n]\right) \to \mathbb{R}_\mathsf{c}, \qquad \text{다음으로 주어집니다} \qquad (n, x) \mapsto s_n(x)$$

은 $\mathbb{R}_\mathsf{c}$를 통해 유일하게 인수분해되며, 이로써 원하는 함수를 얻습니다. □

[1] 립시츠 상수는 양의 유리수로 정의하였습니다.

이제 실수의 환 구조와 아르키메데스적 순서를 갖추었습니다. $\mathbb{R}_c$가 아르키메데스적 순서체임을 보이려면 아직 역이 필요합니다.

정리 11.3.47. Cauchy 실수는 0과 분리되어 있을 때, 그리고 그때에만 가역입니다.

증명. 먼저 $u : \mathbb{R}_c$가 역원 $v : \mathbb{R}_c$를 갖는다고 가정합시다. 아르키메데스 원리에 의해 $|v| < q$를 만족하는 $q : \mathbb{Q}$가 존재합니다. 그러면 $1 = |uv| < |u| \cdot v < |u| \cdot q$이고, 따라서 $|u| > 1/q$입니다. 이는 곧 $u \# 0$이라는 뜻입니다.

역방향을 보이기 위해 우리는 역원 사상

$$(-)^{-1} : \{\, u : \mathbb{R}_c \mid u \# 0 \,\} \to \mathbb{R}_c$$

을 함수들을 이어 붙여 구성합니다. 이는 정리 11.3.46에서 제곱을 구성한 방식과 비슷합니다. 여기서는 주요 단계만 개략적으로 설명합니다. 모든 $q : \mathbb{Q}$에 대해 다음과 같이 둡시다.

$$[q, \infty) :\equiv \{\, u : \mathbb{R}_c \mid q \le u \,\} \qquad \text{그리고} \qquad (-\infty, q] :\equiv \{\, u : \mathbb{R}_c \mid u \le -q \,\}.$$

그러면 q가 $\mathbb{Q}_+$ 전체를 움직일 때, 타입 $(-\infty, q]$와 $[q, \infty)$는 함께 $\{\, u : \mathbb{R}_c \mid u \# 0 \,\}$을 덮습니다. 이러한 각각의 $[q, \infty)$와 $(-\infty, q]$ 위에서 역원 함수는 립시츠 상수 $1/q^2$으로 보조정리 11.3.15를 적용하여 얻어집니다. 마지막으로, 정리 10.1.5는 역원 함수가 $\{\, u : \mathbb{R}_c \mid u \# 0 \,\}$을 통해 유일하게 인수분해됨을 보장합니다. □

$\mathbb{R}_c$의 대수적 구조를 하나의 정리로 요약합니다.

정리 11.3.48. Cauchy 실수는 아르키메데스적 순서체를 이룹니다.

11.3.4 Cauchy 실수는 Cauchy 완비입니다

$\mathbb{R}_c$는 $\mathbb{Q}$를 Cauchy 근사의 극한에 대해 닫아서 구성한 것이므로, $\mathbb{R}_c$는 마땅히 Cauchy 완비여야 합니다. 정리 11.3.44 덕분에 $\mathbb{R}_c$의 구성에서 정의된 Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_c$와 ($\mathbb{R}_c$에 맞게 조정한) 정의 11.2.10의 의미에서의 Cauchy 근사 사이에는 차이가 없습니다.

따라서 Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_c$가 주어졌을 때, 극한의 개념을 정의 11.2.10에서처럼 정의하면 $\mathsf{lim}(x)$가 그 극한이리라고 기대하는 것은 매우 자연스럽습니다. 그리고 실제로 정리 11.3.44와 보조정리 11.3.37에 의해 그러합니다. 우리는 다음을 증명하였습니다.

정리 11.3.49. $\mathbb{R}_c$의 모든 Cauchy 근사는 극한을 가집니다.

모든 Cauchy 근사가 극한을 가지는 아르키메데스적 순서체를 Cauchy **완비**라고 합니다. Cauchy 실수는 그러한 체 중 가장 작은 것입니다.

정리 11.3.50. Cauchy 실수는 모든 Cauchy 완비 아르키메데스적 순서체로 매장됩니다.

증명. F가 Cauchy 완비 아르키메데스적 순서체라고 합시다. 극한은 유일하므로, F의 Cauchy 근사를 그 극한으로 보내는 연산자 lim이 존재합니다. 매장 $e : \mathbb{R}_c \to F$를 $(\mathbb{R}_c, \sim)$-재귀에 의해 다음과 같이 정의합니다.

$$e(\mathsf{rat}(q)) :\equiv q \qquad \text{그리고} \qquad e(\mathsf{lim}(x)) :\equiv \mathsf{lim}(e \circ x).$$

F 위의 적절한 $\frown$은 다음과 같습니다.

$$(a \frown_\epsilon b) :\equiv |a - b| < \epsilon.$$

F가 아르키메데스적이므로 이는 분리된 관계입니다. $(\mathbb{R}_c, \sim)$-재귀의 나머지 조건들은 쉽게 확인할 수 있습니다. 또한 e가 유리수를 고정하는 순서체의 매장임도 확인해야 합니다. □

11.4 Cauchy 실수와 Dedekind 실수의 비교

Cauchy 실수와 Dedekind 실수 사이의 관계에 대해서도 이야기해 봅시다. 정리 11.3.48에 의해 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$는 아르키메데스적 순서체입니다. 쉽게 확인할 수 있듯이, 이는 Ω에 대해 허용 가능하기도 합니다. (Ω가 시작 σ-프레임인 경우에는 간단한 귀납이 필요하고, 그 밖의 경우에는 자명합니다.) 따라서 정리 11.2.14에 의해 다음과 같은 순서체의 매장이 존재합니다.

$$\mathbb{R}_{\mathsf{c}} \to \mathbb{R}_{\mathsf{d}}$$

이 매장은 유리수를 고정합니다. (이는 정리 11.2.12 및 11.3.50에서도 얻을 수 있습니다.) 일반적으로 추가 가정 없이는 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$와 $\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$가 일치하리라고 기대하지 않습니다.

보조정리 11.4.1. 모든 $x : \mathbb{R}_{\mathsf{d}}$에 대하여 다음이 단지 존재한다면

$$c : \prod_{q,r:\mathbb{Q}} (q < r) \to (q < x) + (x < r) \tag{11.4.2}$$

Cauchy 실수와 Dedekind 실수는 일치합니다.

증명. (11.4.2)의 타입은 $<$가 약한 선형 순서임을 나타내는 (11.2.3)의 절단되지 않은 변형임에 유의하십시오. $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$가 $\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$에 매장된다는 것은 이미 알고 있으므로, 모든 Dedekind 실수가 단순히 유리수의 Cauchy 수열의 극한임을 보이면 충분합니다.

임의의 $x : \mathbb{R}_{\mathsf{d}}$를 생각합시다. 가정에 의해 보조정리의 진술에서와 같은 c가 단지 존재하고, 절단의 거주성에 의해 $a < x < b$를 만족하는 $a, b : \mathbb{Q}$가 단지 존재합니다. 수열 $f : \mathbb{N} \to \{\, (q,r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < r \,\}$를 재귀로 구성합니다:

(i) $f(0) :\equiv (a,b)$로 놓습니다.

(ii) $f(n)$이 $q_n < r_n$을 만족하는 (q_n, r_n)으로 이미 정의되었다고 가정합니다. $s :\equiv (2q_n + r_n)/3$, $t :\equiv (q_n + 2r_n)/3$으로 정의합니다. 그러면 $c(s,t)$는 $s < x$와 $x < t$ 중 하나를 결정합니다. $s < x$로 결정하면 $f(n+1) :\equiv (s, r_n)$으로 놓고, 그렇지 않으면 $f(n+1) :\equiv (q_n, t)$로 놓습니다.

수열 f의 n번째 항을 (q_n, r_n)으로 씁시다. 그러면 모든 $n : \mathbb{N}$에 대해 $q_n < x < r_n$이고 $|q_n - r_n| \leq (2/3)^n \cdot |q_0 - r_0|$임을 쉽게 알 수 있습니다. 따라서 $q_0, q_1, \ldots$와 $r_0, r_1, \ldots$는 모두 Dedekind 절단 x로 수렴하는 Cauchy 수열입니다. 이로써 모든 $x : \mathbb{R}_{\mathsf{d}}$에 대해 x로 수렴하는 Cauchy 수열이 단순히 존재함을 보였습니다. □

이 보조정리로부터 가산 선택 공리나 배중률 중 어느 하나만 있으면 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$와 $\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$가 일치하기에 충분하다는 결론이 나옵니다.

따름정리 11.4.3. 배중률 또는 가산 선택 공리가 성립하면 $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$와 $\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$는 동치입니다.

증명. 배중률이 성립하면 $(x < y) \to (x < z) + (z < y)$를 증명할 수 있습니다. $x < z$이거나 $\neg(x < z)$입니다. 전자의 경우에는 증명이 끝나고, 후자의 경우에는 $z \leq x < y$이므로 $z < y$를 얻습니다. 따라서 (11.4.2)를 얻으므로 보조정리 11.4.1를 적용할 수 있습니다.

가산 선택 공리가 성립한다고 가정합시다. 집합 $S = \{\, (q,r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < r \,\}$는 $\mathbb{N}$과 동치이므로, x가 위치 결정되어 있다는 다음 진술에 가산 선택 공리를 적용할 수 있습니다.

$$\forall((q,r) : S).\, (q < x) \vee (x < r).$$

$(q < x) \vee (x < r)$는 존재 진술 $\exists(b : \mathbf{2}).(b = 0_{\mathbf{2}} \to q < x) \wedge (b = 1_{\mathbf{2}} \to x < r)$로 표현할 수 있음에 유의하십시오. 그러면 선택 함수의 (커리된 형태)가 정확히 (11.4.2)이므로 보조정리 11.4.1를 다시 적용할 수 있습니다. □

11.5 구간의 콤팩트성

우리가 구성한 실수가 고전 논리와 완전히 양립한다는 점은 이미 지적하였습니다. 따라서 배중률 (3.4.1)과 선택 공리 (3.8.1)를 가정하면 고전 해석학을 전개할 수 있으며, 이는 본질적으로 아무 표준 해석학 교재를 그대로 옮겨 적는 것에 해당합니다.

그럼에도 불구하고 계산에 관심이 있는 사람, 예컨대 수치해석학자라면 계산적으로 의미 있는 환경에서 해석학을 전개하는 일에 호기심을 가져야 마땅합니다. 구성적 환경에서 해석학이 애초에 가능하다는 사실은 [Bis67]에서 입증되었습니다. 고전 해석학과 구성적 해석학의 차이점과 유사점을 보여 주는 예로서, 단 하나의 주제 — 닫힌 구간 $[0,1]$의 콤팩트성과 이 개념을 둘러싼 몇 가지 정리 — 를 간략히 논의하겠습니다.

구성적 수학에서는 고전적으로 동치인 개념들이 갈라지는 현상이 흔히 나타나며, 콤팩트성도 예외가 아닙니다. 가장 자주 쓰이는 세 가지 콤팩트성 개념은 다음과 같습니다:

(i) **거리적으로 콤팩트**: "Cauchy 완비이고 완전 유계",
(ii) Bolzano–Weierstraß **콤팩트**: "모든 수열이 수렴하는 부분수열을 가짐",
(iii) Heine–Borel **콤팩트**: "모든 열린 덮개가 유한 부분덮개를 가짐".

이들은 고전 수학에서는 모두 동치입니다. 호모토피 타입 이론에서는 어떻게 되는지 살펴봅시다. Dedekind 실수와 Cauchy 실수 중 어느 것을 사용해도 되므로, 실수를 그냥 $\mathbb{R}$로 나타내겠습니다. 먼저 몇 가지 기본 정의를 상기합시다.

정의 11.5.1. **거리 공간** (M,d)는 모든 $x,y,z : M$에 대하여 다음을 만족하는 사상 $d : M \times M \to \mathbb{R}$를 갖춘 집합 M입니다.

$$d(x,y) \geq 0, \qquad d(x,y) = d(y,x),$$
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

정의 11.5.2. M에서의 Cauchy **근사** 는 다음을 만족하는 수열 $x : \mathbb{Q}_+ \to M$입니다.

$$\forall(\delta,\epsilon).\, d(x_\delta, x_\epsilon) < \delta + \epsilon.$$

Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to M$의 **극한**은 다음을 만족하는 점 $\ell : M$입니다.

$$\forall(\epsilon,\theta : \mathbb{Q}_+).\, d(x_\epsilon, \ell) < \epsilon + \theta.$$

완비 거리 공간은 모든 Cauchy 근사가 극한을 갖는 거리 공간입니다.

정의 11.5.3. 양의 유리수 ϵ에 대하여, 거리 공간 (M,d)에서의 ϵ-**그물** 은 다음 타입의 원소입니다.

$$\sum_{(n:\mathbb{N})} \sum_{(x_1,\ldots,x_n:M)} \forall(y : M).\, \exists(k \leq n).\, d(x_k, y) < \epsilon.$$

말로 풀어 쓰면, 이것은 M의 모든 점이 어떤 x_k로부터 ϵ 이내에 있다는 것이 단지 성립하는 유한한 점들의 수열 $x_1, \ldots, x_n$입니다.

거리 공간 (M, d)가 모든 크기의 ϵ-그물을 가질 때 이를 **완전 유계** 라고 합니다:

$$\prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} \sum_{(n:\mathbb{N})} \sum_{(x_1,\ldots,x_n:M)} \forall(y : M).\, \exists(k \leq n).\, d(x_k, y) < \epsilon.$$

주 11.5.4. 완전 유계성의 정의에서 우리는 $\sum_{(n:\mathbb{N})} \sum_{(x_1,\ldots,x_n:M)}$이라는 엄밀하지 않은 표기를 사용하였습니다. 형식적으로는 그 대신 $\sum_{(x:\mathsf{List}(M))}$이라고 써야 했으며, 여기서 $\mathsf{List}(M)$은 §5.1에서 다룬 유한 리스트의 귀납적 타입입니다. 그러나 그렇게 하면 나머지 서술을 표현하기가 다소 번거로워집니다.

완전 유계성의 정의에서 우리는 ϵ-그물의 단순한 존재가 아니라 순수한 존재를 요구한다는 점에 유의하십시오. 이렇게 하면 각 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 특정한 ϵ-그물을 대응시키는 함수를 얻습니다. 이러한 함수를 "완전 유계성의 모듈러스"라고 부를 수 있습니다. 일반적으로 고전적인 거리 개념을 호모토피 타입 이론으로 옮길 때에는 명제적 절단을 아껴서 사용해야 하며, 대개는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{Q}$나 $\mathbb{N}$으로 가는 상수가 아닌 사상을 요구하는 일을 피하도록 해야 합니다. 예를 들어, 다음은 균등 연속성의 "올바른" 정의입니다.

정의 11.5.5. 거리 공간 위의 사상 $f : M \to \mathbb{R}$가 다음을 만족할 때 이를 **균등 연속** 이라고 합니다.

$$\prod_{(\epsilon:\mathbb{Q}_+)} \sum_{(\delta:\mathbb{Q}_+)} \forall(x, y : M).\, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

특히 균등 연속 사상은 균등 연속성의 모듈러스를 가지며, 이는 각 ϵ에 그에 대응하는 δ를 대응시키는 함수입니다.

$[0, 1]$이 첫 번째 의미에서 콤팩트임을 보입시다.

정리 11.5.6. 닫힌 구간 $[0, 1]$은 완비이고 완전 유계입니다.

증명. $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 주어지면 $2/k < \epsilon$인 $k : \mathbb{N}$이 존재하므로, $i = 0, \ldots, k$에 대하여 ϵ-그물 $x_i = i/k$를 취할 수 있습니다. 이것이 ϵ-그물인 이유는 모든 $y : [0, 1]$에 대하여 $0 \leq i \leq k$이고 $(i-1)/k < y < (i+1)/k$인 i가 단지 존재하며, 따라서 $|y - x_i| < 2/k < \epsilon$이기 때문입니다.

$[0, 1]$의 완비성을 보이기 위해, Cauchy 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to [0, 1]$을 생각하고 ℓ을 $\mathbb{R}$에서의 그 극한이라 합시다. $\max$와 $\min$은 립시츠 사상이므로, $r(x) :\equiv \max(0, \min(1, x))$로 정의된 수축 $r : \mathbb{R} \to [0, 1]$은 Cauchy 근사의 극한과 교환되며, 따라서 다음이 성립합니다.

$$r(\ell) = r(\lim x) = \lim(r \circ x) = \lim x = \ell,$$

이는 요구한 대로 $0 \leq \ell \leq 1$임을 뜻합니다. □

이로써 우리는 호모토피 타입 이론에서 적어도 하나의 좋은 콤팩트성 개념을 얻었습니다. 안타깝게도 완전 유계성은 거리 개념이므로, 이 개념은 거리 공간에 한정됩니다. 나머지 두 개념은 곧 살펴보겠지만, 먼저 완전 유계 공간 위의 균등 연속 사상이 **상한**, 즉 다른 모든 상계보다 작거나 같은 상계를 가짐을 증명합니다.

정리 11.5.7. 완전 유계 거리 공간 (M, d) 위의 균등 연속 사상 $f : M \to \mathbb{R}$는 상한 $m : \mathbb{R}$를 가집니다. 모든 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$에 대하여 $|m - f(u)| < \epsilon$인 $u : M$이 존재합니다.

증명. $h : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$를 f의 균등 연속성 모듈러스라고 합시다. 근사 $x : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의합니다. 임의의 $\epsilon : \mathbb{Q}$에 대하여 M의 완전 유계성으로부터 $h(\epsilon)$-그물 $y_0, \ldots, y_n$을 얻습니다. 이제 다음과 같이 정의합니다.

$$x_\epsilon :\equiv \max(f(y_0), \ldots, f(y_n)).$$

x가 Cauchy 근사임을 보이겠습니다. 임의의 $\epsilon, \eta : \mathbb{Q}$를 생각하면 다음이 성립합니다.

$$x_\epsilon \equiv \max(f(y_0), \ldots, f(y_n)) \quad \text{그리고} \quad x_\eta \equiv \max(f(z_0), \ldots, f(z_m))$$

여기서 $y_0, \ldots, y_n$은 어떤 $h(\epsilon)$-그물이고 $z_0, \ldots, z_m$은 어떤 $h(\eta)$-그물입니다. 모든 z_i는 어떤 y_j와 $h(\epsilon)$-가깝다는 것이 단지 성립하므로 $|f(z_i) - f(y_j)| < \epsilon$이며, 이로부터 다음과 같이 결론지을 수 있습니다.

$$f(z_i) < \epsilon + f(y_j) \leq \epsilon + x_\epsilon,$$

따라서 $x_\eta < \epsilon + x_\epsilon$입니다. 대칭적으로 $x_\eta < \eta + x_\eta$를 얻으며, 따라서 $|x_\eta - x_\epsilon| < \eta + \epsilon$입니다.

우리는 $m :\equiv \lim x$가 f의 상한이라고 주장합니다. 모든 $x : M$에 대하여 $f(x) \leq m$임을 증명하려면 $\neg(m < f(x))$임을 보이는 것으로 충분합니다. 그러므로 반대로 $m < f(x)$라고 가정합시다. 그러면 $m + \epsilon < f(x)$를 만족하는 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 존재합니다. 그런데 이제 x_ϵ의 정의에 관여하는 어떤 y_i에 대하여 단지 $|f(x) - f(y_i)| < \epsilon$을 얻으므로, $m < f(x) - \epsilon < f(y_i) \leq m$이 되어 모순입니다.

m이 정리의 두 번째 부분을 만족함을 보여 증명을 마칩니다. 그러면 m은 자동으로 최소 상계가 되기 때문입니다. 임의의 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 주어지면, 한편으로는 $|m - f(x_{\epsilon/2})| < 3\epsilon/4$이고, 다른 한편으로는 $x_{\epsilon/2}$의 정의에 관여하는 어떤 y_i에 대하여 단지 $|f(x_{\epsilon/2}) - f(y_i)| < \epsilon/4$이므로, $u :\equiv y_i$로 두면 삼각 부등식에 의해 $|m - f(u)| < \epsilon$을 얻습니다. □

이제 정리 11.5.7에서 M이 완비라는 사실까지 알고 있다면, 균등 연속성 가정을 연속성으로 약화하고 결론을 상한이 달성되는 점의 존재로 강화하기를 기대할 수 있을 것입니다. 이러한 개선에 대한 통상적인 증명은 완비이고 완전 유계인 공간에서 다음 사실들이 성립한다는 데 의존합니다.

(i) 연속성이 균등 연속성을 함의하며,

(ii) 모든 수열은 수렴하는 부분수열을 가집니다.

첫 번째 진술은 Heine–Borel 콤팩트성으로부터 쉽게 따라 나오며, 두 번째 진술은 바로 Bolzano–Weierstraß 콤팩트성입니다. 안타깝게도 이 둘에는 모두 다소 문제가 있습니다. 먼저 Bolzano–Weierstraß 콤팩트성이 **제한된 전지 원리**로 알려진 배중률의 한 사례를 함의함을 보입시다. 모든 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbf{2}$에 대해,

$$\Big(\sum_{n:\mathbb{N}} \alpha(n) = 1_\mathbf{2}\Big) + \Big(\prod_{n:\mathbb{N}} \alpha(n) = 0_\mathbf{2}\Big). \tag{11.5.8}$$

계산적 관점에서는 이 원리가 성립하리라고 기대할 수 없습니다. 이 원리는 함수의 무한히 많은 값이 $0_\mathbf{2}$인지 판정할 것을 요구하기 때문입니다.

정리 11.5.9. $[0,1]$의 Bolzano–Weierstraß 콤팩트성은 제한된 전지 원리를 함의합니다.

증명. 임의의 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbf{2}$이 주어졌을 때, 수열 $x : \mathbb{N} \to [0,1]$을 다음과 같이 정의합니다.

$$x_n :\equiv \begin{cases} 0 & \text{모든 } k < n \text{에 대해 } \alpha(k) = 0_\mathbf{2} \text{이면,} \\ 1 & \text{어떤 } k < n \text{에 대해 } \alpha(k) = 1_\mathbf{2} \text{이면.} \end{cases}$$

Bolzano–Weierstraß 성질이 성립한다면, $x \circ f$가 Cauchy 수열이 되는 순증가 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 존재합니다. 충분히 큰 $n : \mathbb{N}$에 대해 n번째 항 $x_{f(n)}$은 그 극한과의 거리가 $1/6$ 이내입니다. $x_{f(n)} < 2/3$이거나 $x_{f(n)} > 1/3$입니다. $x_{f(n)} < 2/3$이면 x_n은 0으로 수렴하므로 $\prod_{(n:\mathbb{N})} \alpha(n) = 0_{\mathbf{2}}$입니다. $x_{f(n)} > 1/3$이면 $x_{f(n)} = 1$이므로 $\sum_{(n:\mathbb{N})} \alpha(n) = 1_{\mathbf{2}}$입니다. □

Bolzano–Weierstraß 콤팩트성을 잃는 것은 그다지 아쉬워하지 않을 수도 있지만, 고전 수학과 Brouwer의 직관주의가 모두 Heine–Borel 콤팩트성을 받아들였다는 사실이 보여 주듯이 이것 없이 지내기는 더 어려워 보입니다. 일반위상수학에 너무 깊이 들어가고 싶지는 않으므로, 기본 열린집합을 가지고 작업하겠습니다. $\mathbb{R}$의 경우 이들은 끝점이 유리수인 열린 구간입니다. 타입 I로 색인된 이러한 구간들의 족은 다음과 같은 사상이 될 것입니다.

$$\mathcal{F} : I \to \{\, (q,r) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < r \,\},$$

여기에는 $q < r$인 유리수 쌍 (q,r)이 타입 $\{\, x : \mathbb{R} \mid q < x < r \,\}$을 결정한다는 생각이 담겨 있습니다. 퇴화 구간도 허용하는 편이 조금 더 편리하므로, **기본 구간들의 족** 을 다음과 같은 사상으로 정합니다.

$$\mathcal{F} : I \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

엄밀히 말하면, 족은 단지 $\mathcal{F}$가 아니라 의존 쌍 $(I, \mathcal{F})$입니다. **기본 구간들의 유한 족**은 어떤 $n : \mathbb{N}$에 대해 $\{\, m : \mathbb{N} \mid m < n \,\}$으로 색인된 족입니다. 보통 이를 유한 리스트 $[(q_0, r_0), \ldots, (q_{n-1}, r_{n-1})]$로 나타냅니다. 마지막으로, $(I, \mathcal{F})$의 **유한 부분족**은 색인들의 리스트 $[i_1, \ldots, i_n]$으로 주어지며, 이 리스트는 유한 족 $[\mathcal{F}(i_1), \ldots, \mathcal{F}(i_n)]$을 결정합니다.

쌍 (q,r)과 그에 대응하는 구간 $\{\, x : \mathbb{R} \mid q < x < r \,\}$의 구별을 인식하고 있는 한, 둘 모두에 같은 표기 (q,r)을 사용해도 무방합니다. 구간들의 교집합과 포함 관계는 끝점을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$\begin{aligned} (q,r) \cap (s,t) &:\equiv (\max(q,s), \min(r,t)), \\ (q,r) \subseteq (s,t) &:\equiv (q < r \Rightarrow s \leq q < r \leq t). \end{aligned}$$

다음이 성립할 때 $(I, \lambda i.\, (q_i, r_i))$가 $[a,b]$**를 (점별로) 덮는다**고 말합니다.

$$\forall (x : [a,b]).\, \exists (i : I).\, q_i < x < r_i. \tag{11.5.10}$$

$[0,1]$**에 대한** Heine–Borel **콤팩트성** 은 $[0,1]$을 덮는 모든 족이 여전히 $[0,1]$을 덮는 유한 부분족을 단순히 가진다는 것입니다.

정리 11.5.11. 배중률이 성립하면 $[0,1]$은 Heine–Borel 콤팩트입니다.

증명. 모순을 이끌어 내기 위해, 족 $(I, \lambda i.\, (a_i, b_i))$가 $[0,1]$을 덮지만 어떤 유한 부분족도 $[0,1]$을 덮지 않는다고 가정합시다. 서로 포개어져 있고, 크기가 0으로 줄어들며, 어느 것도 $(I, \lambda i.\, (a_i, b_i))$의 유한 부분족으로 덮이지 않는 닫힌 구간들의 수열 $[q_n, r_n]$을 구성합니다.

$[q_0, r_0] :\equiv [0,1]$로 둡니다. $[q_n, r_n]$이 구성되었다고 가정하고, $s :\equiv (2q_n + r_n)/3$, $t :\equiv (q_n + 2r_n)/3$이라 합시다. 두 집합 $[q_n, t]$와 $[s, r_n]$은 모두 $(I, \lambda i.\, (a_i, b_i))$로 덮이지만, 둘 다 유한 부분덮개를 가질 수는 없습니다. 그렇지 않으면 $[q_n, r_n]$도 유한 부분덮개를 가지게 되기 때문입니다. $[q_n, t]$는 유한 부분덮개를 가지거나 가지지 않습니다. 가진다면 $[q_{n+1}, r_{n+1}] :\equiv [s, r_n]$으로 두고, 그렇지 않으면 $[q_{n+1}, r_{n+1}] :\equiv [q_n, t]$로 둡니다.

수열 $q_0, q_1, \ldots$과 $r_0, r_1, \ldots$은 모두 Cauchy 수열이며, 모든 $[q_n, r_n]$에 포함되는 점 $x : [0,1]$로 수렴합니다. $a_i < x < b_i$를 만족하는 $i : I$가 단순히 존재합니다. 구간 $[q_n, r_n]$의 크기는 0으로 줄어들므로 $a_i < q_n \leq x \leq r_n < b_i$를 만족하는 $n : \mathbb{N}$이 존재합니다. 그런데 이는 $[q_n, r_n]$이 하나의 구간 (a_i, b_i)로 덮인다는 뜻이며, 동시에 $[q_n, r_n]$은 유한 부분덮개를 갖지 않습니다. 모순입니다. □

배중률이나 약간의 Brouwer식 직관주의 없이는 막혀 버린 것처럼 보입니다. 그럼에도 불구하고 $[0,1]$의 Heine–Borel 콤팩트성은 구성적 환경에서, 여전히 고전 수학과 양립하는 방식으로 복원될 수 있습니다! 이를 위해서는 덮개의 개념을 다시 살펴보아야 합니다. (11.5.10)의 문제점은 절단된 존재 양화가 공간이 아무렇게나 덮이는 것을 허용한다는 점이며, 따라서 계산적 관점에서는 유한 부분덮개를 단순히 추출할 가망조차 전혀 없습니다. 절단을 제거하면 다음을 얻습니다.

$$\prod_{(x:[0,1])} \sum_{(i:I)} q_i < x < r_i, \tag{11.5.12}$$

덮개에 대해 지나치게 많은 것을 요구하지만 않는다면 도움이 될 수도 있을 것입니다. 이 정의로는 $(0,3)$과 $(2,5)$가 $[1,4]$를 덮는다는 것조차 보일 수 없습니다. 그것은 상수가 아닌 사상 $[1,4] \to \mathbf{2}$을 제시하는 것과 같기 때문입니다(연습문제 11.6 참조). 여기서 우리는 "점 없는 위상수학" (즉 로케일 이론)에서 교훈을 얻을 수 있습니다: 덮개의 개념은 점을 언급하지 않고 열린집합으로 표현되어야 합니다. 이러한 공간에 대한 "전체론적" 관점을 통해 덮개의 개념을 분석할 수 있게 되며, Heine–Borel 콤팩트성을 되찾을 수 있을 것입니다. 로케일 이론은 멱집합을 사용하는데, 이는 명제적 크기 재조정을 가정하면 얻을 수 있습니다. 하지만 그 대신 로케일 이론의 술어적 사촌, 즉 "형식 위상수학"이라 불리는 것에서 아이디어를 빌려 올 수 있습니다.

족 $(I, \mathcal{F})$와 구간 (a,b)가 있다고 합시다. 점을 언급하지 않고 (a,b)가 그 족으로 덮인다는 사실을 어떻게 표현할 수 있겠습니까? 한 가지 방법은 다음과 같습니다: (a,b)가 어떤 $\mathcal{F}(i)$와 같다면, (a,b)는 그 족으로 덮입니다. 또 다른 방법도 있습니다: (a,b)가 다른 어떤 족 $(J, \mathcal{G})$로 덮이고, 다시 각 $\mathcal{G}(j)$가 $(I, \mathcal{F})$로 덮인다면, (a,b)는 $(I, \mathcal{F})$로 덮입니다. 지금 나열하고 있는 것은 $(I, \mathcal{F})$가 (a,b)를 덮는다는 것을 연역하는 데 사용할 수 있는 규칙이라는 점에 주목하십시오. 충분히 좋은 규칙들을 찾아 이를 귀납적 정의로 바꾸어야 합니다.

정의 11.5.13. **귀납적 덮개** $\lhd$ 는 다음과 같은 단순 관계입니다.

$$\lhd : (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \to \left(\sum_{I:\mathcal{U}} (I \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \right) \to \mathsf{Prop}$$

이 관계는 다음 규칙들에 의해 귀납적으로 정의되며, 여기서 q, r, s, t는 유리수이고 $(I, \mathcal{F})$, $(J, \mathcal{G})$는 기본 구간들의 족입니다:

(i) 반사성: 모든 $i : I$에 대해 $\mathcal{F}(i) \lhd (I, \mathcal{F})$가 성립합니다.
(ii) 추이성: $(q,r) \lhd (J, \mathcal{G})$이고 $\forall (j : J).\, \mathcal{G}(j) \lhd (I, \mathcal{F})$이면 $(q,r) \lhd (I, \mathcal{F})$가 성립합니다.
(iii) 단조성: $(q,r) \subseteq (s,t)$이고 $(s,t) \lhd (I, \mathcal{F})$이면 $(q,r) \lhd (I, \mathcal{F})$가 성립합니다.
(iv) 국소화: $(q,r) \lhd (I, \mathcal{F})$이면 $(q,r) \cap (s,t) \lhd (I, \lambda i.\, (\mathcal{F}(i) \cap (s,t)))$가 성립합니다.
(v) $q < s < t < r$이면 $(q,r) \lhd [(q,t), (s,r)]$이고,
(vi) $(q,r) \lhd (\{\, (s,t) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < s < t < r \,\}, \lambda u.\, u)$.

이 정의는 나열된 규칙들이 점 생성자인 고차 귀납적 타입으로 읽어야 하며, 이 타입은 (-1)-절단되어 있습니다. 처음 네 조항은 일반적인 성격의 것으로 직관적으로 명확할 것입니다. 마지막 두

조항은 실수 직선에 고유한 것입니다. 하나는 두 구간이 겹치면 한 구간을 그 두 구간으로 덮을 수 있다는 것이고, 다른 하나는 한 구간을 안쪽에서부터 덮을 수 있다는 것입니다. 덧붙여, $r \leq q$이면 마지막 조항에 의해 (q,r)은 빈 족으로 덮입니다.

귀납적 덮개는 Heine–Borel 성질을 가지며, 그 증명에는 보조정리가 하나 필요합니다.

보조정리 11.5.14. $q < s < t < r$이고 $(q,r) \lhd (I,\mathcal{F})$라고 가정합시다. 그러면 (s,t)를 귀납적으로 덮는 $(I,\mathcal{F})$의 유한 부분족이 단지 존재합니다.

증명. 이 명제를 $(q,r) \lhd (I,\mathcal{F})$에 대한 귀납법으로 증명합니다. 여섯 가지 경우가 있습니다.

(i) 반사성: $(q,r) = \mathcal{F}(i)$이면 단조성에 의해 (s,t)는 유한 부분족 $[\mathcal{F}(i)]$로 덮입니다.

(ii) 추이성: $(q,r) \lhd (J,\mathcal{G})$이고 $\forall (j : J).\, \mathcal{G}(j) \lhd (I,\mathcal{F})$라고 가정합시다. 귀납 가설에 의해 (s,t)를 덮는 $[\mathcal{G}(j_1),\ldots,\mathcal{G}(j_n)]$이 단지 존재합니다. 다시 귀납 가설에 의해 각 $\mathcal{G}(j_k)$는 $(I,\mathcal{F})$의 유한 부분족으로 덮이며, 이것들을 모아 (s,t)를 덮는 하나의 유한 부분족을 만들 수 있습니다.

(iii) 단조성: $(q,r) \subseteq (u,v)$이고 $(u,v) \lhd (I,\mathcal{F})$이면, $u < s < t < v$이므로 $(u,v) \lhd (I,\mathcal{F})$에 귀납 가설을 적용할 수 있습니다.

(iv) 국소화: $(q',r') \lhd (I,\mathcal{F})$이고 $(q,r) = (q',r') \cap (a,b)$라고 가정합시다. $q' < s < t < r'$이므로, 귀납 가설에 의해 (s,t)의 유한 부분덮개 $[\mathcal{F}(i_1),\ldots,\mathcal{F}(i_n)]$이 존재합니다. 또한 $a < s < t < b$임을 알고 있으므로, $(s,t) = (s,t) \cap (a,b)$는 $[\mathcal{F}(i_1) \cap (a,b),\ldots,\mathcal{F}(i_n) \cap (a,b)]$로 덮이며, 이는 $(I, \lambda i.\, (\mathcal{F}(i) \cap (a,b)))$의 유한 부분족입니다.

(v) 어떤 $q < u < v < r$에 대해 $(q,r) \lhd [(q,v),(u,r)]$이면 단조성에 의해 $(s,t) \lhd [(q,v),(u,r)]$입니다.

(vi) 마지막으로, 반사성에 의해 $(s,t) \lhd (\{\, (u,v) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < u < v < r \,\}, \lambda z.\, z)$입니다. □

$(a-\epsilon, b+\epsilon) \lhd (I,\mathcal{F})$인 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 단지 존재할 때 $(I,\mathcal{F})$**가** $[a,b]$**를 귀납적으로 덮는다**고 합니다.

따름정리 11.5.15. 닫힌 구간은 귀납적 덮개에 대해 Heine–Borel 콤팩트입니다.

증명. $[a,b]$가 $(I,\mathcal{F})$로 귀납적으로 덮인다고 가정하면, $(a-\epsilon, b+\epsilon) \lhd (I,\mathcal{F})$인 $\epsilon : \mathbb{Q}_+$가 단지 존재합니다. 보조정리 11.5.14에 의해 $(a-\epsilon/2, b+\epsilon/2)$의 유한 부분덮개가 존재하며, 따라서 이는 $[a,b]$의 유한 부분덮개입니다. □

형식 위상수학에서의 경험은 귀납적 덮개에 대한 규칙들이 점 없는 위상수학을 구성적으로 전개하기에 충분하다는 것을 보여 줍니다. 그러나 우리는 이것이 타당한 개념이라는 우리 나름의 근거도 제시할 수 있습니다.

정리 11.5.16.

(i) 귀납적 덮개는 점별 덮개이기도 합니다.

(ii) 배중률을 가정하면, 점별 덮개는 귀납적 덮개이기도 합니다.

증명.

(i) 기본 구간들의 족 $(I,\mathcal{F})$(여기서 $(q_i,r_i) :\equiv \mathcal{F}(i)$로 씁니다), $(I,\mathcal{F})$로 귀납적으로 덮이는 구간 (a,b), 그리고 $a < x < b$인 x를 생각합시다. $(a,b) \lhd (I,\mathcal{F})$에 대한 귀납법으로 $q_i < x < r_i$인 $i : I$가 단지 존재함을 증명합니다. 대부분의 경우는 꽤 자명하므로 두 가지만 보이겠습니다. $(a,b) \lhd (I,\mathcal{F})$가 반사성에 의한 것이라면, $(a,b) = (q_i,r_i)$인 어떤 $i : I$가 단지 존재하므로

$q_i < x < r_i$입니다. $(a,b) \lhd (I,\mathcal{F})$가 $(J, \lambda j.\,(s_j,t_j))$를 거친 추이성에 의한 것이라면, 귀납 가설에 의해 $s_j < x < t_j$인 $j : J$가 단지 존재하고, 이어서 $(s_j,t_j) \lhd (I,\mathcal{F})$이므로 다시 귀납 가설에 의해 $q_i < x < r_i$인 $i : I$가 단지 존재합니다. 나머지 경우들도 이와 마찬가지로 흥미진진합니다.

(ii) $(I, \lambda i.\,(q_i,r_i))$가 (a,b)를 점별로 덮는다고 가정합시다. 정의 11.5.13의 Item (vi)에 의해, $a < c < d < b$일 때마다 $(I, \lambda i.\,(q_i,r_i))$가 (c,d)를 귀납적으로 덮음을 보이면 충분하므로, 그러한 c와 d를 생각합시다. 정리 11.5.11에 의해 이미 $[c,d]$를, 따라서 (c,d)를 점별로 덮는 유한 부분족 $[i_1,\dots,i_n]$이 존재합니다. $\epsilon : \mathbb{Q}_+$를 연습문제 11.12에서와 같이 $(q_{i_1},r_{i_1}),\dots,(q_{i_n},r_{i_n})$에 대한 르베그 수 라고 합시다. $2(d-c)/k < \min(1,\epsilon)$인 양의 $k : \mathbb{N}$이 존재합니다. $0 \le i \le k$에 대해 다음과 같이 둡시다.

$$c_k :\equiv ((k-i)c + id)/k.$$

구간 (c_0,c_2), (c_1,c_3), $\cdots$, (c_{k-2},c_k)는 추이성과 정의 11.5.13의 Item (v)을 반복 적용하여 (c,d)를 귀납적으로 덮습니다. 이들의 폭은 ϵ보다 작으므로 각각은 어떤 (q_i,r_i)에 포함되며, 추이성과 단조성을 사용하여 $(I, \lambda i.\,(q_i,r_i))$가 (c,d)를 귀납적으로 덮는다고 결론지을 수 있습니다. □

앞의 정리가 말해 주는 것은, 고전 수학에 관한 한 점별 덮개와 귀납적 덮개 사이에는 차이가 없다는 것입니다. 특히 호모토피 타입 이론에서 배중률을 가정하는 것은 무모순이므로, 점별 덮개가 아닌 귀납적 덮개를 제시할 수는 없습니다. 달리 말하면, 점별 덮개와 귀납적 덮개의 차이는 무엇을 덮느냐가 아니라 덮는다는 증명에 있습니다.

이런 식으로 계속하면 책을 한 권 더 쓸 수도 있겠지만, 여기서 멈추기로 하고 해석학을 호모토피 타입 이론에서 전개할 수 있다는 주장에 대해 충분한 근거를 제시했기를 바랍니다. 호기심 있는 독자는 중간값 정리의 구성적 버전에 대해 연습문제 11.13을 참고하십시오.

11.6 초현실수

이 절에서는 지금까지 다룬 여러 흐름을 한데 모으는 고차 귀납적-귀납적 타입의 또 다른 예인 콘웨이의 초현실수 체 No [Con76]를 살펴봅니다. 초현실수는 (데데킨트) 실수(§11.2)와 순서수(§10.3)를 자연스럽게 함께 일반화한 것입니다. 콘웨이는 배중률과 선택 공리를 받아들이는 고전 수학에서 작업하며, 초현실수를 $\{\,L \mid R\,\}$로 표기하는 초현실수 집합의 쌍으로 정의합니다. 이때 L의 모든 원소는 R의 모든 원소보다 엄격하게 작아야 합니다. 이는 분명히 귀납적 정의처럼 보이지만, 이를 그대로 귀납적 정의로 간주하기에는 세 가지 문제가 있습니다.

우선, 이 정의에는 초현실수 사이의 (엄격한) 부등식 관계가 필요하므로, 그 관계는 초현실수의 타입 No 와 동시에 정의되어야 합니다. (콘웨이는 먼저 게임을 정의함으로써 이 문제를 피합니다. 게임은 초현실수와 비슷하지만 L과 R에 대한 호환성 조건을 생략한 것입니다.) Cauchy 실수에 대한 관계 $\sim$의 경우와 마찬가지로, 이 동시 정의는 a priori 귀납-귀납적일 수도 있고 귀납-재귀적일 수도 있습니다. 우리는 $\sim$에 대해 그렇게 선택했던 것과 같은 이유로 이를 귀납-귀납적으로 만들기로 합니다.

또한, 초현실수에 대한 엄격한 부등식 $<$와 엄격하지 않은 부등식 $\le$를 따로 (그리고 상호 귀납적으로) 정의할 것입니다. 콘웨이는 $<$를 $\le$로 정의하는데, 이 방식은 고전적으로는 합당하지만 구성적으로는 그렇지 않습니다. 게다가 $<$를 부정적으로 정의하면 이를 고차 귀납적 타입의 생성자의 가설로 받아들일 수 없게 됩니다(§5.6 참조).

둘째, 콘웨이는 $\{\,L \mid R\,\}$의 L과 R이 "초현실수의 집합"이어야 한다고 말하지만, 이를 술어 $\mathsf{No} \to \mathsf{Prop}$로 소박하게 해석하면 양성이 아니므로 귀납적 생성자의 입력으로 쓸 수 없습니다. 그러나 어차피 이는 콘웨이가 뜻하는 바를 타입 이론으로 잘 옮긴 것이라 할 수 없습니다. 집합론에서 초현실수는

진클래스를 이루는 반면, 집합 L과 R은 No 의 임의의 부분클래스가 아니라 진짜 (작은) 집합이기 때문입니다. 타입 이론에서 이는 No 가 유니버스 $\mathcal{U}$ 에 상대적으로 정의되지만, 순서수와 기수의 집합 Ord 와 Card, 누적 위계 V, 또는 명제 크기 조정이 없을 때의 데데킨트 실수처럼 그 자체는 한 단계 더 높은 유니버스 $\mathcal{U}'$에 속한다는 뜻입니다. 그러면 우리는 초현실수의 "집합" L과 R이 $\mathcal{U}$-작을 것을 요구하게 되므로, 이들을 어떤 $\mathcal{U}$-작은 타입으로 색인된 초현실수의 족으로 나타내는 것이 자연스럽습니다. (이는 모두 §10.5에서 누적 위계에 대해 했던 것과 정확히 같습니다.) 즉, 초현실수의 생성자는 다음 타입을 가지게 됩니다.

$$\prod_{\mathcal{L},\mathcal{R}:\mathcal{U}} (\mathcal{L} \to \mathsf{No}) \to (\mathcal{R} \to \mathsf{No}) \to (\text{어떤 조건}) \to \mathsf{No}$$

이 타입은 실제로 엄격하게 양성입니다.

마지막으로, 콘웨이는 No 와 그 순서의 상호 정의를 제시한 뒤, $x \le y$이고 $y \le x$이면 두 초현실수 x와 y가 같다고 선언합니다. 이는 자연스럽게 "전초현실수"들의 집합을 동치 관계로 나눈 몫으로 넘어가는 것으로 읽힙니다. 그러나 선택 공리가 없으면 이러한 몫은 Cauchy 실수의 일반적인 구성에서의 몫과 같은 문제를 일으킵니다. 즉, 초현실수의 족 한 쌍이 새로운 초현실수 $\{ L \mid R \}$를 만들어 낸다는 것이 더 이상 성립하지 않습니다. L과 R을 전초현실수의 족으로 반드시 "들어 올릴" 수 있는 것은 아니기 때문입니다. 물론 이 문제는 Cauchy 실수에서와 같은 방식으로, 즉 고차 귀납-귀납적 정의를 사용하여 해결할 수 있습니다.

정의 11.6.1. **초현실수**의 타입 No 는 관계 $< : \mathsf{No} \to \mathsf{No} \to \mathcal{U}$ 및 $\le : \mathsf{No} \to \mathsf{No} \to \mathcal{U}$와 함께 다음과 같이 고차 귀납적-귀납적으로 정의됩니다. 타입 No 는 다음 생성자들을 가집니다.

- 임의의 $\mathcal{L}, \mathcal{R} : \mathcal{U}$와 함수 $\mathcal{L} \to \mathsf{No}$ 및 $\mathcal{R} \to \mathsf{No}$에 대하여(그 값을 $L : \mathcal{L}$과 $R : \mathcal{R}$에 대해 각각 x^L과 x^R로 씁니다), $\forall (L : \mathcal{L}). \forall (R : \mathcal{R}). x^L < x^R$이면 초현실수 x가 존재합니다.
- $x \le y$이고 $y \le x$인 임의의 $x, y : \mathsf{No}$에 대하여 $\mathsf{eq}_{\mathsf{No}}(x, y) : x = y$가 있습니다.

첫 번째 생성자의 입력을 **절단**이라고 부르겠습니다. x가 절단으로부터 구성된 초현실수라면, 표기 x^L은 암묵적으로 $L : \mathcal{L}$을 가정하며, 마찬가지로 x^R은 $R : \mathcal{R}$을 가정합니다. 이렇게 하면 보통 색인 타입 $\mathcal{L}$과 $\mathcal{R}$에 이름을 붙이는 것을 피할 수 있으며, 이는 논의 중인 서로 다른 절단이 많을 때 편리합니다. 콘웨이를 따라, x^L을 x의 왼쪽 옵션, x^R을 오른쪽 선택지라고 부릅니다.

경로 생성자는 서로 다른 컷이 같은 초현실수를 정의할 수 있음을 뜻합니다. 따라서 x가 특정한 컷으로 정의된다는 것을 함께 알지 못하는 한, 임의의 초현실수 x의 왼쪽 또는 오른쪽 선택지를 말하는 것은 의미가 없습니다. 그러므로 이하에서는 예를 들어 "초현실수 x가 주어졌을 때"와 구별하여 "초현실수 x를 정의하는 컷이 주어졌을 때"라고 말하겠습니다.

관계 $\le$는 다음 생성자들을 가집니다.

- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 컷들이 주어졌을 때, 모든 L에 대해 $x^L < y$이고 모든 R에 대해 $x < y^R$이면 $x \le y$입니다.
- 명제 절단: 임의의 $x, y : \mathsf{No}$에 대하여 $p, q : x \le y$이면 $p = q$입니다.

그리고 관계 $<$는 다음 생성자들을 가집니다.

- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 컷들이 주어졌을 때, $x \le y^L$인 L이 존재하면 $x < y$입니다.
- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 컷들이 주어졌을 때, $x^R \le y$인 R이 존재하면 $x < y$입니다.
- 명제 절단: 임의의 $x, y : \mathsf{No}$에 대하여 $p, q : x < y$이면 $p = q$입니다.

이를 콘웨이의 정의와 비교해 봅시다.

- L, R이 임의의 두 수 집합이고 L의 어떤 원소도 R의 어떤 원소에 대해 $\geq$ 관계에 있지 않으면, 수 $\{ L \mid R \}$이 존재합니다. 모든 수는 이런 방식으로 구성됩니다.
- $x \geq y$일 필요충분조건은 (어떤 $x^R \leq y$도 성립하지 않고, 어떤 y^L에 대해서도 $x \leq$ 관계가 성립하지 않는 것)입니다.
- $x = y$일 필요충분조건은 ($x \geq y$이고 $y \geq x$인 것)입니다.
- $x > y$일 필요충분조건은 ($x \geq y$이고 $y \ngeq x$인 것)입니다.

모든 대상이 "게임"이 아니라 [초현실]수라면 $x > y$의 정의에 $x \geq y$를 포함하는 것은 불필요합니다. 따라서 콘웨이의 $<$는 그의 $\geq$의 부정일 뿐이므로, $\{ L \mid R \}$이 초현실수가 되기 위한 그의 조건은 우리의 조건과 같습니다. 콘웨이의 $\leq$를 부정하고 이중 부정을 소거하면 우리의 $<$ 정의에 도달하며, 그러면 그의 $\leq$를 부정 없이 $<$로 다시 정식화할 수 있습니다.

No를 곧바로 많은 초현실수로 채울 수 있습니다. 콘웨이와 마찬가지로 다음과 같이 씁니다.

$$\{ x, y, z, \dots \mid u, v, w, \dots \}$$

이는 $\mathcal{L} \to \mathsf{No}$와 $\mathcal{R} \to \mathsf{No}$가 각각 $x, y, z, \dots$ 와 $u, v, w, \dots$ 로 기술되는 족인 컷으로 정의되는 초현실수를 나타냅니다. 물론 $\mathcal{L}$이나 $\mathcal{R}$가 $\mathbf{0}$이면 표기에서 해당 부분을 비워 둡니다. 이 표기는 부분집합에 대한 표준 표기 $\{ x : A \mid P(x) \}$와 공교롭게 충돌하지만, 이 절에서는 후자를 사용하지 않습니다.

- $\iota_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathsf{No}$를 다음과 같이 재귀적으로 정의합니다.

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbb{N}}(0) &:\equiv \{ \mid \}, \\ \iota_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}(n)) &:\equiv \{ \iota_{\mathbb{N}}(n) \mid \}. \end{aligned}$$

  즉, $\iota_{\mathbb{N}}(0)$은 $\mathbf{0} \to \mathsf{No}$와 $\mathbf{0} \to \mathsf{No}$로 이루어진 컷으로 정의됩니다. 마찬가지로 $\iota_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}(n))$은 ($\iota_{\mathbb{N}}(n)$을 골라내는) $\mathbf{1} \to \mathsf{No}$와 $\mathbf{0} \to \mathsf{No}$로 정의됩니다.
- 마찬가지로, 부호별 경우 재귀 원리(보조정리 6.10.12)를 사용하여 $\iota_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathsf{No}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbb{Z}}(0) &:\equiv \{ \mid \}, \\ \iota_{\mathbb{Z}}(n+1) &:\equiv \{ \iota_{\mathbb{Z}}(n) \mid \} && n \geq 0, \\ \iota_{\mathbb{Z}}(n-1) &:\equiv \{ \mid \iota_{\mathbb{Z}}(n) \} && n \leq 0. \end{aligned}$$

- **이진 유리수** 란 $a : \mathbb{Z}$이고 $n : \mathbb{N}$이며 $n > 0$이면 a가 홀수인 쌍 (a, n)을 뜻합니다. 이를 $a/2^n$으로 쓰고, 대응하는 유리수와 동일시합니다. $\mathbb{Q}_D$가 이진 유리수의 집합을 나타낸다고 할 때, $\iota_{\mathbb{Q}_D} : \mathbb{Q}_D \to \mathsf{No}$를 n에 대한 귀납법으로 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbb{Q}_D}(a/2^0) &:\equiv \iota_{\mathbb{Z}}(a), \\ \iota_{\mathbb{Q}_D}(a/2^n) &:\equiv \{ \iota_{\mathbb{Q}_D}(a/2^n - 1/2^n) \mid \iota_{\mathbb{Q}_D}(a/2^n + 1/2^n) \}, \quad n > 0 \text{에 대해.} \end{aligned}$$

  여기서는 $n > 0$이고 a가 홀수이면 $a/2^n \pm 1/2^n$이 $a/2^n$보다 분모가 작은 이진 유리수라는 사실을 사용합니다.
- $\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$가 §11.2의 Dedekind 실수(의 임의의 버전)일 때, $\iota_{\mathbb{R}_{\mathsf{d}}} : \mathbb{R}_{\mathsf{d}} \to \mathsf{No}$를 다음과 같이 정의합니다.

$$\iota_{\mathbb{R}_{\mathsf{d}}}(x) :\equiv \{ q \in \mathbb{Q}_D \text{다음을 만족하는} q < x \mid q \in \mathbb{Q}_D \text{다음을 만족하는} x < q \}.$$

  앞의 경우들과 달리, 이진 유리수를 Dedekind 실수로 간주할 때 이것이 $\iota_{\mathbb{Q}_D}$를 확장한다는 것은 자명하지 않습니다. 이는 단순성 정리(정리 11.6.2)로부터 따라 나옵니다.

- §10.3에서 다룬 순서수의 타입 Ord 를 떠올려 봅시다. 이 타입은 관계 $<$에 의해 정렬 순서를 이루며, 여기서 $A < B$는 어떤 $b : B$에 대해 $A = B_{/b}$라는 뜻입니다. $\iota_{\mathsf{Ord}} : \mathsf{Ord} \to \mathsf{No}$를 Ord에 대한 정초 재귀(보조정리 10.3.7)로 다음과 같이 정의합니다.

$$\iota_{\mathsf{Ord}}(A) :\equiv \{\, \iota_{\mathsf{Ord}}(A_{/a}) \text{모든} a : A \mid \}.$$

  또한 단순성 정리로부터 유한 순서수로 제한한 ι_{Ord}가 $\iota_{\mathbb{N}}$와 일치한다는 것도 따라 나옵니다. (다만 위의 예들과 달리, ι_{Ord}는 더 작은 순서수 부류로 제한하지 않는 한 구성적으로 단사가 아니라는 점에 유의하십시오. 연습문제 11.16 및 11.17를 참조하십시오.)
- 콘웨이에게서 가져온 몇 가지 더 흥미로운 예는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
\omega &:\equiv \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \mid \} \qquad \text{(이 역시 순서수)} \\
-\omega &:\equiv \{\, \mid \dots, -3, -2, -1, 0 \,\} \\
1/\omega &:\equiv \{\, 0 \mid 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots \,\} \\
\omega - 1 &:\equiv \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega \,\} \\
\omega/2 &:\equiv \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \mid \dots, \omega - 2, \omega - 1, \omega \,\}.
\end{aligned}$$

서로 다른 컷으로 제시된 초현실수들을 동일시할 때에는 다음의 간단한 관찰이 유용합니다.

정리 11.6.2 (콘웨이의 단순성 정리). x와 z가 컷으로 정의된 초현실수이고, 다음이 성립한다고 가정합시다.

- 모든 L과 R에 대해 $x^L < z < x^R$입니다.
- z의 모든 왼쪽 옵션 z^L에 대해 $z^L \le x^{L'}$인 왼쪽 옵션 $x^{L'}$이 존재합니다.
- z의 모든 오른쪽 선택지 z^R에 대해, $x^{R'} \le z^R$인 오른쪽 선택지 $x^{R'}$이 존재합니다.

그러면 $x = z$입니다.

증명. No의 경로 생성자를 적용하려면 $x \le z$와 $z \le x$를 보여야 합니다. 전자를 보이려면 모든 L에 대해 $x^L < z$임을 보여야 하는데 이는 가정한 것이고, 모든 R에 대해 $x < z^R$임도 보여야 합니다. 그런데 가정에 의해 임의의 z^R에 대해 $x^{R'} \le z^R$인 $x^{R'}$이 존재하므로, 원하는 대로 $x < z^R$입니다. 따라서 $x \le z$이며, $z \le x$의 증명은 대칭적입니다. □

그러나 초현실수에 대해 더 많은 것을 말하려면 그 귀납 원리가 필요합니다. $(\mathsf{No}, \le, <)$에 대한 상호 귀납 원리는 다음 세 가지 타입 족에 적용됩니다.

$$\begin{aligned}
A &: \mathsf{No} \to \mathcal{U} \\
B &: \prod_{(x,y:\mathsf{No})} \prod_{(a:A(x))} \prod_{(b:A(y))} (x \le y) \to \mathcal{U} \\
C &: \prod_{(x,y:\mathsf{No})} \prod_{(a:A(x))} \prod_{(b:A(y))} (x < y) \to \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Cauchy 실수에 대한 귀납 원리에서와 마찬가지로, B와 C를 타입 $A(x)$와 $A(y)$ 사이의 관계들의 족으로 생각하면 도움이 됩니다. 따라서 $B(x, y, a, b, \xi)$를 $(x, a) \trianglelefteq^{\xi} (y, b)$로, $C(x, y, a, b, \xi)$를 $(x, a) \triangleleft^{\xi} (y, b)$로 씁니다. 마찬가지로, ξ는 단순 명제의 원소이므로 흥미롭지 않아서 보통 생략하며, x와 y도 종종 생략하여 간단히 $a \trianglelefteq b$ 또는 $a \triangleleft b$로 쓰기도 합니다. 이러한 표기를 사용하면 귀납 원리의 가설은 다음과 같습니다.

- 초현실수 x를 정의하는 임의의 컷에 대해, 다음이 함께 주어지면

  (i) 각 L에 대하여 원소 $a^L : A(x^L)$, 그리고
  (ii) 각 R에 대하여 원소 $a^R : A(x^R)$가 주어지고,
  (iii) 모든 L과 R에 대하여 $(x^L, a^L) \lhd (x^R, a^R)$가 성립하면,

  지정된 원소 $f_a : A(x)$가 존재합니다. 이러한 데이터를 x를 정의하는 절단 위의 **의존 절단**이라고 부릅니다.
- $a : A(x)$와 $b : A(y)$가 주어진 임의의 $x, y : \mathsf{No}$에 대하여, $x \le y$이고 $y \le x$이며 또한 $(x,a) \trianglelefteq (y,b)$이고 $(y,b) \trianglelefteq (x,a)$이면, $a =^A_{\mathsf{eq}_{\mathsf{No}}} b$가 성립합니다.
- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 절단들과, x 위의 의존 절단 a 및 y 위의 의존 절단 b가 주어지고, 모든 L에 대하여 $x^L < y$ 및 $(x^L, a^L) \lhd (y, f_b)$가 성립하며, 모든 R에 대하여 $x < y^R$ 및 $(x, f_a) \lhd (y^R, b^R)$가 성립하면, $(x, f_a) \trianglelefteq (y, f_b)$가 성립합니다.
- $\trianglelefteq$는 단순 명제를 값으로 가집니다.
- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 절단들, x 위의 의존 절단 a와 y 위의 의존 절단 b, 그리고 $x \le y^{L_0}$ 및 $(x, f_a) \trianglelefteq (y^{L_0}, b^{L_0})$를 만족하는 L_0가 주어지면, $(x, f_a) \lhd (y, f_b)$가 성립합니다.
- 두 초현실수 x와 y를 정의하는 절단들, x 위의 의존 절단 a와 y 위의 의존 절단 b, 그리고 $x^{R_0} \le y$와 함께 $(x^{R_0}, a^{R_0}), \trianglelefteq (y, f_b)$를 만족하는 R_0가 주어지면, $(x, f_a) \lhd (y, f_b)$가 성립합니다.
- $\lhd$는 단순 명제를 값으로 가집니다.

이러한 가정 아래에서 다음을 만족하는 함수 $f : \prod_{(x:\mathsf{No})} A(x)$를 도출합니다.

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f_{f[x]} \\ (x \le y) &\Rightarrow (x, f(x)) \trianglelefteq (y, f(y)) \\ (x < y) &\Rightarrow (x, f(x)) \lhd (y, f(y)). \end{aligned} \tag{11.6.3}$$

점 생성자에 대한 계산 규칙 (11.6.3)에서 x는 절단으로 정의된 초현실수이고, $f[x]$는 f를 적용하여 (그리고 f가 $<$를 $\lhd$로 보낸다는 사실을 이용하여) 정의되는 x 위의 의존 절단을 나타냅니다. 늘 그렇듯이 일반적으로 패턴 매칭 표기법을 사용하며, 이때 절단 $\{\, x^L \mid x^R \,\}$ 위에서 f를 정의할 때 기호 $f(x^L)$와 $f(x^R)$, 그리고 이들이 의존 절단을 이룬다는 가정을 사용할 수 있습니다.

Cauchy 실수에서와 마찬가지로, A, $\trianglelefteq$, $\lhd$ 중 일부를 자명하게 만들어 얻는 특수한 경우들이 있습니다. $\trianglelefteq$와 $\lhd$를 $\mathbf{1}$ 에서 상수인 것으로 두면 No-**귀납**을 얻는데, 단순하게 하기 위해 이를 단순 성질에 대해서만 서술합니다:

- $P : \mathsf{No} \to \mathsf{Prop}$가 주어졌을 때, x가 모든 L과 R에 대하여 $P(x^L)$와 $P(x^R)$가 성립하는 절단으로 정의된 초현실수일 때마다 $P(x)$가 성립한다면, 모든 $x : \mathsf{No}$에 대하여 $P(x)$가 성립합니다.

이를 콘웨이의 다음 언급과 비교해 보아야 합니다:

> 일반적으로 모든 수 x에 대하여 명제 $P(x)$를 확립하고자 할 때, 모든 명제 $P(x^L)$와 $P(x^R)$가 참이라는 사실로부터 $P(x)$를 도출함으로써 이를 귀납적으로 증명합니다. "모든 수는 이러한 방식으로 구성됩니다"라는 문구가 이 절차의 정당성을 뒷받침한다고 간주합니다.

No-귀납법을 사용하여 다음을 증명할 수 있습니다.

정리 11.6.4 (콘웨이의 정리 0).

(i) 임의의 $x : \mathsf{No}$에 대하여 $x \leq x$가 성립합니다.

(ii) 절단으로 정의된 임의의 $x : \mathsf{No}$에 대하여, 모든 L과 R에 대하여 $x^L < x$ 및 $x < x^R$가 성립합니다.

증명. 먼저 $x \leq x$이면, x가 어떤 절단 y의 왼쪽 옵션으로 나타날 때마다 $<$의 첫 번째 생성자에 의해 $x < y$가 성립하고, 마찬가지로 x가 절단 y의 오른쪽 선택지로 나타날 때마다 $<$의 두 번째 생성자에 의해 $y < x$가 성립한다는 점에 주목하십시오. 특히, (i)⇒(ii)입니다.

x에 대한 No-귀납법으로 (i)을 증명합니다. 따라서 x가 모든 L과 R에 대하여 $x^L \leq x^L$ 및 $x^R \leq x^R$를 만족하는 절단으로 정의된다고 가정합시다. 그런데 위의 관찰에 의해 이 가정들은 모든 L과 R에 대하여 $x^L < x$ 및 $x < x^R$를 함의하며, 따라서 $\leq$의 생성자에 의해 $x \leq x$를 얻습니다. □

따름정리 11.6.5. No 는 0-타입입니다.

증명. 단순 관계 $R(x,y) :\equiv (x \leq y) \wedge (y \leq x)$는 No의 경로 생성자에 의해 동일성을 함의하고, 정리 11.6.4(i)에 의해 대각선을 포함합니다. 따라서 정리 7.2.2가 적용됩니다. □

이와 대조적으로, 콘웨이의 정리 1($\leq$의 추이성)은 우리의 정의로는 확립하기가 다소 더 어렵습니다. 따름정리 11.6.17를 참조하십시오.

또한 공동 재귀 원리인 $(\mathsf{No}, \leq, <)$-**재귀**도 필요합니다. 이를 다음과 같이 서술하는 것이 편리합니다. A가 관계 $\preccurlyeq : A \to A \to \mathsf{Prop}$와 $\lhd : A \to A \to \mathsf{Prop}$를 갖춘 타입이라고 가정합시다. 그러면 다음을 수행하여 $f : \mathsf{No} \to A$를 정의할 수 있습니다.

(i) 절단으로 정의된 임의의 x에 대해, 모든 L과 R에 대하여 $f(x^L) \lhd f(x^R)$가 되도록 $f(x^L)$와 $f(x^R)$가 정의되어 있다고 가정하고 $f(x)$를 정의해야 합니다. (이를 재귀의 주요 절이라고 부릅니다.)

(ii) $\preccurlyeq$가 반대칭적임을 증명하십시오. 즉, $a \preccurlyeq b$이고 $b \preccurlyeq a$이면 $a = b$입니다.

(iii) 모든 L에 대해 $x^L < y$이고 모든 R에 대해 $x < y^R$인, 컷으로 정의된 x, y에 대해, 모든 L에 대해 $f(x^L) \lhd f(y)$이고 모든 R에 대해 $f(x) \lhd f(y^R)$이며, 또한 모든 L과 R에 대해 $f(x^L) \lhd f(x^R)$이고 $f(y^L) \lhd f(y^R)$라고 귀납적으로 가정하고 $f(x) \preccurlyeq f(y)$를 증명해야 합니다.

(iv) 컷으로 정의된 x, y와 $x \leq y^{L_0}$를 만족하는 L_0에 대해, $f(x) \preccurlyeq f(y^{L_0})$이고, 또한 모든 L과 R에 대해 $f(x^L) \lhd f(x^R)$이고 $f(y^L) \lhd f(y^R)$라고 귀납적으로 가정하고 $f(x) \lhd f(y)$를 증명해야 합니다.

(v) 컷으로 정의된 x, y와 $x^{R_0} \leq y$를 만족하는 R_0에 대해, $f(x^{R_0}) \preccurlyeq f(y)$이고, 또한 모든 L과 R에 대해 $f(x^L) \lhd f(x^R)$이고 $f(y^L) \lhd f(y^R)$라고 귀납적으로 가정하고 $f(x) \lhd f(y)$를 증명해야 합니다.

마지막 세 조항은 (첫 번째 조항에서 정의된) f가 $\leq$를 $\preccurlyeq$로, $<$를 $\lhd$로 보낸다는 것을 증명해야 한다고 말함으로써 더 간결하게 기술할 수 있습니다. 이러한 성질들을 가리켜 f가 부등식을 보존한다고 말하겠습니다. 더 나아가, f가 부등식을 보존함을 증명할 때 $\leq$ 또는 $<$의 특정 사례가 그 생성자 중 하나로부터 얻어진 것이라고 가정할 수 있으며, f가 그 생성자의 입력에 나타나는 모든 부등식을 보존한다는 귀납 가설도 사용할 수 있습니다.

위의 (i)–(v)에 성공하면, 컷에 대해 (i)에서 명시한 대로 계산되고 모든 부등식을 보존하는 $f : \mathsf{No} \to A$를 얻습니다:

$$\forall (x, y : \mathsf{No}).\ \Big((x \leq y) \to (f(x) \preccurlyeq f(y))\Big) \wedge \Big((x < y) \to (f(x) \lhd f(y))\Big).$$

Cauchy 실수에 대한 $(\mathbb{R}_c, \sim)$-재귀와 마찬가지로, 이 재귀 원리는 No 위의 함수를 정의하는 데 필수적입니다. "준초현실수" 위에서 함수를 먼저 정의하고 나중에야 그것이 상등 개념을 보존함을 증명하는 방식은 쓸 수 없기 때문입니다.

예 11.6.6. 부정 함수 $\mathsf{No} \to \mathsf{No}$를 정의합시다. $A :\equiv \mathsf{No}$, $(x \trianglelefteq y) :\equiv (y \le x)$, $(x \triangleleft y) :\equiv (y < x)$로 두고 공동 재귀 원리를 적용합니다. 분명히 이 $\trianglelefteq$는 반대칭적입니다.

정의의 주요 절에서는, x가 절단으로 정의되어 있고 모든 L과 R에 대하여 $-x^L \triangleleft -x^R$가 되도록 $-x^L$와 $-x^R$가 정의되어 있다고 가정합니다. 정의에 따라 이는 모든 L과 R에 대하여 $-x^R < -x^L$임을 뜻하므로, $-x$를 절단 $\{ -x^R \mid -x^L \}$로 정의할 수 있습니다. 콘웨이를 따른 이 표기법은, 왼쪽 옵션이 x의 오른쪽 선택지를 색인하는 타입 $\mathcal{R}$로 색인되고 오른쪽 선택지가 x의 왼쪽 옵션을 색인하는 타입 $\mathcal{L}$로 색인되는 절단을 가리키며, 이에 대응하는 족 $\mathcal{R} \to \mathsf{No}$와 $\mathcal{L} \to \mathsf{No}$는 x의 족을 부정과 합성하여 정의됩니다.

이제 f가 부등식을 보존함을 확인해야 합니다.

- $x \le y$의 경우, 모든 L에 대해 $x^L < y$이고 모든 R에 대해 $x < y^R$라고 가정하고 $-y \le -x$를 보이면 됩니다. 그런데 귀납적으로 $-y < -x^L$와 $-y^R < -x$를 가정할 수 있으며, $-y$, $-x$의 정의와 $\le$의 생성자에 의해 이로부터 원하는 결과를 얻습니다.
- $x < y$의 경우, 그것이 어떤 $x \le y^{L_0}$로부터 생기는 첫 번째 경우에는 귀납적으로 $-y^{L_0} \le -x$를 가정할 수 있으며, 이때 $<$의 생성자에 의해 $-y < -x$가 따라 나옵니다.
- 마찬가지로, $x < y$가 $x^{R_0} \le y$로부터 생기는 경우에는 귀납 가설이 $-y \le -x^R$이며, 이로부터 다시 $-y < -x$를 얻습니다.

그러나 이보다 훨씬 더 많은 것을 하려면, 정리 11.3.32에서 Cauchy 실수에 대해 했던 것처럼 관계 $\le$와 $<$를 더 명시적으로 특징지어야 합니다. 또한 그때와 마찬가지로, 귀납이 성립하도록 하기 위해 이 관계들의 몇 가지 핵심 성질을 동시에 증명해야 합니다.

정리 11.6.7. 관계 $\preceq : \mathsf{No} \to \mathsf{No} \to \mathsf{Prop}$와 $\prec : \mathsf{No} \to \mathsf{No} \to \mathsf{Prop}$가 존재하여, x와 y가 컷으로 정의된 초현실수이면 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}(x \preceq y) &:\equiv \big(\forall(L).\, x^L \prec y\big) \wedge \big(\forall(R).\, x \prec y^R\big)\\ (x \prec y) &:\equiv \big(\exists(L).\, x \preceq y^L\big) \vee \big(\exists(R).\, x^R \preceq y\big).\end{aligned}$$

더 나아가 다음이 성립합니다.

$$(x \prec y) \to (x \preceq y) \tag{11.6.8}$$

또한 $\prec$와 $\preceq$를 $\le$와 $<$ 위의 "쌍가군"으로 만드는 모든 합당한 추이성 성질이 성립합니다:

$$\begin{array}{ll}(x \le y) \to (y \preceq z) \to (x \preceq z) & (x \preceq y) \to (y \le z) \to (x \preceq z)\\ (x \le y) \to (y \prec z) \to (x \prec z) & (x \preceq y) \to (y < z) \to (x \prec z)\\ (x < y) \to (y \preceq z) \to (x \prec z) & (x \prec y) \to (y \le z) \to (x \prec z).\end{array} \tag{11.6.9}$$

증명. $\preceq$와 $\prec$를 x, y에 대한 이중 $(\mathsf{No}, \le, <)$-귀납으로 정의합니다. 첫 번째 귀납은 단순 재귀이며, 그 공역은 $(\mathsf{No} \to \mathsf{Prop}) \times (\mathsf{No} \to \mathsf{Prop})$의 부분집합 A입니다. A는 한쪽이 다른 쪽을 함의하고 "오른쪽 추이성", 즉 $(x \preceq -)$와 $(x \prec -)$를 주어진 두 술어로 바꾼 (11.6.8)와 (11.6.9)의 오른쪽 열을 만족하는 술어 쌍들로 이루어집니다. 정리 11.3.16의 증명에서처럼, 이 술어들을 이항 관계의 절반으로

간주하여 $y \mapsto (\diamondsuit \preceq y)$와 $y \mapsto (\diamondsuit \prec y)$로 쓰며, $\diamondsuit$은 이 관계 쌍을 나타냅니다. A에 다음 두 관계를 부여합니다:

$$(\diamondsuit \trianglelefteq \heartsuit) :\equiv \forall(y : \mathsf{No}).\ \Big((\heartsuit \preceq y) \to (\diamondsuit \preceq y)\Big) \wedge \Big((\heartsuit \prec y) \to (\diamondsuit \prec y)\Big),$$
$$(\diamondsuit \triangleleft \heartsuit) :\equiv \forall(y : \mathsf{No}).\ \Big((\heartsuit \preceq y) \to (\diamondsuit \prec y)\Big).$$

$\trianglelefteq$가 반대칭적임에 유의하십시오. $\diamondsuit \trianglelefteq \heartsuit$이고 $\heartsuit \trianglelefteq \diamondsuit$이면 모든 y에 대해 $(\heartsuit \preceq y) \Leftrightarrow (\diamondsuit \preceq y)$이고 $(\heartsuit \prec y) \Leftrightarrow (\diamondsuit \prec y)$이므로, 단순 명제에 대한 유니밸런스와 함수 외연성에 의해 $\diamondsuit = \heartsuit$이기 때문입니다. 더 나아가, 함수 $\mathsf{No} \to A$가 부등식을 보존한다는 것은 정확히 그 함수를 No 위의 이항 관계 쌍으로 간주했을 때 "왼쪽 추이성"((11.6.9)의 왼쪽 열)을 만족한다는 것입니다.

이제 재귀의 주요 절을 위해, 절단으로 정의된 x와 모든 L과 R에 대한 관계 $(x^L \prec -)$, $(x^R \prec -)$, $(x^L \preceq -)$, $(x^R \preceq -)$가 주어졌다고 가정합니다. 이때 엄격한 관계는 엄격하지 않은 관계를 함의하고, 이 관계들은 오른쪽에서 추이성을 만족하며, 또한 다음을 만족한다고 가정합니다

$$\forall(L, R).\forall(y : \mathsf{No}).\ \Big((x^R \preceq y) \to (x^L \prec y)\Big). \tag{11.6.10}$$

이제 모든 y에 대해 $(x \prec y)$와 $(x \preceq y)$를 정의해야 합니다. 여기서는 정리 11.3.16와 달리 중첩 재귀 대신 중첩 귀납법을 사용합니다. 그래야 부등식 $x^L < x$와 $x < x^R$에 대한 왼쪽 추이성을 귀납적으로 사용할 수 있기 때문입니다. $A'(y)$를 $\triangle \preceq y$와 $\triangle \prec y$로 표기되는(여기서 $\triangle : A'(y)$) 두 단순 명제로 이루어진 $\mathsf{Prop} \times \mathsf{Prop}$의 부분집합 A'로 두어 $A' : \mathsf{No} \to \mathcal{U}$를 정의합니다. 이때 두 명제는 다음을 만족합니다.

$$(\triangle \prec y) \to (\triangle \preceq y) \tag{11.6.11}$$
$$\forall(L).(\triangle \preceq y) \to (x^L \prec y) \tag{11.6.12}$$
$$\forall(R).(x^R \preceq y) \to (\triangle \prec y). \tag{11.6.13}$$

$\trianglelefteq$ 및 $\triangleleft$와 유사한 표기법을 사용하여, $\triangle : A'(y)$와 $\square : A'(z)$에 대해 다음과 같이 정의되는 두 관계를 A'에 부여합니다.

$$(\triangle \sqsubseteq \square) :\equiv \Big((\triangle \preceq y) \to (\square \preceq z)\Big) \wedge \Big((\triangle \prec y) \to (\square \prec z)\Big)$$
$$(\triangle \sqsubset \square) :\equiv \Big((\triangle \preceq y) \to (\square \prec z)\Big).$$

이번에도 $\sqsubseteq$는 적절한 의미에서 명백히 반대칭입니다. 또한 부등식을 보존하는 함수 $\prod_{(y:\mathsf{No})} A'(y)$는 정확히 한쪽이 다른 쪽을 함의하는 술어의 쌍으로서, 오른쪽 추이성과 부등식 $x^L < x$ 및 $x < x^R$에 대한 왼쪽 추이성을 만족하는 것입니다. 따라서 이 내부 귀납법은 외부 재귀의 주요 절을 완성하는 데 필요한 것을 제공합니다.

내부 귀납법의 주요 절에서는 컷으로 정의된 y도 주어져 있고, 모든 L과 R에 대해 성질 $(x \prec y^L)$, $(x \prec y^R)$, $(x \preceq y^L)$, $(x \preceq y^R)$이 주어져 있다고 가정합니다. 이때 엄격한 성질은 엄격하지 않은 성질을 함의하고, $x^L < x$와 $x < x^R$에 대해서는 왼쪽 추이성이, $y^L < y^R$에 대해서는 오른쪽 추이성이 성립합니다. 이제 정리의 서술에 명시된 정의를 제시할 수 있습니다.

$$(x \preceq y) :\equiv (\forall(L).x^L \prec y) \wedge (\forall(R).x \prec y^R), \tag{11.6.14}$$
$$(x \prec y) :\equiv (\exists(L).x \preceq y^L) \vee (\exists(R).x^R \preceq y). \tag{11.6.15}$$

이것이 $A'(y)$의 원소를 정의하려면 먼저 $(x \prec y) \to (x \preceq y)$임을 보여야 합니다. 가정 $x \prec y$에는 두 가지 경우가 있습니다. 한편으로 $x \preceq y^{L_0}$인 L_0이 존재한다면, $y^{L_0} < y^R$에 대한 오른쪽 추이성에 의해 모든 R에 대해 $x \prec y^R$입니다. 또한 $x^L < x$에 대한 왼쪽 추이성에 의해 임의의 L에 대해 $x^L \prec y^{L_0}$이므로, 오른쪽 추이성에 의해 $x^L \prec y$입니다. 따라서 $x \preceq y$입니다.

다른 한편으로 $x^{R_0} \preceq y$인 R_0이 존재한다면, (11.6.10)에 의해 모든 L에 대해 $x^L \prec y$입니다. 그리고 $x < x^{R_0}$와 $y < y^R$에 대한 왼쪽 및 오른쪽 추이성에 의해 임의의 R에 대해 $x \prec y^R$입니다. 따라서 $x \preceq y$입니다.

또한 이 정의들이 $x^L < x$와 $x < x^R$에 대해 왼쪽 추이적임을 보여야 합니다. 그런데 $x \preceq y$이면 정의에 의해 모든 L에 대해 $x^L \prec y$이고, $x^R \preceq y$이면 역시 정의에 의해 $x \prec y$입니다.

따라서 (11.6.14)와 (11.6.15)는 실제로 $A'(y)$의 원소를 정의합니다. 이제 이 정의가 A'로 가는 의존 함수로서 부등식을 보존한다는 것, 즉 이 관계들이 오른쪽 추이적이라는 것을 검증해야 합니다. 각 경우에 이 관계들이 부등식 생성자에서 나타나는 모든 부등식에 대해 오른쪽 추이적이라고 귀납적으로 가정할 수 있다는 점을 기억하십시오.

- $x \preceq y$이고 $y \leq z$이며, 후자는 모든 L과 R에 대한 $y^L < z$와 $y < z^R$로부터 얻어진다고 가정합시다. 그러면 $y < z^R$에 적용한 (내부 재귀의) 귀납 가설로부터 임의의 R에 대해 $x \prec z^R$을 얻습니다. 또한 정의에 의해 $x \preceq y$는 임의의 L에 대해 $x^L \prec y$임을 함의하므로, 외부 재귀의 귀납 가설에 의해 $x^L \prec z$입니다. 따라서 $x \preceq z$입니다.
- $x \preceq y$이고 $y < z$라고 가정합시다. 먼저 $y < z$가 $y \leq z^{L_0}$로부터 얻어진다고 가정합시다. 그러면 $y \leq z^{L_0}$에 적용한 내부 귀납 가설로부터 $x \preceq z^{L_0}$을 얻으므로 $x \prec z$입니다.

  다음으로 $y < z$가 $y^{R_0} \leq z$로부터 얻어진다고 가정합시다. 그러면 정의에 의해 $x \preceq y$는 $x \prec y^{R_0}$를 함의하고, 이어서 $y^{R_0} \leq z$에 대한 내부 귀납 가설로부터 $x \prec z$를 얻습니다.
- $x \prec y$이고 $y \leq z$이며, 후자는 모든 L과 R에 대한 $y^L < z$와 $y < z^R$로부터 얻어진다고 가정합시다. 정의에 의해 $x \prec y$는 $x^{R_0} \preceq y$인 R_0 또는 $x \preceq y^{L_0}$인 L_0이 단순히 존재함을 함의합니다. $x^{R_0} \preceq y$이면 외부 귀납 가설로부터 $x^{R_0} \preceq z$를 얻으므로 $x \prec z$입니다. $x \preceq y^{L_0}$이면 ($y \leq z$의 생성자에 의해 성립하는) $y^{L_0} < z$에 대한 내부 귀납 가설로부터 $x \prec z$를 얻습니다.

이로써 내부 귀납법이 완성됩니다. 따라서 컷으로 정의된 임의의 x에 대해, (11.6.14)와 (11.6.15)로 정의되고 오른쪽 추이적인 $(x \prec -)$와 $(x \preceq -)$를 얻습니다.

외부 재귀를 완성하려면 이 정의들이 왼쪽 추이적임을 검증해야 합니다. z에 대한 No-귀납법을 적용하면 세 가지 경우가 남는데, 이는 바로 위에서 오른쪽 추이성에 대해 설명한 경우들과 본질적으로 동일합니다. 따라서 이를 생략합니다. □

정리 11.6.16. 임의의 $x, y : \mathsf{No}$에 대해 $(x < y) = (x \prec y)$이고 $(x \leq y) = (x \preceq y)$입니다.

증명. 왼쪽에서 오른쪽 방향으로는 $A(x) :\equiv \mathbf{1}$인 $(\mathsf{No}, \leq, <)$-귀납법을 사용하며, $\preceq$와 $\prec$가 관계 $\trianglelefteq$와 $\triangleleft$를 제공합니다. 모든 생성자 경우에서 x와 y는 컷으로 정의되므로 $\preceq$와 $\prec$의 정의가 계산되고 귀납 가설이 적용됩니다.

오른쪽에서 왼쪽 방향으로는 No-귀납법을 사용하여 x와 y가 컷으로 정의된다고 가정합니다. 그러면 이제 $\preceq$와 $\prec$의 정의 및 귀납 가설이 $\leq$와 $<$의 해당 생성자에 필요한 데이터를 정확히 제공합니다. □

따름정리 11.6.17. No 위의 관계 $\leq$와 $<$는 다음을 만족합니다.

$$\forall(x, y : \mathsf{No}).\, (x < y) \to (x \leq y)$$

또한 다음과 같이 추이적입니다.

$$(x \le y) \to (y \le z) \to (x \le z)$$
$$(x \le y) \to (y < z) \to (x < z)$$
$$(x < y) \to (y \le z) \to (x < z).$$

Cauchy 실수에서와 마찬가지로, No 위의 모든 연산을 정의할 때 결합된 $(\mathsf{No}, \le, <)$-재귀 원리는 여전히 필수적입니다.

예 11.6.18. $+ : \mathsf{No} \to \mathsf{No} \to \mathsf{No}$를 첫 번째 인수에 대한 재귀와 그에 이은 두 번째 인수에 대한 귀납법으로 정의합니다. 외부 재귀에서는 공역을 모든 x, y에 대해 $(x < y) \to (g(x) < g(y))$이고 $(x \le y) \to (g(x) \le g(y))$인 함수 g들로 이루어진 $\mathsf{No} \to \mathsf{No}$의 부분집합으로 둡니다. 이러한 g, h에 대해 $(g \trianglelefteq h) :\equiv \forall(x : \mathsf{No}).\, g(x) \le h(x)$와 $(g \lhd h) :\equiv \forall(x : \mathsf{No}).\, g(x) < h(x)$를 정의합니다. $\trianglelefteq$가 반대칭임은 분명합니다.

재귀의 주요 절을 위해, x가 절단으로 정의되어 있고, 함수 $(x^L + -)$와 $(x^R + -)$가 정의되어 있으며 부등식을 보존하고 $x^L + y < x^R + y$를 만족한다고 가정한 다음, $(x + -)$를 정의합니다. 정리 11.6.7에서와 같이, 내부 재귀 대신 족 $A : \mathsf{No} \to \mathcal{U}$로의 내부 귀납을 사용합니다. 여기서 $A(y)$는 각 $x^L + y < z$이고 각 $x^R + y > z$인 $z : \mathsf{No}$들의 부분집합입니다. A에 No로부터 유도된 관계 $\le$와 $<$를 부여하므로, 반대칭성은 자명합니다. 내부 재귀의 주요 절을 위해, y 또한 절단으로 정의되어 있고, 각 $x + y^L$와 $x + y^R$가 정의되어 있으며 $x^L + y^L < x + y^L$, $x^L + y^R < x + y^R$, $x + y^L < x^R + y^L$, $x + y^R < x^R + y^R$를 만족하고(이들은 $A(y)$의 원소에 부과된 추가 조건에서 나옵니다), 또한 $x + y^L < x + y^R$를 만족한다고(이는 $A(y)$의 원소 $x + y^L$와 $x + y^R$가 의존 절단을 이루기 때문입니다) 가정합니다. 이제 콘웨이의 정의를 제시합니다:

$$x + y :\equiv \{\, x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R \,\}.$$

다시 말해, $x + y$의 왼쪽 옵션은 어떤 왼쪽 옵션 x^L에 대한 $x^L + y$ 꼴이거나 어떤 왼쪽 옵션 y^L에 대한 $x + y^L$ 꼴인 모든 수입니다. 이 왼쪽 옵션 각각이 이 오른쪽 선택지 각각보다 작음을 보여야 합니다:

- 바깥쪽 귀납 가설에 의해 $x^L + y < x^R + y$가 성립합니다.
- $x^L + y < x^L + y^R < x + y^R$가 성립합니다. 첫 번째 부등식은 $(x^L + -)$가 부등식을 보존하기 때문이고, 두 번째 부등식은 $x + y^R : A(y^R)$이기 때문입니다.
- $x + y^L < x^R + y^L < x^R + y$가 성립합니다. 첫 번째 부등식은 $x + y^L : A(y^L)$이기 때문이고, 두 번째 부등식은 $(x^R + -)$가 부등식을 보존하기 때문입니다.
- 내부 귀납 가설(구체적으로는 의존 절단을 가지고 있다는 사실)에 의해 $x + y^L < x + y^R$입니다.

또한 이렇게 정의된 $x + y$가 $A(y)$에 속한다는 것, 즉 $x^L + y < x + y$이고 $x + y < x^R + y$임도 보여야 합니다. 그러나 이는 정리 11.6.4(ii)에 의해 참입니다.

다음으로 $(x + -)$의 정의가 부등식을 보존함을 확인해야 합니다.

- $y \le z$가 모든 L과 R에 대하여 $y^L < z$이고 $y < z^R$임을 아는 데서 비롯된다면, 내부 귀납 가설은 $x + y^L < x + z$와 $x + y < x + z^R$를 주고, 외부 귀납 가설은 $x^L + y \le x^L + z$와 $x^R + y \le x^R + z$를 줍니다. 더욱이 $x^R + y$는 정의에 의해 $x + y$의 오른쪽 선택지이므로 $x + y < x^R + y$입니다. 마찬가지로 $x^L + z$가 $x + z$의 왼쪽 옵션임을 알 수 있으므로 $x^L + z < x + z$입니다. 따라서 추이성을 사용하면 $x^L + y < x + z$와 $x + y < x^R + z$를 얻으므로, $\le$의 생성자에 의해 $x + y \le x + z$라고 결론지을 수 있습니다.

- $y < z$가 $y \leq z^{L_0}$인 어떤 L_0으로부터 비롯된다면, 귀납적으로 $x + y \leq x + z^{L_0}$이고, $x + z^{L_0}$가 $x + z$의 오른쪽 선택지이므로 $x + y < x + z$입니다.
- 마찬가지로 $y^{R_0} \leq z$로부터 $y < z$가 성립하는 경우, $x + y^{R_0} \leq x + z$이므로 $x + y < x + z$가 성립합니다.

이로써 안쪽 귀납이 완료됩니다. 바깥쪽 재귀를 위해서는 $+$가 왼쪽에서도 부등식을 보존함을 확인해야 합니다. No-귀납을 적용한 후에는 정확히 같은 방식으로 진행됩니다.

콘웨이는 [Con76]의 제0부 부록에서 초현실수를 ZFC 집합론에서 형식화하는 방법을 논의합니다. 하나는 순서수를 따라 반복하면서 각 동치류에 대해 가장 낮은 랭크의 대표원들로 이루어진 집합으로 넘어가는 방법이고, 다른 하나는 수를 "부호 전개"로 나타내는 방법입니다. 이어서 그는 다음과 같이 언급합니다.

> 이러한 구성들이 기이할 정도로 복잡하다는 사실은 우리의 수 체계의 본성보다는 ZF 안에서의 형식화의 본성에 대해 더 많은 것을 알려 줍니다…

그리고 이어서 다음을 포함해야 하는 "허용 가능한 종류의 구성"에 관한 일반 이론을 옹호합니다.

(i) 대상은 앞선 대상들로부터 합리적으로 구성적인 어떤 방식으로든 생성될 수 있습니다.
(ii) 생성된 대상들 사이의 같음은 원하는 어떤 동치 관계여도 됩니다.

조건 (i)은 §§5.6 및 5.7에서 제시된 것과 같은 귀납적 정의의 일반 원리를 정당화하는 것으로 자연스럽게 읽을 수 있습니다. 특히 생성자에 대한 엄격 양성 조건은 "합리적으로 구성적"이라는 것이 무엇을 의미하는지에 대한 형식화로 간주할 수 있습니다. 그러면 조건 (ii)는 이를 모든 종류의 고차 귀납적 정의로 확장해야 함을 시사하며, 이러한 정의에서는 임의의 합리적인 방식으로 대상들을 같게 만드는 경로 생성자를 부과할 수 있습니다. 예를 들어 바로 다음 단락에서 콘웨이는 이렇게 말합니다:

> …예를 들어 새로운 대상 (x, y)를 자유롭게 생성하고 이를 x와 y의 순서쌍이라고 부를 수도 있습니다. 또한 (x, y)와는 다르지만 그것과 공존하는 순서쌍 $[x, y]$를 생성할 수도 있습니다…만약 그 대신 (x, y)를 순서 없는 쌍으로 만들고 싶다면, $x = z, y = t$ 또는 $x = t, y = z$일 때 그리고 그때에만 $(x, y) = (z, t)$라는 동치 관계를 통해 같음을 정의할 수 있습니다.

특정 형태의 생성자들로 생성되는 새로운 대상을 새로운 이름과 함께 도입할 수 있는 자유는 바로 귀납적 정의 이론에서 우리가 가진 것입니다. §5.2에서 다룬 자연수의 두 사본 $\mathbb{N}$와 $\mathbb{N}'$의 경우와 마찬가지로, 데카르트 곱 타입 $A \times B$와 동일한 정의를 적으면 서로 다른 곱 타입 $A \times' B$를 얻게 되며, 그 표준 원소들을 자유롭게 $[x, y]$로 쓸 수 있습니다. 그리고 적절한 경로 생성자를 추가하여 이 중 하나를 순서 없는 쌍의 타입으로 만들 수 있습니다.

물론 콘웨이의 요점은 특별히 ZF에 불만을 제기하려는 것이 아니라, 모든 기초 이론에 한꺼번에 반대하는 논증을 펴려는 것이었습니다.

> …이 제안은 ZF의 대안으로서 어떤 특정한 이론을 제시하는 것이 아닙니다… 대신 제안하는 것은, 이러한 종류의 임의의 수학 이론을 만들 자유를 우리 스스로에게 부여하되, 그러한 이론이라면 어느 것이든 표준 기초 이론 중 어느 것으로도 형식화될 수 있음을 단번에 보장하는 메타정리를 증명하자는 것입니다.

이에 대해, 사실 유니밸런트 기초는 콘웨이가 염두에 둔 "표준 기초 이론" 중 하나가 아니라, 새로운 이론을 만드는 우리의 능력을 표현할 수 있고 그에 관해 콘웨이의 메타정리를 증명할 수 있는 메타이론이라고 응답할 수도 있습니다. 예를 들어, 초현실수는 콘웨이가 염두에 둔 "수학 이론" 중 하나이며, 우리는 초현실수가 유니밸런트 기초 안에서 구성되고 정당화될 수 있음을 보았습니다. 마찬가지로, 콘웨이는 앞서 다음과 같이 언급했습니다.

> …집합론도 그러한 이론이 될 것입니다. 집합은 통상적인 공리에 대응하는 과정을 통해 앞선 집합들로부터 구성되며, 같음 관계는 같은 원소를 가진다는 관계입니다.

이 서술은 §10.5에서 다룬 집합론의 누적 위계에 대한 고차 귀납적 구성과 밀접하게 일치합니다. 그렇다면 콘웨이의 메타정리는 ZFC 안에서 유니밸런트 기초의 모형을 구성할 수 있다는, 우리가 여러 번 언급한 사실(이는 이 책의 범위를 벗어납니다)에 대응할 것입니다.

그러나 유니밸런트 기초는 그 자체로 매우 풍부하고 강력하므로, 이를 단지 집합과 유사한 이론을 구성하기 위한 메타이론으로만 격하시키는 것은 어리석은 일입니다. 집합(0-타입) 수준에서조차 유니밸런트 기초의 고차 귀납적 타입이 대상을 그 보편 성질에 의해 직접 구성하게 해 준다는 것을 보았습니다(§6.11). Cauchy 완비화의 구성적 이론(§11.3)이 그 예입니다. 그러나 무엇보다도, 호모토피 이론과 범주론을 기초 체계 안에서 직접 모형화할 수 있는 잠재력(장 8 및 9)은 유니밸런트 기초에 어떤 집합론적 기초도 따라올 수 없는 이점을 줍니다.

주

Dedekind 실수 위에 대수적 연산, 특히 곱셈을 정의하는 일은 다소 까다로우면서도 지루합니다. 산술을 갖추는 방법은 여러 가지가 있습니다. 각 방법에는 고유한 장점이 있지만, 모두 어느 정도의 기술적인 작업을 요구하는 것으로 보입니다. 예를 들어 Richman [Ric08]은 Dedekind 실수 위의 곱셈을 먼저 양의 절단에 대해 정의한 다음 이를 대수적으로 모든 Dedekind 절단으로 확장하는 반면, 콘웨이 [Con76]는 초현실수에 대한 곱셈의 정의가 Dedekind 실수에 대해서도 잘 작동함을 관찰했습니다.

Dedekind 실수에 대한 우리의 취급은 추상 스톤 쌍대성(Abstract Stone Duality)의 맥락에서 Dedekind 실수를 구성한 [BT09]로부터 많은 아이디어를 빌려 왔습니다. 이는 열린 집합을 분류하고, 쌍대성에 의해 닫힌 집합도 분류하는 특별한 대상 Σ를 갖춘 단순 타입 λ-계산의 (제한된) 형태입니다. [BT09]에서는 산술 연산의 기본 성질에 대한 자세한 증명도 찾아볼 수 있습니다.

정리 11.3.50에서 증명했듯이 $\mathbb{R}_c$가 가장 작은 Cauchy 완비 아르키메데스적 순서체라는 사실은, 우리의 Cauchy 실수가 아마도 Escardó–Simpson 실수 [ES01]와 일치함을 시사합니다. 이것이 실제로 사실인지 확인해 보는 것은 흥미로울 것입니다. Escardó–Simpson 실수, 더 정확히는 그에 대응하는 닫힌 구간의 개념은 유한 곱을 갖는 임의의 범주에서 서술될 수 있다는 점에서 흥미롭습니다.

"정칙 확장 공리"로 보강된 구성적 집합론에서는, 초한 반복을 통해 Cauchy 수열의 극한에 대해 닫는 방식으로 Cauchy 완비화를 정의해 볼 수도 있습니다. 이 구성이 우리의 구성과 일치하는지 확인해 보는 것도 흥미로울 것입니다.

Cauchy 실수와 Dedekind 실수가 일치하려면 의존 선택이 필요하다는 것은 구성적 수학계에 널리 알려진 이야기이지만, 가산 선택으로 충분하다는 사실은 덜 알려져 있습니다. **의존 선택** 은 A 위의 전체 관계 R, 즉 $\forall(x:A).\exists(y:A).R(x,y)$인 관계와 임의의 $a:A$에 대하여, $f(0)=a$이고 모든 $n:\mathbb{N}$에 대해 $R(f(n),f(n+1))$인 $f:\mathbb{N}\to A$가 단순히 존재한다는 것임을 상기하십시오. 우리의 따름정리 11.4.3는 의존 선택의 적용을 가산 선택을 사용하는 적용으로 바꾸는 전형적인 기법을 사용합니다. 즉, 가산 선택을 한 번 사용하여 나타날 수 있는 모든 선택을 미리 해 두고, 그다음 선택 함수를 사용하여 의존적인 선택을 피합니다.

구성적 맥락에서 여러 콤팩트성 개념 사이의 복잡한 관계는 [BIS02]에서 논의됩니다. Palmgren [Pal07]은 점별 해석학과 점 없는 위상수학을 잘 비교하고 있습니다.

초현실수는 [Con76]에서 일종의 귀납적 정의를 사용하여 정의되었지만, 어떤 기초 체계의 관점에서도 이를 명시적으로 정당화하지는 않았습니다. 이 때문에 이후의 일부 저자들은 집합론으로 더

분명하게 부호화할 수 있는 부호 전개나 다른 더 명시적인 표현을 사용하는 경향이 있었습니다. 초현실수를 타입 이론에서 표현한다는 아이디어는 Hancock이 처음 고려했으며, Setzer와 Forsberg [FS12]는 초현실수와 그 부등식 관계 $<$와 $\leq$가 자연스럽게 귀납-귀납적 정의를 이룬다는 점을 지적했습니다. 여기서 제시한 고차 귀납-귀납적 버전은 초현실수에 대한 올바른 상등 개념을 내장하고 있으며, 새로운 것입니다.

연습문제

연습문제 11.1. 먼저 제곱을 정의한 다음 식 (11.3.45)를 사용하여 Dedekind 실수의 다른 정의를 제시하십시오. 그렇게 얻은 것이 가환환인지 확인하십시오.

연습문제 11.2. 정의 11.2.1에서 유계성 조건 (i)를 제거한다고 가정합시다. 그러면 $-\infty :\equiv (\mathbf{0}, \mathbb{Q})$와 $\infty :\equiv (\mathbb{Q}, \mathbf{0})$를 포함하는 **확장 실수** 를 얻습니다. 절단에 대한 산술 연산의 정의 중 어떤 것이 확장 실수에서도 여전히 의미가 있습니까? 어떤 대수적 구조를 얻게 됩니까?

연습문제 11.3. 한쪽 절단을 고려하면 각각 **아래** Dedekind 실수와 **위** Dedekind 실수를 얻습니다. 예를 들어, 아래 실수는 다음과 같은 술어 $L : \mathbb{Q} \to \Omega$로 주어집니다.

(i) 거주됨: $\exists(q : \mathbb{Q}).\, L(q)$, 그리고
(ii) 둥긂: $L(q) = \exists(r : \mathbb{Q}).\, q < r \wedge L(r)$.

(절단 $\infty :\equiv \mathbb{Q}$를 배제하기 위해 $\exists(r : \mathbb{Q}).\, \neg L(r)$도 요구할 수 있습니다.) 하측 실수에 대해 어떤 산술 연산을 정의할 수 있습니까? 특히 덧셈 역원은 어떻게 됩니까?

연습문제 11.4. 정의 11.2.1에서 위치성 조건을 제거한다고 가정합시다. 그러면 절단이 "틈"을 가질 수 있게 되는데, 이 틈은 그저 구간일 뿐이므로, 우리는 **구간 정의역** $\mathbb{I}$를 얻습니다. $\mathbb{I}$ 위의 부분 순서 $\sqsubseteq$를 다음과 같이 정의하십시오.

$$((L, U) \sqsubseteq (L', U')) :\equiv (\forall(q : \mathbb{Q}).\, L(q) \Rightarrow L'(q)) \wedge (\forall(q : \mathbb{Q}).\, U(q) \Rightarrow U'(q)).$$

$\mathbb{I}$에 대하여 $\mathbb{I}$의 극대 원소는 무엇입니까? 구간 정의역의 원소에 그 아래 끝점과 위 끝점을 대응시키는 "끝점" 연산을 정의하십시오. 끝점은 실수입니까, 하실수입니까, 아니면 상실수입니까(연습문제 11.3 참고)? 절단에 대한 산술 연산의 정의 중 어떤 것이 구간 정의역에 대해서도 여전히 의미가 있습니까?

연습문제 11.5. 모든 $x, y : \mathbb{R}_{\mathsf{d}}$에 대해 다음이 성립함을 보이십시오.

$$\neg(x < y) \Rightarrow y \leq x$$

그리고

$$(x \leq y) \simeq \Big(\prod_{\epsilon:\mathbb{Q}_+} x < y + \epsilon\Big).$$

$\neg(x \leq y)$이면 $y < x$입니까?

연습문제 11.6.

(i) 배중률을 가정하여 상수가 아닌 사상 $\mathbb{R}_{\mathsf{d}} \to \mathbb{Z}$를 구성하십시오.
(ii) $f : \mathbb{R}_{\mathsf{d}} \to \mathbb{Z}$가 $f(0) = 0$이고 모든 $x > 0$에 대해 $f(x) \neq 0$인 사상이라고 가정합시다. 이로부터 제한된 전지 원리 (11.5.8)를 유도하십시오.

연습문제 11.7. 순서체 F에서 $\mathbb{Q}$의 조밀성과 전통적인 아르키메데스 공리가 동치임을 보이십시오.

$$(\forall(x,y:F).\, x<y \Rightarrow \exists(q:\mathbb{Q}).\, x<q<y) \Leftrightarrow (\forall(x:F).\, \exists(k:\mathbb{Z}).\, x<k).$$

연습문제 11.8. $a,b:\mathbb{Q}$이고 $f:\{\, q:\mathbb{Q} \mid a\le q\le b\,\}\to\mathbb{R}_c$가 상수 L을 갖는 립시츠 함수라고 가정합시다. 상수 L을 갖는 립시츠 함수인 f의 확장 $\bar{f}:[a,b]\to\mathbb{R}_c$가 유일하게 존재함을 보이십시오. 힌트: 닫힌 구간에 대해 보조정리 11.3.15를 다시 증명하는 대신, 수축 $r:\mathbb{R}_c\to[-n,n]$이 존재함에 주목하고 $f\circ r$에 보조정리 11.3.15를 적용하십시오.

연습문제 11.9. $\mathbb{R}_c$의 구성을 일반화하여 임의의 거리 공간의 Cauchy 완비화를 구성하십시오. 먼저, 거리 공간의 거리 함수의 공역으로 어떤 실수 개념이 가장 자연스러운지 생각해 보십시오. 그것이 중요합니까? 다음으로, 두 가지 구성의 세부 사항을 완성하십시오.

(i) Cauchy 실수의 구성을 따라, 거리 공간의 완비화를 Cauchy 수열의 극한에 대해 닫혀 있는 귀납-귀납적 타입으로 정의하십시오.

(ii) Lawvere [Law74]와 Richman [Ric00]이 제시한 다음 구성을 사용하십시오. 이 구성에서는 거리 공간 (M,d)의 완비화가 **위치**들의 타입으로 주어집니다. 위치란 다음 조건을 만족하는 함수 $f:M\to\mathbb{R}$입니다.

   (a) 모든 $x,y:M$에 대해 $f(x)\ge|f(y)-d(x,y)|$가 성립하고,

   (b) $\inf_{x\in M} f(x)=0$이 성립합니다. 이는 $\forall(\epsilon:\mathbb{Q}_+).\,\exists(x:M).\,|f(x)|<\epsilon$이고 $\forall(x:M).\,f(x)\ge 0$이라는 뜻입니다.

   이 정의의 착상은 f가 마치 어떤 한 점으로부터의 거리를 재는 것처럼 보인다는 것입니다.

마지막으로, 거리 공간 완비화의 다음 보편 성질을 증명하십시오. 거리 공간에서 Cauchy 완비 거리 공간으로 가는 국소 균등 연속 사상은 완비화 위의 국소 균등 연속 사상으로 유일하게 확장됩니다. (사상이 열린 공 위에서 균등 연속일 때 그 사상을 **국소 균등 연속**이라고 합니다.)

연습문제 11.10. **마르코프 원리** 는 모든 $f:\mathbb{N}\to\mathbf{2}$에 대해 다음이 성립한다는 원리입니다.

$$(\neg\neg\exists(n:\mathbb{N}).\, f(n)=1_{\mathbf{2}})\Rightarrow\exists(n:\mathbb{N}).\, f(n)=1_{\mathbf{2}}.$$

이는 이중 부정 법칙 (3.4.2)의 한 특수한 경우입니다. $\forall(x,y:\mathbb{R}_d).\,x\neq y\Rightarrow x\,\#\,y$가 마르코프 원리를 함의함을 보이십시오. 그 역도 성립합니까?

연습문제 11.11. 실수에 대해 다음 "영인자 없음" 성질이 성립함을 확인하십시오: $xy\,\#\,0\Leftrightarrow x\,\#\,0\wedge y\,\#\,0$.

연습문제 11.12. $(q_1,r_1),\ldots,(q_n,r_n)$이 (a,b)를 점별로 덮는다고 가정합시다. 그러면 $a<x<y<b$이고 $|x-y|<\epsilon$일 때마다 $q_i<x<r_i$이고 $q_i<y<r_i$인 i가 단지 존재하도록 하는 $\epsilon:\mathbb{Q}_+$가 존재합니다. 이러한 ϵ을 주어진 덮개의 **르베그 수** 라고 합니다.

연습문제 11.13. 중간값 정리의 다음 근사 버전을 증명하십시오.

> $f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 균등 연속이고 $f(0)<0<f(1)$이면, 모든 $\epsilon:\mathbb{Q}_+$에 대해 $|f(x)|<\epsilon$인 $x:[0,1]$가 단지 존재합니다.

힌트: 이분법은 선택 공리로 이어지므로 사용하려 하지 마십시오. 대신 f를 조각별 선형 사상으로 근사하십시오. 조각별 선형 사상은 어떻게 구성합니까?

연습문제 11.14. §11.6의 고차 귀납-귀납적 초현실수를 사용하여 [Knu74]의 모든 내용을 해낼 수 있는지 확인하십시오.

연습문제 11.15. 398 쪽에서 정의한 함수 $\iota_{\mathbb{R}_d} : \mathbb{R}_d \to \mathsf{No}$를 상기하십시오.

(i) $\iota_{\mathbb{R}_d}$가 단사임을 보이십시오.
(ii) $\iota_{\mathbb{R}_d}$를 확장 실수(연습문제 11.2)와 구간 정의역(연습문제 11.4)으로 확장하는 자명한 방법이 있습니다. 이 확장들은 단사입니까?

연습문제 11.16. 399 쪽에서 정의한 함수 $\iota_{\mathsf{Ord}} : \mathsf{Ord} \to \mathsf{No}$가 단사일 필요충분조건은 LEM 이 성립하는 것임을 보이십시오.

연습문제 11.17. No 의 정의를 모방하되 왼쪽 옵션만 사용하여, 이항 관계 $\leq$와 $<$를 갖춘 타입 POrd를 정의하십시오.

(i) 사상 $j : \mathsf{POrd} \to \mathsf{No}$를 구성하고 그것이 매장임을 보이십시오.
(ii) POrd가 관계 $<$에 대해 (Ord 와 마찬가지로 한 단계 높은 유니버스에서) 순서수임을 보이십시오.
(iii) 명제적 크기 재조정을 가정하고, POrd가 다음 부분집합과 동치임을 보이십시오.

$$\{\, A : \mathsf{Ord} \mid \mathsf{isPlump}(A) \,\}$$

즉 연습문제 10.14에서 본 Ord 의 부분집합과 동치임을 보이십시오. 이로부터 $\iota_{\mathsf{Ord}} : \mathsf{Ord} \to \mathsf{No}$를 플럼프 순서수로 제한하면 단사라는 결론을 내리십시오.

명제적 크기 재조정이 없더라도, POrd의 원소(또는 No 에서의 그 상)를 여전히 **풍만 순서수**라고 부를 수 있습니다.

연습문제 11.18. 초현실수가 오른쪽 선택지가 없는 절단 $\{\, x^L \mid \,\}$와 같을 때(단, 그 왼쪽 옵션들은 그 자체로 오른쪽 선택지를 가질 수 있습니다) 그 초현실수를 **의사 순서수**라고 정의하십시오. "모든 의사 순서수는 풍만 순서수이다"라는 명제가 LEM 과 동치임을 보이십시오.

연습문제 11.19. 정리 11.6.7와 예 11.6.18에서는 모두 함수 $\mathsf{No} \to \mathsf{No} \to B$를 정의할 때 비슷한 패턴을 사용한다는 점에 주목하십시오. 먼저 순서를 보존하는 함수 $\mathsf{No} \to B$들의 집합을 공역으로 하는 바깥쪽 No-재귀를 수행하고, 이어서 족 $A : \mathsf{No} \to \mathcal{U}$으로의 안쪽 No-귀납법을 수행합니다. 여기서 $A(y)$는 부등식 $x^L < x$와 $x < x^R$도 보존되도록 보장하는 B의 부분집합입니다. 이러한 증명들을 일반화하는 "이중 No-재귀"의 일반 원리를 정식화하고 증명하십시오.

부록

부록

형식적 타입 이론

체르멜로–프렝켈 집합론의 공리를 명시적으로 사용하지 않고도 집합론에서 수학을 전개할 수 있는 것처럼, 이 책에서는 호모토피 타입 이론의 형식 체계를 명시적으로 언급하지 않고 유니밸런트 기초 위에서 수학을 전개했습니다. 그럼에도 불구하고, 예를 들어 다음과 같은 일을 하려면 형식 체계로서의 호모토피 타입 이론을 정확하게 기술한 내용을 갖추는 것이 중요합니다.

- 논리적 무모순성을 비롯한 메타이론적 성질을 서술하고 증명하는 일,
- 예를 들어 단체 집합, 모형 범주, 고차 토포스 등에서 모형을 구성하는 일, 그리고
- Coq 나 Agda 같은 증명 보조기에 이를 구현하는 일.

호모토피 타입 이론의 논리적 무모순성, 즉 빈 문맥에서 항 $a : \mathbf{0}$가 존재하지 않는다는 사실조차 자명하지 않습니다. 만약 $\mathbf{0} \simeq \mathbf{1}$가 성립하는 동치의 정의를 잘못 택했다면, $\mathbf{1}$에 원소가 있으므로 유니밸런스에 의해 $\mathbf{0}$에도 원소가 있게 됩니다. 또한 예를 들어 $\mathbb{S}^1$을 고차 귀납적 타입으로 정의한 것이 보통의 원처럼 작동하는 타입을 산출한다는 사실도 자명하지 않습니다.

이러한 질문을 다루기 전에 확정해 두어야 할 타입 이론의 측면이 두 가지 있습니다. 서론에서 타입 이론은 판단 $a : A$와 $a \equiv a' : A$가 언제 성립하는지를 규정하는 규칙들의 집합으로 이루어진다고 했던 것을 떠올리십시오 — 예를 들어 곱은 $a : A$이고 $b : B$일 때마다 $(a, b) : A \times B$라는 규칙으로 특징지어집니다. 이를 엄밀하게 하려면 먼저 항의 구문 — 즉 이러한 판단들이 관계 짓는 대상 $a, a', A, \ldots$를 정확히 정의해야 하고, 그다음으로 판단과 그 추론 규칙 — 즉 다른 판단들로부터 판단을 도출할 수 있는 방식을 정확히 정의해야 합니다.

이 부록에서는 Martin-Löf 타입 이론과, 호모토피 타입 이론을 이루는 확장들에 대한 두 가지 정식화를 제시합니다. 첫 번째 제시(§A.1)는 항의 구문과 판단의 형태를 타입 없는 λ-계산의 확장으로 기술하며, 추론 규칙은 비형식적으로 남겨 둡니다. 두 번째 제시(§A.2)는 많은 타입 이론 문헌에서 관례적으로 그러하듯이, 항, 판단, 추론 규칙을 자연 연역 방식으로 귀납적으로 정의합니다.

예비 사항

제1장에서는 타입 이론의 두 가지 기본 **판단** 을 제시했습니다. 첫 번째 판단인 $a : A$는 항 a가 타입 A를 가진다고 주장합니다. 두 번째 판단인 $a \equiv b : A$는 두 항 a와 b가 타입 A에서 **판단적으로 같음** 을 진술합니다. 이러한 판단들은 §A.2에서 기술하는 추론 규칙들의 집합에 의해 귀납적으로 정의됩니다.

타입 A의 원소 a를 구성한다는 것은 $a : A$를 도출한다는 것입니다. 이 책에서는 a의 구성을 기술하는 비형식적 논증을 제시하지만, 형식적으로는 정확한 항 a와 $a : A$의 완전한 도출을 명시해야 합니다.

그러나 이 책 본문과 이 부록에서 타입 이론을 제시하는 방식의 주된 차이는, 여기서는 판단을 다음과 같은 형태의 주변 **문맥** , 즉 가정들의 목록 안에서 명시적으로 정식화한다는 점입니다.

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n.$$

문맥의 원소 $x_i : A_i$는 변수 x_i가 타입 A_i를 가진다는 가정을 나타냅니다. 문맥에 나타나는 변수 $x_1, \dots, x_n$은 서로 달라야 합니다. 문맥은 문자 Γ와 Δ로 줄여 씁니다.

문맥 Γ에서의 판단 $a : A$는 다음과 같이 씁니다.

$$\Gamma \vdash a : A$$

이는 Γ에 나열된 가정들 아래에서 $a : A$임을 뜻합니다. 가정들의 목록이 비어 있을 때에는 간단히 다음과 같이 씁니다.

$$\vdash a : A$$

또는

$$\cdot \vdash a : A$$

여기서 $\cdot$는 빈 문맥을 나타냅니다. 등식 판단에도 똑같이 적용됩니다.

$$\Gamma \vdash a \equiv b : A$$

그러나 이러한 판단은 **올바르게 형성된** 문맥 에 대해서만 의미가 있으며, 이 개념은 세 번째이자 마지막인 다음 판단으로 포착됩니다.

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n)\ \mathsf{ctx}$$

이 판단은 각 A_i가 문맥 $x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{i-1} : A_{i-1}$에서 타입임을 표현합니다. 따라서 특히 $\Gamma \vdash a : A$이고 $\Gamma\ \mathsf{ctx}$이면, 각 A_i는 변수 $x_1, \dots, x_{i-1}$만을 포함하고 a와 A는 변수 $x_1, \dots, x_n$만을 포함한다는 것을 알 수 있습니다.

비형식적인 수학적 서술에서는 문맥이 암묵적입니다. 증명의 각 지점에서 수학자는 어떤 변수들을 사용할 수 있고 그 변수들이 어떤 타입을 가지는지 알고 있는데, 이는 역사적 관례(n은 보통 수이고, f는 함수인 등) 때문이거나, "x를 실수라고 합시다"와 같은 문장으로 변수가 명시적으로 도입되기 때문입니다. 명시적 문맥을 사용할 때의 몇 가지 이점은 §§A.2.4 및 A.2.5에서 논의합니다.

항 B 안에 있는 변수 x의 자유 출현에 항 a를 대입하는 **치환** 을 $B[a/x]$로 씁니다. 이때 §1.2에서 논의한 것처럼 포획을 피하도록 속박 변수의 이름을 바꿀 수 있습니다. 치환의 일반적인 형태는

$$B[a_1, \dots, a_n / x_1, \dots, x_n]$$

이는 표현식 $a_1, \dots, a_n$을 변수 $x_1, \dots, x_n$에 동시에 대입합니다.

표현식 B에서 변수 x를 속박한다 는 것은 이 둘을 **추상화** 라고 불리는 더 큰 표현식에 편입시킨다는 뜻이며, 그 목적은 x가 B에 "국소적"이라는 사실, 즉 다른 곳에 나타나는 x의 다른 출현과 혼동되어서는 안 된다는 사실을 표현하는 것입니다. 속박 변수는 프로그래머에게는 익숙하지만 수학자에게는 그만큼 익숙하지 않습니다. 속박에는 상황에 따라 $x \mapsto B$, $\lambda x.B$, $x\,.B$와 같은 다양한 표기법이

사용됩니다. 추상화된 표현식의 변수에 항 a를 대입하는 것을 $C[a]$로 쓸 수 있습니다. 즉, $(x.B)[a]$를 $B[a/x]$로 정의할 수 있습니다. §1.2에서 논의한 바와 같이, 표현식 안의 모든 곳에서 속박 변수의 이름을 바꾸어도("α-변환") 표현식은 달라지지 않습니다. 따라서 아주 엄밀히 말하면, 표현식은 속박 변수의 이름만 다른 구문적 형태들의 동치류입니다.

또한 다음 판단의 각 변수 x_i가

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n \vdash a : A$$

자신의 **유효 범위** 안에 묶여 있다고 볼 수도 있습니다. 이 유효 범위는 식 $A_{i+1}, \ldots, A_n$, a, A로 이루어집니다.

A.1 첫 번째 제시 방식

우리 타입 이론의 대상과 타입은 다음 구문을 사용하여 항으로 쓸 수 있습니다. 이 구문은 변수 $x, x', \ldots$, 원시 상수 $c, c', \ldots$, 정의된 상수 $f, f', \ldots$, 그리고 다음 항 형성 연산을 갖춘 λ-계산의 확장입니다

$$t ::= x \mid \lambda x.\, t \mid t(t') \mid c \mid f$$

여기서 사용한 표기법은 항 t가 변수 x이거나, x가 변수이고 t가 항일 때 $\lambda x.\, t$ 형태이거나, t와 t'이 항일 때 $t(t')$ 형태이거나, 원시 상수 c이거나, 정의된 상수 f임을 의미합니다. 구문 표지 'λ', '(', ')', '.'는 사람이 쉽게 읽도록 돕는 구두점입니다.

반복 적용 $t(t_1)(t_2)\ldots(t_n)$의 약어로 $t(t_1, \ldots, t_n)$을 사용합니다. 또한 $\star$가 원시 상수이거나 정의된 상수일 때 $\star(t_1, t_2)$ 대신 $t_1 \star t_2$라고 쓰는 중위 표기법을 사용할 수도 있습니다.

각 정의된 상수는 0개 이상의 **정의 등식**을 가집니다. 정의된 상수에는 두 종류가 있습니다. 명시적 정의된 상수 f는 다음과 같은 단 하나의 정의 등식을 가집니다

$$f(x_1, \ldots, x_n) :\equiv t,$$

여기서 t는 f를 포함하지 않습니다. 예를 들어, 다음 정의 등식을 갖는 명시적 정의된 상수 $\circ$를 도입하고

$$\circ(x, y)(z) :\equiv x(y(z)),$$

$\circ(x, y)$ 대신 중위 표기법 $x \circ y$를 사용할 수 있습니다. 물론 이것은 함수의 합성일 뿐입니다.

두 번째 종류의 정의된 상수는 (매개변수화된) 사상 $f(x_1, \ldots, x_n, x)$를 지정하는 데 사용됩니다. 여기서 x는 0개 이상의 원시 상수로 원소가 생성되는 타입을 범위로 합니다. 그러한 각 원시 상수 c에 대해 다음 형태의 정의 등식이 있습니다

$$f(x_1, \ldots, x_n, c(y_1, \ldots, y_m)) :\equiv t,$$

여기서 f는 t 안에 나타날 수 있지만, 그 등식들이 전역적으로 정의된 함수를 결정한다는 것이 분명한 방식으로만 나타날 수 있습니다. 이렇게 정의된 함수의 전형적인 예는 자연수에 대한 원시 재귀로 정의된 함수입니다. 이런 종류의 함수 정의를 전역 재귀적 정의라고 부를 수 있습니다. 컴퓨터 과학과 논리학에서는 재귀적 데이터 타입 위의 함수를 이렇게 정의하는 것을 **구조적 재귀에 의한 정의**라고 불러 왔습니다.

변환 가능성 항 t와 t' 사이의 $t \downarrow t'$는 다음에 의해 생성되는 동치 관계입니다: 상수에 대한 정의 등식, 계산 규칙

$$(\lambda x.\, t)(u) :\equiv t[u/x],$$

그리고 이 관계를 적용과 λ-추상화에 대한 합동이 되게 하는 다음 규칙들로 생성되는 동치 관계입니다:

- $t \downarrow t'$이고 $s \downarrow s'$이면 $t(s) \downarrow t'(s')$이며,
- $t \downarrow t'$이면 $(\lambda x.\, t) \downarrow (\lambda x.\, t')$입니다.

그러면 등식 판단 $t \equiv u : A$는 다음의 단일 규칙으로 유도됩니다:

- $t : A$, $u : A$이고 $t \downarrow u$이면 $t \equiv u : A$입니다.

판단적 등식은 동치 관계입니다.

이 제시 방식의 타입 이론은 함수에 대한 판단적 유일성 원리 $f \equiv (\lambda x.\, f(x))$를 포함하지 않는다는 점에서 본문에서 사용하는 타입 이론과 다르다는 점에 유의하십시오. 이러한 등식은 f가 함수임이 알려져 있을 때에만 의미가 있으므로, 이 등식이 성립하려면 판단적 등식이 관련된 항의 타입에 따라 달라져야 합니다. 반면 이 제시 방식에서 변환 가능성 관계는 타입과 무관합니다. §A.2의 두 번째 제시 방식은 유일성 원리를 포함합니다.

A.1.1 타입 유니버스

다음 원시 상수들로 표기되는 **유니버스**의 위계를 가정합니다

$$\mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_2, \quad \ldots$$

유니버스에 대한 처음 두 규칙은 유니버스들이 타입의 누적 위계를 이룬다는 것을 말합니다:

- $m < n$일 때 $\mathcal{U}_m : \mathcal{U}_n$이고,
- $A : \mathcal{U}_m$이고 $m \leq n$이면 $A : \mathcal{U}_n$이며,

세 번째 규칙은 유니버스의 대상이 타입으로 쓰일 수 있고 판단에서 콜론 오른쪽에 놓일 수 있다는 생각을 나타냅니다:

- $\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_n$이고 x가 새로운 변수이면,[1] $\vdash (\Gamma, x : A)\ \mathsf{ctx}$입니다.

이 책의 본문에서는 타입 A와 B 사이의 등식 판단 $A \equiv B : \mathcal{U}_n$을 보통 $A \equiv B$로 줄여 씁니다. 이는 전형적 모호성의 한 사례입니다. 언제든지 더 큰 유니버스로 옮겨 갈 수 있지만, 그렇게 해도 판단의 타당성에는 영향이 없기 때문입니다.

다음 변환 규칙을 사용하면 타입 판단에서 타입을 그와 같은 타입으로 바꿀 수 있습니다:

- $a : A$이고 $A \equiv B$이면 $a : B$입니다.

A.1.2 의존 함수 타입(Π-타입)

원시 상수 c_Π를 도입하되, $c_\Pi(A, \lambda x.\, B)$는 $\prod_{(x:A)} B$로 씁니다. 이러한 표현식과 $\lambda x.\, b$ 꼴의 표현식에 관한 판단은 다음 규칙으로 도입됩니다:

- $\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_n$이고 $\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_n$이면 $\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B : \mathcal{U}_n$입니다.
- $\Gamma, x : A \vdash b : B$이면 $\Gamma \vdash (\lambda x.\, b) : (\prod_{(x:A)} B)$입니다.
- $\Gamma \vdash g : \prod_{(x:A)} B$이고 $\Gamma \vdash t : A$이면 $\Gamma \vdash g(t) : B[t/x]$입니다.

[1] "새로운"이란 Γ나 A에 나타나지 않는다는 뜻입니다.

x가 B에 자유롭게 나타나지 않으면 $\prod_{(x:A)} B$를 비의존 함수 타입 $A \to B$로 줄여 쓰고, 다음 규칙을 유도합니다:

- $\Gamma \vdash g : A \to B$이고 $\Gamma \vdash t : A$이면 $\Gamma \vdash g(t) : B$입니다.

비의존 함수 타입을 사용하고 문맥 Γ를 암묵적으로 두면, 위의 규칙들을 부록의 이 절 나머지 부분에서 사용하는 다음과 같은 다른 형식으로 쓸 수 있습니다:

- $A : \mathcal{U}_n$이고 $B : A \to \mathcal{U}_n$이면 $\prod_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}_n$입니다.
- $x : A \vdash b : B(x)$이면 $\lambda x.\, b : \prod_{(x:A)} B(x)$입니다.
- $g : \prod_{(x:A)} B(x)$이고 $t : A$이면 $g(t) : B(t)$입니다.

A.1.3 의존 쌍 타입(Σ-타입)

원시 상수 c_Σ와 c_{pair}를 도입합니다. $c_\Sigma(A, \lambda a.\, B)$ 꼴의 표현식은 $\sum_{(a:A)} B$로 쓰고, $c_{\mathsf{pair}}(a, b)$ 꼴의 표현식은 (a, b)로 씁니다. x가 B에서 자유 변수가 아니면 $\sum_{(x:A)} B$ 대신 $A \times B$로 씁니다.

이러한 표현식에 관한 판단은 다음 규칙으로 도입됩니다:

- $A : \mathcal{U}_n$이고 $B : A \to \mathcal{U}_n$이면 $\sum_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}_n$입니다.
- 여기에 더해 $a : A$이고 $b : B(a)$이면 $(a, b) : \sum_{(x:A)} B(x)$입니다.

위와 같은 A와 B, 그리고 $C : (\sum_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U}_m$이 있고,

$$d : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} C((x, y))$$

정의된 상수를 도입할 수 있습니다.

$$f : \prod_{(p:\sum_{(x:A)} B(x))} C(p)$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$f((x, y)) :\equiv d(x, y).$$

C, d, x, y가 비어 있지 않은 어떤 문맥에서 얻어졌다면 추가적인 암묵적 매개변수 $x_1, \ldots, x_n$을 포함할 수 있다는 점에 유의하십시오. 따라서 완전히 명시적인 재귀 스키마는 다음과 같습니다.

$$f(x_1, \ldots, x_n, (x(x_1, \ldots, x_n), y(x_1, \ldots, x_n))) :\equiv d(x_1, \ldots, x_n, (x(x_1, \ldots, x_n), y(x_1, \ldots, x_n))).$$

A.1.4 쌍대곱 타입

원시 상수 c_+, c_{inl}, c_{inr}을 도입합니다. $c_+(A, B)$ 대신 $A + B$로, $c_{\mathsf{inl}}(a)$ 대신 $\mathsf{inl}(a)$로, $c_{\mathsf{inr}}(a)$ 대신 $\mathsf{inr}(a)$로 씁니다:

- $A, B : \mathcal{U}_n$이면 $A + B : \mathcal{U}_n$입니다.
- 또한 $\mathsf{inl} : A \to A + B$이고 $\mathsf{inr} : B \to A + B$입니다.

위와 같은 A와 B, 그리고 $C : A + B \to \mathcal{U}_m$, $d : \prod_{(x:A)} C(\mathsf{inl}(x))$, $e : \prod_{(y:B)} C(\mathsf{inr}(y))$가 주어지면, 다음 정의 등식을 갖는 정의된 상수 $f : \prod_{(z:A+B)} C(z)$를 도입할 수 있습니다

$$f(\mathsf{inl}(x)) :\equiv d(x) \qquad \text{그리고} \qquad f(\mathsf{inr}(y)) :\equiv e(y).$$

A.1.5 유한 타입

다음 규칙을 만족하는 원시 상수 $\star$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$을 도입합니다:

- $\mathbf{0} : \mathcal{U}_0$, $\mathbf{1} : \mathcal{U}_0$
- $\star : \mathbf{1}$

$C : \mathbf{0} \to \mathcal{U}_n$이 주어지면 정의 등식이 없는 정의된 상수 $f : \prod_{(x:\mathbf{0})} C(x)$를 도입할 수 있습니다.

$C : \mathbf{1} \to \mathcal{U}_n$과 $d : C(\star)$가 주어지면 정의 등식 $f(\star) :\equiv d$를 갖는 정의된 상수 $f : \prod_{(x:\mathbf{1})} C(x)$를 도입할 수 있습니다.

A.1.6 자연수

자연수 타입은 다음 규칙을 따르는 원시 상수 $\mathbb{N}$, 0, succ을 도입하여 얻습니다:

- $\mathbb{N} : \mathcal{U}_0$,
- $0 : \mathbb{N}$,
- $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

또한 원시 재귀로 함수를 정의할 수 있습니다. $C : \mathbb{N} \to \mathcal{U}_k$가 있으면, 다음이 있을 때마다 정의된 상수 $f : \prod_{(x:\mathbb{N})} C(x)$를 도입할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} &d : C(0) \\ &e : \textstyle\prod_{(x:\mathbb{N})} (C(x) \to C(\mathsf{succ}(x))) \end{aligned}$$

다음 정의 등식들과 함께

$$f(0) :\equiv d \qquad \text{그리고} \qquad f(\mathsf{succ}(x)) :\equiv e(x, f(x)).$$

A.1.7 W-타입

W-타입을 위해 원시 상수 c_{W}과 c_{sup}을 도입합니다. $c_{\mathsf{W}}(A, \lambda x.\, B)$ 꼴의 표현식은 $\mathsf{W}_{(x:A)} B$로 쓰고, $c_{\mathsf{sup}}(x, u)$ 꼴의 표현식은 $\mathsf{sup}(x, u)$로 씁니다:

- $A : \mathcal{U}_n$이고 $B : A \to \mathcal{U}_n$이면 $\mathsf{W}_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}_n$입니다.
- 나아가 $a : A$이고 $u : B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)} B(x)$이면 $\mathsf{sup}(a, u) : \mathsf{W}_{(x:A)} B(x)$입니다.

여기서도 전체 재귀로 함수를 정의할 수 있습니다. 위와 같은 A와 B, 그리고 $C : (\mathsf{W}_{(x:A)} B(x)) \to \mathcal{U}_m$이 있으면, 다음이 있을 때마다 정의된 상수 $f : \prod_{(z:\mathsf{W}_{(x:A)} B(x))} C(z)$를 도입할 수 있습니다.

$$d : \textstyle\prod_{(a:A)} \prod_{(u:B(a) \to \mathsf{W}_{(x:A)} B(x))} ((\prod_{(y:B(a))} C(u(y))) \to C(\mathsf{sup}(a, u)))$$

이때 정의 등식은 다음과 같습니다.

$$f(\mathsf{sup}(a, u)) :\equiv d(a, u, f \circ u).$$

A.1.8 동일성 타입

원시 상수 $c_=$과 c_{refl}을 도입합니다. $a : A$임이 문맥상 분명할 때 $c_=(A, a, b)$를 $a =_A b$로, $c_{\mathsf{refl}}(A, a)$를 refl_a로 씁니다:

- $A : \mathcal{U}_n$, $a : A$, $b : A$이면 $a =_A b : \mathcal{U}_n$입니다.
- $a : A$이면 $\mathsf{refl}_a : a =_A a$입니다.

$a : A$가 주어졌을 때, $y : A, z : a =_A y \vdash C : \mathcal{U}_m$이고 $\vdash d : C[a, \mathsf{refl}_a/y, z]$이면 다음과 같은 정의된 상수를 도입할 수 있습니다.

$$f : \prod_{(y:A)} \prod_{(z:a=_A y)} C$$

정의 등식은 다음과 같습니다.

$$f(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv d.$$

A.2 두 번째 제시 방식

이 절에는 세 종류의 판단이 있습니다.

$$\Gamma \ \mathsf{ctx} \qquad\qquad \Gamma \vdash a : A \qquad\qquad \Gamma \vdash a \equiv a' : A$$

이 판단들은 이를 유도하는 추론 규칙을 제시함으로써 규정합니다. 전형적인 **추론 규칙**은 다음 꼴을 가집니다.

$$\frac{\mathcal{J}_1 \qquad \cdots \qquad \mathcal{J}_k}{\mathcal{J}}\ \text{이름}$$

이 규칙은 **가설** $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_k$를 이미 유도했다면 **결론** $\mathcal{J}$를 유도할 수 있다는 뜻입니다. (이들은 타입이 아니라 판단이므로, §1.1에서 말하는 의미로 타입 이론에 내부적인 가설이 아니라는 점에 유의하십시오. 이들은 오히려 연역 체계, 즉 메타이론의 가설입니다.) 오른쪽에는 규칙의 이름을 적으며, 규칙을 적용하기 전에 확인해야 하는 부가 조건이 추가로 있을 수 있습니다.

판단의 **유도**는 이러한 추론 규칙들로 구성된 트리로, 트리의 뿌리에 그 판단이 놓입니다. 예를 들어, 아래에 주어진 규칙들을 사용하면 다음은 $\cdot \vdash \lambda x.\, x : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$의 유도입니다.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\cdot\ \mathsf{ctx}}\ \mathsf{ctx\text{-}emp}}{\vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_0}\ \mathbf{1}\text{-form}}{x{:}\mathbf{1}\ \mathsf{ctx}}\ \mathsf{ctx\text{-}ext}}{x{:}\mathbf{1} \vdash x : \mathbf{1}}\ \mathsf{Vble}}{\cdot \vdash \lambda x.\, x : \mathbf{1} \to \mathbf{1}}\ \Pi\text{-intro}$$

A.2.1 문맥

문맥은 다음과 같은 목록입니다.

$$x_1{:}A_1, x_2{:}A_2, \ldots, x_n{:}A_n$$

이는 서로 다른 변수 $x_1, \ldots, x_n$이 각각 타입 $A_1, \ldots, A_n$을 가진다고 가정함을 나타냅니다. 이 목록은 비어 있을 수도 있습니다. 문맥은 문자 Γ와 Δ로 줄여 쓰며, 이들을 나란히 놓아 더 큰 문맥을 만들 수 있습니다.

판단 $\Gamma\ \mathsf{ctx}$는 Γ가 잘 형성된 문맥이라는 사실을 형식적으로 표현하며, 다음 추론 규칙들을 따릅니다.

$$\frac{}{\cdot\ \mathsf{ctx}}\ \textsf{ctx-emp} \qquad\qquad \frac{x_1{:}A_1, \ldots, x_{n-1}{:}A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1{:}A_1, \ldots, x_n{:}A_n)\ \mathsf{ctx}}\ \textsf{ctx-ext}$$

단, 두 번째 규칙에는 부가 조건이 있습니다. 변수 x_n은 변수 $x_1, \ldots, x_{n-1}$과 달라야 합니다. ctx-ext의 가설과 결론은 서로 다른 꼴의 판단이라는 점에 유의하십시오. 가설은 변수 $x_1, \ldots, x_{n-1}$의 문맥에서 표현식 A_n이 타입 $\mathcal{U}_i$를 가진다고 말하는 반면, 결론은 확장된 문맥 $(x_1{:}A_1, \ldots, x_n{:}A_n)$이 잘 형성되어 있다고 말합니다.

$\Gamma \vdash a : A$ 또는 $\Gamma \vdash a \equiv a' : A$ 꼴의 판단이 유도 가능하면 문맥 Γ가 잘 형성되어 있다는 판단 $\Gamma\ \mathsf{ctx}$ 역시 유도 가능하다는 것은 이 체계의 메타이론적 성질입니다. 모든 규칙의 전제는 이 성질을 증명할 수 있을 만큼만 잘 형성됨에 관한 가설을 포함하도록 선택되었으며, 그 이상은 포함하지 않습니다. 예를 들어, ctx-ext는 $(x_1{:}A_1, \ldots, x_{n-1}{:}A_{n-1})$이 잘 형성되어 있음을 가설로 둘 필요가 없습니다. 이는 그 전제의 유도 가능성으로부터 따라 나오기 때문입니다. 하지만 다음 절의 Vble 규칙은 그 문맥이 잘 형성되어 있음을 가설로 두어야 합니다. 이러한 선택은 타입 이론을 정밀하게 정식화하는 여러 가능한 방법 중 하나일 뿐이며, 이러한 문제에 대한 자세한 탐구는 이 부록의 범위를 벗어납니다.

A.2.2 구조 규칙

문맥이 가정을 담고 있다는 사실은 문맥에 나열된 타입 판단들을 유도할 수 있다고 말하는 다음 규칙으로 표현됩니다.

$$\frac{(x_1{:}A_1, \ldots, x_n{:}A_n)\ \mathsf{ctx}}{x_1{:}A_1, \ldots, x_n{:}A_n \vdash x_i : A_i}\ \textsf{Vble}$$

ctx-ext와 마찬가지로 규칙 Vble의 가설과 결론은 서로 다른 꼴의 판단이지만, 이번에는 그 방향이 반대입니다. 잘 형성된 문맥에서 출발하여 타입 판단을 유도합니다.

치환 및 **약화** 라고 불리는 다음의 중요한 원리들은 명시적으로 가정할 필요가 없습니다. 오히려 가능한 모든 유도의 구조에 대한 귀납으로, 이 규칙들의 가정이 유도 가능할 때마다 그 결론도 유도 가능하다는 것을 보일 수 있습니다.[2] 타입 판단에 대해서는 이 원리들이 다음과 같이 나타납니다

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma, x{:}A, \Delta \vdash b : B}{\Gamma, \Delta[a/x] \vdash b[a/x] : B[a/x]}\ \textsf{Subst}_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, \Delta \vdash b : B}{\Gamma, x{:}A, \Delta \vdash b : B}\ \textsf{Wkg}_1$$

그리고 판단적 등식에 대해서는 다음과 같이 됩니다.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma, x{:}A, \Delta \vdash b \equiv c : B}{\Gamma, \Delta[a/x] \vdash b[a/x] \equiv c[a/x] : B[a/x]}\ \textsf{Subst}_2 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \qquad \Gamma, x{:}A, \Delta \vdash c : C}{\Gamma, \Delta[a/x] \vdash c[a/x] \equiv c[b/x] : C[a/x]}\ \textsf{Subst}_3$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, \Delta \vdash b \equiv c : B}{\Gamma, x{:}A, \Delta \vdash b \equiv c : B}\ \textsf{Wkg}_2$$

[2] 이러한 규칙을 **허용 가능**하다고 합니다.

각 타입 형성자에 대해 주어진 판단적 등식 규칙에 더하여, 판단적 등식이 타입 부여와 양립하는 동치 관계라고도 가정합니다.

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \qquad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \qquad \Gamma \vdash A \equiv B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}$$

마지막으로, 판단적 등식이 타입 부여와 양립하는 합동 관계라고 가정합니다. 즉, 각 타입 형성자와 항 형성자가 각 인자에서 판단적 등식을 보존한다고 가정합니다. 예를 들어, Π-intro 규칙과 함께 다음 규칙을 가정합니다.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash b \equiv b' : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, b \equiv \lambda x.\, b' : \prod_{(x:A)} B}\ \Pi\text{-intro-eq}$$

의존 함수 타입의 경우를 완성하기 위해 이와 비슷한 두 규칙 Π-form-eq 및 Π-elim-eq를 가정합니다. 이러한 (모든 타입에서의) 국소적 원리들을 종합하면 위의 전역적 합동 원리 Subst_2와 Subst_3이 함의됩니다. 간결함을 위해 이러한 국소적 규칙들은 생략합니다.

A.2.3 타입 유니버스

타입 유니버스의 무한 위계를 공준으로 가정합니다

$$\mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_2, \quad \ldots$$

각 유니버스는 다음 유니버스에 포함되며, $\mathcal{U}_i$에 속하는 모든 타입은 $\mathcal{U}_{i+1}$에도 속합니다:

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}\ \mathcal{U}\text{-cumul}$$

우리는 어떤 i에 대해 $\Gamma \vdash a : A$가 $\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i$를 함의하도록 타입 이론의 규칙 집합을 구성하겠습니다. 다시 말해, A가 타입의 역할을 한다면 A는 어떤 유니버스에 속합니다. 우리 타입 체계의 또 다른 성질은 $\Gamma \vdash a \equiv b : A$가 $\Gamma \vdash a : A$와 $\Gamma \vdash b : A$를 함의한다는 것입니다.

A.2.4 의존 함수 타입(Π-타입)

§1.2에서는 타입족을 함수 $\lambda(x:A).\, B : A \to \mathcal{U}_i$로 정의하기 위해 비의존 함수 $A \to B$를 도입했으며, 이로부터 의존 함수의 타입 $\prod_{(x:A)} B$가 생겨납니다. 그러나 문맥을 명시하면 $\lambda(x:A).\, B : A \to \mathcal{U}_i$를 다음 판단으로 대체할 수 있습니다

$$x{:}A \vdash B : \mathcal{U}_i.$$

따라서 비의존 함수를 참조하지 않고 의존 함수를 직접 정의할 수 있습니다. 이렇게 함으로써 우리는 각 타입 형성자가 그 상수 및 규칙과 함께 다른 모든 타입 형성자와 독립적으로 도입되어야 한다는 일반 원칙을 따릅니다. 실제로 이제부터 각 타입 형성자는 다음을 통해 체계적으로 도입됩니다:

- 타입 형성자를 언제 적용할 수 있는지를 명시하는 **형성 규칙**;

- 타입의 원소를 어떻게 만드는지를 명시하는 몇 가지 **도입 규칙**;
- 타입의 원소를 어떻게 사용하는지를 명시하는 **제거 규칙**, 즉 귀납 원리;
- 도입 규칙의 결과에 제거 규칙을 적용하면 어떤 일이 일어나는지를 설명하는 판단적 등식인 **계산 규칙**;
- 선택적으로, 타입의 모든 원소가 그 원소에 적용된 제거 규칙의 결과에 의해 어떻게 유일하게 결정되는지를 설명하는 판단적 등식인 **유일성 원리**.

(주 1.5.1도 참조하십시오.)

의존 함수 타입의 경우 이 규칙들은 다음과 같습니다:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-form} \qquad \frac{\Gamma, x{:}A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda(x:A).\, b : \prod_{(x:A)} B}\ \Pi\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-elim} \qquad \frac{\Gamma, x{:}A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda(x:A).\, b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \Pi\text{-comp}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B}{\Gamma \vdash f \equiv (\lambda x.\, f(x)) : \prod_{(x:A)} B}\ \Pi\text{-uniq}$$

표현식 $\lambda(x:A).\, b$는 b 안에서 x의 자유 출현을 속박하며, $\prod_{(x:A)} B$도 B에 대해 마찬가지입니다.

x가 B 안에서 자유롭게 출현하지 않아 B가 A에 의존하지 않을 때, 특수한 경우로 일반 함수 타입 $A \to B :\equiv \prod_{(x:A)} B$를 얻습니다. 우리는 이것을 $\to$의 정의로 삼습니다.

생략된 타입 A는 타입 검사 전에 적절히 채워져야 한다는 전제 아래, 표현식 $\lambda(x:A).\, b$를 $\lambda x.\, b$로 줄여 쓸 수 있습니다.

A.2.5 의존 쌍 타입(Σ-타입)

§1.6에서는 $\sum$의 도입 규칙과 제거 규칙을 정의하기 위해 $\to$ 타입과 $\prod$ 타입이 필요했습니다. $\prod$의 경우와 마찬가지로, 문맥을 사용하면 $\sum$의 규칙을 독립적으로 서술할 수 있습니다. Σ와 같은 양의 타입에 대한 제거 규칙은 귀납법이라고 부르며 ind로 표기한다는 점을 상기하십시오.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \sum_{(x:A)} B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-form} \qquad \frac{\Gamma, x{:}A \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : \sum_{(x:A)} B}\ \Sigma\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma, z{:}\sum_{(x:A)} B \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A, y{:}B \vdash g : C[(x,y)/z] \qquad \Gamma \vdash p : \sum_{(x:A)} B}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B}(z.C, x.y.g, p) : C[p/z]}\ \Sigma\text{-elim}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z{:}\sum_{(x:A)} B \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A, y{:}B \vdash g : C[(x,y)/z] \\ \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[a/x]\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B}(z.C, x.y.g, (a,b)) \equiv g[a,b/x,y] : C[(a,b)/z]}\ \Sigma\text{-comp}$$

표현식 $\sum_{(x:A)} B$는 B 안에서 x의 자유 출현을 속박합니다. 또한 $\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B}$에는 Γ에 있는 변수 외의 자유 변수를 갖는 인자가 있으므로, (위의 변수 이름에 따라) C 안에서 z를 속박하고 g 안에서 x와 y를 속박합니다. 이 속박들은 속박 변수의 이름을 나타내기 위해 $z.C$와 $x.y.g$로 표기합니다. 특히 우리는

$\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B}$를 두 인자가 바인더를 포함하는 원시 요소로 취급합니다. 이는 $\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B}$가 함수를 인자로 받는 함수라는 것과 겉보기에는 비슷하지만 다릅니다.

B가 x의 자유 출현을 포함하지 않을 때, 특수한 경우로 데카르트 곱 $A \times B :\equiv \sum_{(x:A)} B$를 얻습니다. 우리는 이것을 데카르트 곱의 정의로 삼습니다.

Σ-타입에 대해 판단적 유일성 원리를 공준으로 둘 수도 있었지만 그렇게 하지 않았다는 점에 주목하십시오. 이에 대응하는 명제적 유일성 원리의 증명은 따름정리 2.7.3를 참조하십시오.

A.2.6 쌍대곱 타입

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i}\ +\text{-form}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{inl}(a) : A + B}\ +\text{-intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathsf{inr}(b) : A + B}\ +\text{-intro}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z{:}(A+B) \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x{:}A \vdash c : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y{:}B \vdash d : C[\mathsf{inr}(y)/z] \\ \Gamma \vdash e : A + B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) : C[e/z]}\ +\text{-elim}$$

$$\frac{\Gamma, z{:}(A+B) \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash c : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y{:}B \vdash d : C[\mathsf{inr}(y)/z] \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathsf{inl}(a)) \equiv c[a/x] : C[\mathsf{inl}(a)/z]}\ +\text{-comp}_1$$

$$\frac{\Gamma, z{:}(A+B) \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x{:}A \vdash c : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y{:}B \vdash d : C[\mathsf{inr}(y)/z] \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathsf{inr}(b)) \equiv d[b/y] : C[\mathsf{inr}(b)/z]}\ +\text{-comp}_2$$

ind_{A+B}에서 z는 C 안에서, x는 c 안에서, y는 d 안에서 속박됩니다.

A.2.7 빈 타입 $\mathbf{0}$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{0}\text{-form} \qquad \frac{\Gamma, x{:}\mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbf{0}}(x.C, a) : C[a/x]}\ \mathbf{0}\text{-elim}$$

$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$에서 x는 C에 속박됩니다. 빈 타입에는 도입 규칙도 계산 규칙도 없습니다.

A.2.8 단위 타입 $\mathbf{1}$

$$\frac{\Gamma \ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i}\ \mathbf{1}\text{-form} \qquad \frac{\Gamma \ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}}\ \mathbf{1}\text{-intro} \qquad \frac{\Gamma, x{:}\mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \qquad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, a) : C[a/x]}\ \mathbf{1}\text{-elim}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(x.C, c, \star) \equiv c : C[\star/x]}\ \mathbf{1}\text{-comp}$$

$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$에서 변수 x는 C에 속박됩니다.

단위 타입에 대해서는 판단적 유일성 원리를 상정하지 않는다는 점에 유의하십시오. 이에 대응하는 명제적 유일성 진술의 증명은 §1.5를 참고하십시오.

A.2.9 자연수 타입

§1.9를 따라 자연수에 대한 규칙을 제시합니다.

$$\frac{\Gamma \ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{N}\text{-form} \qquad \frac{\Gamma \ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathsf{succ}(n) : \mathbb{N}}\ \mathbb{N}\text{-intro}_2$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \qquad \Gamma, x{:}\mathbb{N}, y{:}C \vdash c_s : C[\mathsf{succ}(x)/x] \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n) : C[n/x]}\ \mathbb{N}\text{-elim}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \qquad \Gamma, x{:}\mathbb{N}, y{:}C \vdash c_s : C[\mathsf{succ}(x)/x]}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, 0) \equiv c_0 : C[0/x]}\ \mathbb{N}\text{-comp}_1$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{N} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c_0 : C[0/x] \qquad \Gamma, x{:}\mathbb{N}, y{:}C \vdash c_s : C[\mathsf{succ}(x)/x] \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, \mathsf{succ}(n)) \\ \qquad \equiv c_s[n, \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(x.C, c_0, x.y.c_s, n)/x, y] : C[\mathsf{succ}(n)/x]\end{array}}\ \mathbb{N}\text{-comp}_2$$

$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}$에서 x는 C에 속박되고, x와 y는 c_s에 속박됩니다.

귀납적으로 정의된 다른 타입도 같은 일반적 틀을 따릅니다.

A.2.10 동일성 타입

여기서의 제시 방식은 §1.12에서 다룬 동일성 타입에 대한 (기점 없는) 경로 귀납법 원리에 대응합니다.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i}\ =\text{-form} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{refl}_a : a =_A a}\ =\text{-intro}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x{:}A, y{:}A, p{:}x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, z{:}A \vdash c : C[z, z, \mathsf{refl}_z/x, y, p] \end{array} \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A \qquad \Gamma \vdash p' : a =_A b}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, p') : C[a, b, p'/x, y, p]}\ =\text{-elim}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}A, y{:}A, p{:}x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, z{:}A \vdash c : C[z, z, \mathsf{refl}_z/x, y, p] \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, \mathsf{refl}_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, \mathsf{refl}_a/x, y, p]}\ =\text{-comp}$$

$\mathsf{ind}_{=_A}$에서 x, y, p는 C에 속박되고, z는 c에 속박됩니다.

A.2.11 정의

지금까지 나열한 규칙만으로도 필요한 모든 것을 직접 구성할 수 있지만, 편의상 isequiv와 같은 이름 붙은 상수도 사용할 수 있기를 바랍니다. 비형식적으로는 이러한 상수를 단순히 약어로 생각할 수 있지만, 형식화에서는 상황이 조금 더 미묘합니다.

예를 들어, $f : A \to B$와 $g : B \to C$를 받아 $g \circ f : A \to C$를 내놓는 함수 합성을 생각해 봅시다. 다소 뜻밖에도, 이를 형식적으로 성립시키려면 $\circ$는 f와 g뿐만 아니라 그 타입인 A, B, C도 인자로 받아야 합니다:

$$\circ :\equiv \lambda(A:\mathcal{U}_i).\,\lambda(B:\mathcal{U}_i).\,\lambda(C:\mathcal{U}_i).\,\lambda(g:B\to C).\,\lambda(f:A\to B).\,\lambda(x:A).\,g(f(x)).$$

실용적인 관점에서는 $\circ$를 적용할 때마다 A, B, C를 명시하고 싶지 않습니다. 이들은 대개 주변 정보로부터 꽤 쉽게 추측할 수 있기 때문입니다. 그저 $g \circ f$라고 쓰고 싶습니다. 그렇다면 엄밀히 말해 $g \circ f$는 $\lambda(x:A).\,g(f(x))$의 약어가 아닙니다. 생략하고자 하는 추가적인 **암묵적 인자**가 관여하기 때문입니다.

암묵적 인자의 추론, 전형적 모호성 (§1.3), 기호가 단 한 번만 정의되도록 보장하는 일 등을 통틀어 **정교화**라고 부릅니다. 정교화는 유도를 검사하기 전에 이루어져야 하므로, 보통 핵심 타입 이론의 일부로 제시되지 않습니다. 그러나 정교화를 수행하지 않는 타입 이론 구현을 사용하는 것은 사실상 불가능합니다. 더 자세한 논의는 [Coq12, Nor07]를 참고하십시오.

A.3 호모토피 타입 이론

이 절에서는 호모토피 타입 이론을 표준 Martin-Löf 타입 이론과 구별해 주는 추가 공리들, 즉 함수 외연성, 유니벌런스 공리, 고차 귀납적 타입을 기술합니다. 첫 번째 제시 방식 §A.1를 사용해도 똑같이 잘 되지만, 여기서는 두 번째 제시 방식 §A.2의 양식으로 기술합니다.

A.3.1 함수 외연성과 유니벌런스

새로운 구문이나 판단적 등식을 도입하지 않는 공리(함수 외연성과 유니벌런스가 이러한 형태입니다)를 도입하는 기본적인 방법은 두 가지입니다. 하나는 공리의 원소가 되는 원시 상수를 추가하는 것이고, 다른 하나는 공리의 원소가 되는 변수를 가정하여 그 공리에 의존하는 모든 정리를 증명하는 것입니다(§1.1 참고). 이 두 방법은 본질적으로 동등하지만, 호모토피 타입 이론의 공리들은 핵심 이론의 본질적인 부분이라고 생각하므로 전자의 방법을 택합니다.

공리 2.9.3는 happly가 동치임을 주장하는 상수 funext를 도입하여 형식화됩니다:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B \qquad \Gamma \vdash g : \prod_{(x:A)} B}{\Gamma \vdash \mathsf{funext}(f,g) : \mathsf{isequiv}(\mathsf{happly}_{f,g})}\ \Pi\text{-ext}$$

happly와 isequiv의 정의는 각각 (2.9.2)와 §4.5에서 찾을 수 있습니다.

공리 2.10.3 역시 비슷한 방식으로 형식화됩니다:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \mathsf{univalence}(A,B) : \mathsf{isequiv}(\mathsf{idtoeqv}_{A,B})}\ \mathcal{U}_i\text{-univ}$$

idtoeqv의 정의는 (2.10.2)에서 찾을 수 있습니다.

A.3.2 원

여기서는 기본적인 고차 귀납적 타입의 예를 하나 제시합니다. 다른 고차 귀납적 타입도 세부 사항이 덧붙기는 하지만 같은 일반적인 틀을 따릅니다.

아래 규칙들이 §A.2에 나온 일반적인 귀납적 타입의 패턴을 정확히 따르지는 않는다는 점에 유의하십시오. 이 규칙들은 수송과 사상의 함자성이라는 개념(§2.2)을 참조하며, 두 번째 계산 규칙은 판단적 등식이 아니라 명제적 등식입니다. 이러한 차이점은 §6.2에서 논의합니다.

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{S}^1 : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{S}^1\text{-form} \qquad \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathsf{base} : \mathbb{S}^1}\ \mathbb{S}^1\text{-intro}_1 \qquad \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathsf{loop} : \mathsf{base} =_{\mathbb{S}^1} \mathsf{base}}\ \mathbb{S}^1\text{-intro}_2$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{S}^1 \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash b : C[\mathsf{base}/x] \qquad \Gamma \vdash \ell : b =^{C}_{\mathsf{loop}} b \qquad \Gamma \vdash p : \mathbb{S}^1}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{S}^1}(x.C, b, \ell, p) : C[p/x]}\ \mathbb{S}^1\text{-elim}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{S}^1 \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash b : C[\mathsf{base}/x] \qquad \Gamma \vdash \ell : b =^{C}_{\mathsf{loop}} b}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{S}^1}(x.C, b, \ell, \mathsf{base}) \equiv b : C[\mathsf{base}/x]}\ \mathbb{S}^1\text{-comp}_1$$

$$\frac{\Gamma, x{:}\mathbb{S}^1 \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash b : C[\mathsf{base}/x] \qquad \Gamma \vdash \ell : b =^{C}_{\mathsf{loop}} b}{\Gamma \vdash \mathbb{S}^1\text{-loopcomp} : \mathsf{apd}_{(\lambda y.\, \mathsf{ind}_{\mathbb{S}^1}(x.C,b,\ell,y))}(\mathsf{loop}) = \ell}\ \mathbb{S}^1\text{-comp}_2$$

$\mathsf{ind}_{\mathbb{S}^1}$에서 x는 C 안에 속박됩니다. 의존 경로를 나타내는 표기법 $b =^{C}_{\mathsf{loop}} b$는 §6.2에서 도입했습니다.

A.4 기초 메타이론

이 절에서는 §A.1에서 제시한 타입 이론의 메타이론적 성질을 논의하며, §A.2에 대해서도 비슷한 결과가 성립합니다. 이 절의 끝에서 논의하듯이, §A.3의 기능들을 추가했을 때 이 성질들 중 어느 것이 여전히 성립하는지 알아내려 하면 곧바로 미해결 문제에 이르게 됩니다.

§A.1에서는 타입 이론의 항을 타입 없는 λ-계산의 확장으로 정의했다는 것을 상기하십시오. λ-계산에는 고유한 계산 개념이 있는데, 바로 다음 계산 규칙입니다:

$$(\lambda x.\, t)(u) :\equiv t[u/x].$$

이 규칙은 정의된 상수들의 정의 등식들과 함께 재작성 체계의 축약 단계를 결정하는 재작성 규칙을 이룹니다. 각 규칙에는 자연스러운 방향이 있다는 의미에서 이 단계들은 계산 개념을 제공합니다. 즉, 함수를 그 인자에서 평가함으로써 $(\lambda x.\, t)(u)$를 단순화합니다.

더욱이 이 체계는 합류적입니다. 즉, a가 몇 단계를 거쳐 a'과 a'' 모두로 단순화된다면, a'과 a''이 결국 둘 다 단순화되어 도달하는 어떤 b가 존재합니다. 따라서 $t \downarrow u$를 t와 u가 같은 항으로 단순화된다는 뜻으로 정의할 수 있습니다.

(§A.2에서도 상황은 비슷합니다. 거기서는 계산 규칙을 방향이 없는 등식 $\equiv$로 제시했지만, 제거자를 도입 형식에 적용한 것이 그와 같은 것으로 단순화되며 그 반대 방향으로는 단순화되지 않는다고 함으로써 연산 의미론을 부여할 수 있습니다.)

타입 이론의 표준적인 기법을 사용하면 §A.1의 체계가 다음 성질들을 가진다는 것을 보일 수 있습니다:

정리 A.4.1. $A : \mathcal{U}$이고 $A \downarrow A'$이면 $A' : \mathcal{U}$입니다. $t : A$이고 $t \downarrow t'$이면 $t' : A$입니다.

어떤 항에서 시작하는 재작성 단계의 열 중 어떤 것(각각, 모든 것)이 종료되면, 그 항이 **정규화 가능**하다고 (각각, **강하게 정규화 가능**하다고) 말합니다.

정리 A.4.2. $A : \mathcal{U}$이면 A는 강하게 정규화 가능합니다. $t : A$이면 A와 t는 강하게 정규화 가능합니다.

어떤 항을 더 이상 단순화할 수 없으면 그 항이 **정규형** 이라고 하고, 그 안에 자유롭게 나타나는 변수가 없으면 그 항이 **닫혀 있다** 고 합니다. 닫힌 정규 타입은 원시 타입이어야 합니다. 즉, 어떤 원시 상수 c에 대해 $c(\vec{v})$ 꼴이어야 합니다(여기서 닫힌 정규 항들의 목록 $\vec{v}$는 비어 있으면, 예를 들어 $\mathbb{N}$의 경우처럼 생략할 수 있습니다). 사실 모든 정규형을 명시적으로 기술할 수 있습니다:

보조정리 A.4.3. 정규형인 항은 다음 구문으로 기술할 수 있습니다:

$$v ::= k \mid \lambda x.\, v \mid c(\vec{v}) \mid f(\vec{v}),$$
$$k ::= x \mid k(v) \mid f(\vec{v})(k),$$

여기서 $f(\vec{v})$는 정의된 함수 f의 부분 적용을 나타냅니다. 특히 정규형인 타입은 k 또는 $c(\vec{v})$ 꼴입니다.

정리 A.4.4. A가 정규형이면 판단 $A : \mathcal{U}$는 결정 가능합니다. $A : \mathcal{U}$이고 t가 정규형이면 판단 $t : A$는 결정 가능합니다.

(§A.1의 체계의) 논리적 무모순성은 곧바로 따라 나옵니다. 빈 문맥에서 $a : \mathbf{0}$를 얻었다면, 정리 A.4.1 및 A.4.2에 의해 a는 정규 항 $a' : \mathbf{0}$로 단순화됩니다. 그러나 보조정리 A.4.3에 의해 그러한 항은 존재하지 않습니다.

따름정리 A.4.5. §A.1의 체계는 논리적으로 무모순입니다.

마찬가지로, 빈 문맥에서 $a : \mathbb{N}$이면 a가 어떤 수사 k에 대해 정규 항 $\mathsf{succ}^k(0)$으로 단순화된다는 정준성 성질이 성립합니다.

따름정리 A.4.6. §A.1의 체계는 정준성 성질을 가집니다.

마지막으로, a, A가 정규형이면 $a : A$인지 여부는 결정 가능합니다. 다시 말해, 타입 검사는 증명의 올바름을 검증하는 것과 같으므로, 이는 우리가 언제나 "올바른 증명을 보면 그것을 알아볼 수 있다"는 뜻입니다.

따름정리 A.4.7. §A.1의 체계에서 어떤 것이 증명이라는 성질은 결정 가능합니다.

위 결과는 호모토피 타입 이론의 확장된 체계(즉, 위 체계를 §A.3로 확장한 체계)에는 적용되지 않습니다. 유니밸런스 공리와 고차 귀납적 타입의 생성자가 나타나는 부분은 결코 단순화되지 않아 보조정리 A.4.3가 성립하지 않기 때문입니다. 정준성을 회복하기 위해 이러한 상수의 적용을 단순화할 수 있는지는 미해결 문제입니다. 또한 허용 가능한 모든 고차 귀납적 타입을 기술하는 스키마도 아직 없으며, 그 규칙을 어떻게 올바르게 정식화해야 하는지(예를 들어 고차 생성자에 대한 계산 규칙이 판단적 등식이어야 하는지)도 확실하지 않습니다.

유니밸런스와 고차 귀납적 타입으로 확장된 Martin-Löf 타입 이론의 무모순성은 적절한 정규화 절차를 고안하여 보일 수도 있지만, 현재로서는 이러한 체계가 무모순이라는 증명은 의미론적 모형을 통한 것뿐입니다 — 유니밸런스에 대해서는 Voevodsky가 제시한 Kan 복합체 모형 [KLV12]이 있고, 고차 귀납적 타입에 대해서는 Lumsdaine과 Shulman이 제시한 모형 [LS17]이 있습니다.

그 밖의 메타이론적 문제와 현재까지의 결과 요약은 이 책 서론의 "구성성"과 "미해결 문제" 절에서 더 자세히 다룹니다.

주

도입 규칙(원시 상수)과 제거 규칙 및 계산 규칙(정의된 상수)으로 이루어진 규칙 체계는 Gentzen의 자연 연역에서 착안한 것입니다. 존재 양화에 대한 제거 규칙을 강화할 수 있다는 가능성은 [How80]에서 제시되었습니다. 선언에 대한 공리의 강화는 [ML98]에 나타나며, 모순 제거와 동일성 타입에 대한 강화는 [ML75]에 나타납니다. W-타입은 [ML82]에서 도입되었습니다. W-타입은 [Tai68]이 도입한 트리 개념을 일반화합니다.

자연수와 순서수에 대한 원시 재귀의 일반화된 형태는 [Hil26]에 나타납니다. 이는 Gödel의 체계 T [Göd58]에 동기를 주었습니다. 이 체계는 [Tai67]이 분석하였는데, Tait는 [Göd58]을 따라 변환을 가리켜 "정의적 상등"이라는 용어를 사용하였습니다. 두 항이 환원 규칙을 차례로 적용하여 공통의 항으로 환원되면 두 항은 판단적으로 같다고 합니다. 이 용어는 de Bruijn [dB73]도 AUTOMATH를 제시하면서 사용하였습니다.

두 번째 제시는 내포적 Martin-Löf 타입 이론을 상당히 표준적인 방식으로 제시한 것에 호모토피 타입 이론에 필요한 몇 가지 기능을 더한 것입니다. 기준이 되는 [Hof97]의 제시와 비교하면, 이 책의 타입 이론에는 중요하지 않은 차이가 몇 가지 있습니다.

- [ML84]의 의미에서의 à la Russell 유니버스, 그리고
- Π 타입에 대한 판단적 η 및 함수 외연성,

또한 호모토피 타입 이론에 필수적인 몇 가지 기능이 있습니다.

- 유니밸런스 공리, 그리고
- 고차 귀납적 타입.

편의상 이 책에서는 주로 패턴 매칭에 의한 정의를 사용하여 함수를 귀납적으로 정의합니다. §A.1에서 한 것처럼 패턴 매칭 개념을 형식화할 수 있습니다. 그러나 §A.2에서 채택한 표준적인 타입 이론의 제시 방식은 각 타입 형성자마다 하나의 의존 제거자를 도입하고, 그 타입에서 나가는 함수는 반드시 이 제거자로부터 정의하도록 하는 것입니다. 이 방식은 타입 형성자의 보편 성질에 해당하므로 구문론적으로나 의미론적으로나 형식화하기가 더 쉽습니다. 두 방식은 동치입니다. 더 자세한 논의는 §1.10을 참조하십시오.

참고문헌

[AB04] Steven Awodey and Andrej Bauer. Propositions as [types]. Journal of Logic and Computation, 14(4):447–471, 2004. (123, 212, and 245쪽에서 인용.)

[Acz78] Peter Aczel. The type theoretic interpretation of constructive set theory. In A. MacIntyre, L. Pacholski, and J. Paris, editors, Logic Colloquium '77, volume 96 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 55–66. North-Holland, Amsterdam, 1978. (359 and 360쪽에서 인용.)

[AG02] Peter Aczel and Nicola Gambino. Collection principles in dependent type theory. In Paul Callaghan, Zhaohui Luo, James McKinna, and Robert Pollack, editors, Types for Proofs and Programs, International Workshop, TYPES 2000, Durham, UK, December 8-12, 2000, Selected Papers, volume 2277 of Lecture Notes in Computer Science, pages 1–23. Springer, 2002. (124쪽에서 인용.)

[AGS12] Steve Awodey, Nicola Gambino, and Kristina Sojakova. Inductive types in homotopy type theory. In Proceedings of the 2012 27th Annual IEEE/ACM Symposium on Logic in Computer Science, pages 95–104. IEEE Computer Society, 2012, arXiv:1201.3898. (171쪽에서 인용.)

[AKL13] Jeremy Avigad, Krzysztof Kapulkin, and Peter LeFanu Lumsdaine. Homotopy limits in Coq, 2013. arXiv:1304.0680. (101쪽에서 인용.)

[AKS13] Benedikt Ahrens, Krzysztof Kapulkin, and Michael Shulman. Univalent categories and the Rezk completion, 2013. arXiv:1303.0584. (330쪽에서 인용.)

[Alt99] Thorsten Altenkirch. Extensional equality in intensional type theory. In 14th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Trento, Italy, July 2–5, 1999, pages 412–420, 1999. (213쪽에서 인용.)

[AMS07] Thorsten Altenkirch, Conor McBride, and Wouter Swierstra. Observational equality, now! In Aaron Stump and Hongwei Xi, editors, Proceedings of the ACM Workshop Programming Languages meets Program Verification, PLPV 2007, Freiburg, Germany, October 5, 2007, 2007. (213쪽에서 인용.)

[Ang13] Carlo Angiuli. The $(\infty,1)$-accidentopos model of unintentional type theory. Sigbovik '13, April 1 2013. (인용 없음.)

[AW09] Steve Awodey and Michael A. Warren. Homotopy theoretic models of identity types. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 146:45–55, 2009. (3 and 100쪽에서 인용.)

[Bau13] Andrej Bauer. Five stages of accepting constructive mathematics, 2013. http://video.ias.edu/members/1213/0318-AndrejBauer. (인용 없음.)

[BCH13] Bruno Barras, Thierry Coquand, and Simon Huber. A generalization of Takeuti-Gandy interpretation. https://ncatlab.org/ufias2012/files/semi.pdf, 2013. (10쪽에서 인용.)

[Bee85] Michael Beeson. Foundations of Constructive Mathematics. Springer, 1985. (52쪽에서 인용.)

[Ber09] Julia E. Bergner. A survey of $(\infty, 1)$-categories. In John C. Baez and J. Peter May, editors, Towards Higher Categories, volume 152 of The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pages 69–83. Springer, 2009, arXiv:math.CT/0610239. (330쪽에서 인용.)

[Bis67] Erret Bishop. Foundations of constructive analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967. (360 and 390쪽에서 인용.)

[BIS02] Douglas Bridges, Hajime Ishihara, and Peter Schuster. Compactness and continuity, constructively revisited. In Julian C. Bradfield, editor, Computer Science Logic, 16th International Workshop, CSL 2002, 11th Annual Conference of the EACSL, Edinburgh, Scotland, UK, September 22-25, 2002, Proceedings, volume 2471 of Lecture Notes in Computer Science, pages 89–102. Springer, 2002. (407쪽에서 인용.)

[Bla83] Andreas Blass. Words, free algebras, and coequalizers. Fundamenta Mathematicae, 117(2):117–160, 1983. (205쪽에서 인용.)

[Bla79] Georges Blanc. Équivalence naturelle et formules logiques en théorie des catégories. Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, 19(3-4):131–137, 1978/79. (330쪽에서 인용.)

[Bou68] Nicolas Bourbaki. Theory of Sets. Hermann, Paris, 1968. (101쪽에서 인용.)

[BSP11] Clark Barwick and Christopher Schommer-Pries. On the unicity of the homotopy theory of higher categories, 2011. arXiv:1112.0040. (304쪽에서 인용.)

[BT09] Andrej Bauer and Paul Taylor. The Dedekind reals in abstract Stone duality. Mathematical structures in computer science, 19(4):757–838, 2009. (407쪽에서 인용.)

[Bun79] Marta Bunge. Stack completions and Morita equivalence for categories in a topos. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 20(4):401–436, 1979. (330쪽에서 인용.)

[CAB+86] Robert L. Constable, Stuart F. Allen, H. M. Bromley, W. R. Cleaveland, J. F. Cremer, Robert W. Harper, Douglas J. Howe, T. B. Knoblock, N. P. Mendler, P. Panangaden, James T. Sasaki, and Scott F. Smith. Implementing Mathematics with the NuPRL Proof Development System. Prentice Hall, 1986. (52, 54, 123, and 212쪽에서 인용.)

[Car95] Aurelio Carboni. Some free constructions in realizability and proof theory. Journal of Pure and Applied Algebra, 103:117–148, 1995. (213쪽에서 인용.)

[CDP14] Jesper Cockx, Dominique Devriese, and Frank Piessens. Pattern matching without K. In Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming, ICFP 2014, Gothenburg, Sweden, September 1-3, 2014, 2014. (53쪽에서 인용.)

[Chu40] Alonzo Church. A formulation of the simple theory of types. Journal of Symbolic Logic, 5:56–68, 1940. (1쪽에서 인용.)

[Chu41] Alonzo Church. The Calculi of Lambda Conversion. Princeton University Press, 1941. (1쪽에서 인용.)

[CM85] Robert L. Constable and N. P. Mendler. Recursive definitions in type theory. In Rohit Parikh, editor, Logics of Programs, Conference, Brooklyn College, June 17–19, 1985, Proceedings, volume 193 of Lecture Notes in Computer Science, pages 61–78, 1985. (171쪽에서 인용.)

[Con76] John H. Conway. On numbers and games. A K Peters Ltd., 1976. (396, 406, and 407쪽에서 인용.)

[Con85] Robert L. Constable. Constructive mathematics as a programming logic I: Some principles of theory. In Annals of Mathematics, volume 24, pages 21–37. Elsevier Science Publishers, B.V. (North-Holland), 1985. Reprinted from Topics in the Theory of Computation, Selected Papers of the International Conference on Foundations of Computation Theory, FCT '83. (123쪽에서 인용.)

[Coq92a] Thierry Coquand. The paradox of trees in type theory. BIT Numerical Mathematics, 32(1):10–14, 1992. (23쪽에서 인용.)

[Coq92b] Thierry Coquand. Pattern matching with dependent types. In Proceedings of the Workshop on Types for Proofs and Programs, pages 71–83, 1992. (53쪽에서 인용.)

[Coq12] Coq Development Team. The Coq Proof Assistant Reference Manual. INRIA-Rocquencourt, 2012. (52 and 425쪽에서 인용.)

[CP90] Thierry Coquand and Christine Paulin. Inductively defined types. In COLOG-88 (Tallinn, 1988), volume 416 of Lecture Notes in Computer Science, pages 50–66. Springer, 1990. (171쪽에서 인용.)

[dB73] Nicolaas Govert de Bruijn. AUTOMATH, a language for mathematics. Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Quebec, 1973. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 52 (Été 1971). (52, 53, and 428쪽에서 인용.)

[Dia75] Radu Diaconescu. Axiom of choice and complementation. Proceedings of the American Mathematical Society, 51:176–178, 1975. (360쪽에서 인용.)

[dPGM04] Valeria de Paiva, Rajeev Goré, and Michael Mendler. Modalities in constructive logics and type theories. Journal of Logic and Computation, 14(4):439–446, 2004. (245쪽에서 인용.)

[Dyb91] Peter Dybjer. Inductive sets and families in Martin-Löf's type theory and their set-theoretic semantics. In Gerard Huet and Gordon Plotkin, editors, Logical Frameworks, pages 280–30. Cambridge University Press, 1991. (171쪽에서 인용.)

[Dyb00] Peter Dybjer. A general formulation of simultaneous inductive-recursive definitions in type theory. Journal of Symbolic Logic, 65(2):525–549, 2000. (171쪽에서 인용.)

[ES01] Martín Hötzel Escardó and Alex K. Simpson. A universal characterization of the closed Euclidean interval. In 16th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Boston, Massachusetts, USA, June 16-19, 2001, Proceedings, pages 115–125. IEEE Computer Society, 2001. (407쪽에서 인용.)

[EucBC] Euclid. Elements, Vols. 1–13. Elsevier, 300 BC. (58쪽에서 인용.)

[Fre76] Peter Freyd. Properties invariant within equivalence types of categories. In Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg), pages 55–61. Academic Press, 1976. (330쪽에서 인용.)

[FS12] Fredrik Nordvall Forsberg and Anton Setzer. A finite axiomatisation of inductive-inductive definitions. http://cs.swan.ac.uk/~csfnf/papers/indind_finite.pdf, 2012. (408쪽에서 인용.)

[GAA+13] Georges Gonthier, Andrea Asperti, Jeremy Avigad, Yves Bertot, Cyril Cohen, François Garillot, Stéphane Le Roux, Assia Mahboubi, Russell O'Connor, Sidi Ould Biha, Ioana Pasca, Laurence Rideau, Alexey Solovyev, Enrico Tassi, and Laurent Thery. A machine-checked proof of the odd order theorem. In Interactive Theorem Proving, 2013. (5쪽에서 인용.)

[Gar09] Richard Garner. On the strength of dependent products in the type theory of Martin-Löf. Annals of Pure and Applied Logic, 160(1):1–12, 2009. (100쪽에서 인용.)

[Gen36] Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen, 112(1):493–565, 1936. (360쪽에서 인용.)

[Göd58] Kurt Gödel. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica. International Journal of Philosophy, 12:280–287, 1958. (428쪽에서 인용.)

[Hat02] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html. (297쪽에서 인용.)

[Hed98] Michael Hedberg. A coherence theorem for Martin-Löf's type theory. Journal of Functional Programming, 8(4):413–436, 1998. (245쪽에서 인용.)

[Hey66] Arend Heyting. Intuitionism: an introduction. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Pub. Co., 1966. (52쪽에서 인용.)

[Hil26] David Hilbert. Über das Unendliche. Mathematische Annalen, 95(1):161–190, 1926. (428쪽에서 인용.)

[Hof95] Martin Hofmann. Extensional concepts in intensional type theory. PhD thesis, University of Edinburgh, 1995. (213쪽에서 인용.)

[Hof97] Martin Hofmann. Syntax and semantics of dependent types. In Semantics and logics of computation, volume 14 of Publictions of the Newton Institute, pages 79–130. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. (428쪽에서 인용.)

[How80] William A. Howard. The formulae-as-types notion of construction. In J. Roger Seldin, Jonathan P.; Hindley, editor, To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, pages 479–490. Academic Press, 1980. original paper manuscript from 1969. (52, 53, 101, and 428쪽에서 인용.)

[HS98] Martin Hofmann and Thomas Streicher. The groupoid interpretation of type theory. In Giovanni Sambin and Jan M. Smith, editors, Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995), volume 36 of Oxford Logic Guides, pages 83–111. Oxford University Press, New York, 1998. (3, 100, and 330쪽에서 인용.)

[Hue80] Gérard Huet. Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems: Abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the ACM, 27(4):797–821, 1980. (360쪽에서 인용.)

[Jac99] Bart Jacobs. Categorical logic and type theory, volume 141 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1999. (124쪽에서 인용.)

[JM95] A. Joyal and I. Moerdijk. Algebraic set theory, volume 220 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1995. (360 and 362쪽에서 인용.)

[Joh02] Peter T. Johnstone. Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium: Volumes 1 and 2. Number 43 in Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications, 2002. (124 and 337쪽에서 인용.)

[JT91] André Joyal and Myles Tierney. Strong stacks and classifying spaces. In Category Theory. Proceedings of the International Conference held in Como, Italy, July 22–28, 1990, volume 1488 of Lecture Notes in Mathematics, pages 213–236. Springer, Berlin, 1991. (330쪽에서 인용.)

[KECA13] Nicolai Kraus, Martın Escardó, Thierry Coquand, and Thorsten Altenkirch. Generalizations of Hedberg's theorem. In Masahito Hasegawa, editor, 11th International Conference, Typed Lambda Calculus and Applications 2013, Eindhoven, The Netherlands, June 26–28, 2013. Proceedings, volume 7941 of Lecture Notes in Computer Science, pages 173–188. Springer Berlin Heidelberg, 2013. (124 and 245쪽에서 인용.)

[KLN04] Fairouz Kamareddine, Twan Laan, and Rob Nederpelt. A Modern Perspective on Type Theory: From its Origins until Today. Number 29 in Applied Logic. Kluwer, 2004. (2쪽에서 인용.)

[KLV12] Chris Kapulkin, Peter LeFanu Lumsdaine, and Vladimir Voevodsky. The simplicial model of univalent foundations, 2012. arXiv:1211.2851. (10, 100, 171, and 427쪽에서 인용.)

[Knu74] Donald Ervin Knuth. Surreal Numbers. Addison-Wesley, 1974. (410쪽에서 인용.)

[Kol32] Andrey Kolmogorov. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Mathematische Zeitschrift, 35:58–65, 1932. (8쪽에서 인용.)

[Law74] F. William Lawvere. Metric spaces, generalized logic, and closed categories. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 43:135–166, 1974. Reprinted as Reprints in Theory and Applications of Categories 1:1–37, 2002. (409쪽에서 인용.)

[Law05] F. William Lawvere. An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. Reprints in Theory and Applications of Categories, 11:1–35, 2005. Reprinted and expanded from Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 52 (1964), With comments by the author and Colin McLarty. (6, 342, and 359쪽에서 인용.)

[Law06] F. William Lawvere. Adjointness in foundations. Reprints in Theory and Applications of Categories, 16:1–16, 2006. Reprinted from Dialectica 23 (1969). (52 and 171쪽에서 인용.)

[LH12] Daniel R. Licata and Robert Harper. Canonicity for 2-dimensional type theory. In Proceedings of the 39th annual ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, pages 337–348, New York, NY, USA, 2012. ACM. (9, 10, and 100쪽에서 인용.)

[LS13] Daniel R. Licata and Michael Shulman. Calculating the fundamental group of the circle in homotopy type theory. In LICS 2013: Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 2013. (101쪽에서 인용.)

[LS17] Peter LeFanu Lumsdaine and Michael Shulman. Semantics of higher inductive types. arXiv:1705.07088, 2017. (10, 171, 212, and 427쪽에서 인용.)

[Lum10] Peter LeFanu Lumsdaine. Weak ω-categories from intensional type theory. Typed lambda calculi and applications, 6:1–19, 2010. arXiv:0812.0409. (100쪽에서 인용.)

[Lur09] Jacob Lurie. Higher topos theory. Number 170 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2009. arXiv:math.CT/0608040. (9, 144, 245, and 292쪽에서 인용.)

[Mak95] Michael Makkai. First order logic with dependent sorts, with applications to category theory. http://www.math.mcgill.ca/makkai/folds/, 1995. (330쪽에서 인용.)

[Mak01] Michael Makkai. On comparing definitions of weak n-category. http://www.math.mcgill.ca/makkai/, August 2001. (330쪽에서 인용.)

[ML71] Per Martin-Löf. Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. In Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium (University of Oslo 1970), volume 63 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 179–216. North-Holland, 1971. (171쪽에서 인용.)

[ML75] Per Martin-Löf. An intuitionistic theory of types: predicative part. In H.E. Rose and J.C. Shepherdson, editors, Logic Colloquium '73, Proceedings of the Logic Colloquium, volume 80 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 73–118. North-Holland, 1975. (2, 52, 53, 99, 171, and 428쪽에서 인용.)

[ML82] Per Martin-Löf. Constructive mathematics and computer programming. In L. Jonathan Cohen, Jerzy Łoś, Helmut Pfeiffer, and Klaus-Peter Podewski, editors, Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, Proceedings of the Sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Hannover 1979, volume 104 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 153–175. North-Holland, 1982. (2, 52, 171, and 428쪽에서 인용.)

[ML84] Per Martin-Löf. Intuitionistic type theory, volume 1 of Studies in Proof Theory. Bibliopolis, 1984. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980. (2, 52, 53, and 428쪽에서 인용.)

[ML98] Per Martin-Löf. An intuitionistic theory of types. In Giovanni Sambin and Jan M. Smith, editors, Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995), volume 36 of Oxford Logic Guides, pages 127–172. Oxford University Press, 1998. (2, 52, 53, and 428쪽에서 인용.)

[ML06] Per Martin-Löf. 100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it? The Computer Journal, 49(3):345–350, 2006. (124쪽에서 인용.)

[Mog89] Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. Information and Computation, 93:55–92, 1989. (246쪽에서 인용.)

[MP00] Ieke Moerdijk and Erik Palmgren. Wellfounded trees in categories. In Proceedings of the Workshop on Proof Theory and Complexity, PTAC'98 (Aarhus), volume 104, pages 189–218, 2000. (171쪽에서 인용.)

[MP02] Ieke Moerdijk and Erik Palmgren. Type theories, toposes and constructive set theory: predicative aspects of AST. Annals of Pure and Applied Logic, 114(1–3):155–201, 2002. (359쪽에서 인용.)

[MRR88] Ray Mines, Fred Richman, and Wim Ruitenburg. A course in constructive algebra. Springer-Verlag, 1988. (359쪽에서 인용.)

[MS05] Maria Emilia Maietti and Giovanni Sambin. Toward a minimalist foundation for constructive mathematics. In Laura Crosilla and Peter Schuster, editors, From Sets and Types to Topology and Analysis: Practicable Foundations for Constructive Mathematics, volume 48 of Oxford Logic Guides, pages 91–114. Clarendon Press, 2005. (124쪽에서 인용.)

[Nor88] Bengt Nordström. Terminating general recursion. BIT Numerical Mathematics, 28(3):605–619, 1988. (360쪽에서 인용.)

[Nor07] Ulf Norell. Towards a practical programming language based on dependent type theory. PhD thesis, Chalmers, Göteborg University, 2007. (52 and 425쪽에서 인용.)

[Pal07] Erik Palmgren. A constructive and functorial embedding of locally compact metric spaces into locales. Topology and its Applications, 154(9):1854–1880, 2007. (407쪽에서 인용.)

[Pal09] Erik Palmgren. Constructivist and structuralist foundations: Bishop's and Lawvere's theories of sets. http://www.math.uu.se/~palmgren/cetcs.pdf, 2009. (359쪽에서 인용.)

[Pau86] Lawrence C. Paulson. Constructing recursion operators in intuitionistic type theory. Journal of Symbolic Computation, 2(4):325–355, 1986. (360쪽에서 인용.)

[Pie02] Benjamin C. Pierce. Types and Programming Languages. MIT Press, 2002. (2쪽에서 인용.)

[PM93] Christine Paulin-Mohring. Inductive Definitions in the System Coq - Rules and Properties. In Marc Bezem and Jan Friso Groote, editors, Proceedings of the conference Typed Lambda Calculi and Applications, number 664 in Lecture Notes in Computer Science, 1993. (54쪽에서 인용.)

[PPM90] Frank Pfenning and Christine Paulin-Mohring. Inductively defined types in the calculus of constructions. In Michael G. Main, Austin Melton, Michael W. Mislove, and David A. Schmidt, editors, Mathematical Foundations of Programming Semantics, 5th International Conference, Tulane University, New Orleans, Louisiana, USA, March 29 – April 1, 1989, Proceedings, number 442 in Lecture Notes in Computer Science, pages 209–228. Springer, 1990. (171쪽에서 인용.)

[PS89] Kent Petersson and Dan Synek. A set constructor for inductive sets in Martin-Löf's type theory. In David H. Pitt, David E. Rydeheard, Peter Dybjer, Andrew M. Pitts, and Axel Poigné, editors, Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 5–8, 1989, Proceedings, volume 389 of Lecture Notes in Computer Science, pages 128–140. Springer, 1989. (171쪽에서 인용.)

[Rez01] Charles Rezk. A model for the homotopy theory of homotopy theory. Transactions of the American Mathematical Society, 353(3):973–1007, 2001. arXiv:math.AT/9811037. (330쪽에서 인용.)

[Rez05] Charles Rezk. Toposes and homotopy toposes. http://www.math.uiuc.edu/~rezk/homotopy-topos-sketch.pdf, 2005. (9 and 144쪽에서 인용.)

[Ric00] Fred Richman. The fundamental theorem of algebra: a constructive development without choice. Pacific Journal of Mathematics, 196(1):213–230, 2000. (409쪽에서 인용.)

[Ric08] Fred Richman. Real numbers and other completions. Mathematical Logic Quarterly, 54(1):98–108, 2008. (407쪽에서 인용.)

[RS13] Egbert Rijke and Bas Spitters. Sets in homotopy type theory, 2013. arXiv:1305.3835. (359쪽에서 인용.)

[Rus08] Bertand Russell. Mathematical logic based on the theory of types. American Journal of Mathematics, 30:222–262, 1908. (1쪽에서 인용.)

[Sco70] Dana Scott. Constructive validity. In M. Laudet, D. Lacombe, L. Nolin, and M. Schützenberger, editors, Symposium on Automatic Demonstration, volume 125, pages 237–275. Springer-Verlag, 1970. (52쪽에서 인용.)

[Som10] Giovanni Sommaruga. History and Philosophy of Constructive Type Theory. Number 290 in Synthese Library. Kluwer, 2010. (2쪽에서 인용.)

[Spi11] Arnaud Spiwack. A Journey Exploring the Power and Limits of Dependent Type Theory. PhD thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, 2011. (124쪽에서 인용.)

[SS12] Urs Schreiber and Michael Shulman. Quantum gauge field theory in cohesive homotopy type theory. Quantum Physics and Logic, 2012. (246쪽에서 인용.)

[Str93] Thomas Streicher. Investigations into intensional type theory, 1993. Habilitationsschrift, Ludwig-Maximilians-Universität München. (52, 54, and 219쪽에서 인용.)

[Tai67] William W. Tait. Intensional interpretations of functionals of finite type. I. The Journal of Symbolic Logic, 32:198–212, 1967. (52 and 428쪽에서 인용.)

[Tai68] William W. Tait. Constructive reasoning. In Logic, Methodology and Philos. Sci. III (Proc. Third Internat. Congr., Amsterdam, 1967), pages 185–199. North-Holland, Amsterdam, 1968. (52, 53, and 428쪽에서 인용.)

[Tay96] Paul Taylor. Intuitionistic sets and ordinals. The Journal of Symbolic Logic, 61(3):705–744, 1996. (360 and 362쪽에서 인용.)

[Tay99] Paul Taylor. Practical Foundations of Mathematics. Cambridge University Press, 1999. (360 and 362쪽에서 인용.)

[TV02] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical algebraic geometry I: Topos theory, 2002. arXiv:math/0207028. (9쪽에서 인용.)

[TvD88a] Anne Sjerp Troelstra and Dirk van Dalen. Constructivism in mathematics. Vol. I, volume 121 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. An introduction. (8 and 124쪽에서 인용.)

[TvD88b] Anne Sjerp Troelstra and Dirk van Dalen. Constructivism in mathematics. Vol. II, volume 123 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. An introduction. (8 and 124쪽에서 인용.)

[vdBG11] Benno van den Berg and Richard Garner. Types are weak ω-groupoids. Proceedings of the London Mathematical Society, 102(2):370–394, 2011, http://plms.oxfordjournals.org/content/102/2/370.full.pdf+html. (100쪽에서 인용.)

[vdBM15] Benno van den Berg and Ieke Moerdijk. W-types in homotopy type theory. Mathematical Structures in Computer Science, 25:1100–1115, 6 2015. (171쪽에서 인용.)

[Voe06] Vladimir Voevodsky. A very short note on the homotopy λ-calculus. http://www.math.ias.edu/~vladimir/Site3/Univalent_Foundations_files/Hlambda_short_current.pdf, 2006. (3쪽에서 인용.)

[Voe12] Vladimir Voevodsky. A universe polymorphic type system. https://ncatlab.org/ufias2012/files/Universe+polymorphic+type+sytem.pdf, 2012. (10 and 123쪽에서 인용.)

[War08] Michael A. Warren. Homotopy Theoretic Aspects of Constructive Type Theory. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2008. (100쪽에서 인용.)

[Wik13] Wikipedia. Homotopy groups of spheres, April 2013. (255쪽에서 인용.)

[Wil10] Olov Wilander. Setoids and universes. Mathematical Structures in Computer Science, 20(4):563–576, 2010. (360쪽에서 인용.)

[WR27] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. Principia mathematica, 3 vol.s. Cambridge University Press, Cambridge, 1910–1913; Second edition, 1925–1927. (100 and 123쪽에서 인용.)

기호 색인

$x :\equiv a$	정의, p. 19
$a \equiv b$	판단적 상등, p. 18
$a =_A b$	동일성 타입, p. 45
$a = b$	동일성 타입, p. 45
$x := b$	정의에 의한 명제적 등식, p. 178
$\mathsf{Id}_A(a, b)$	동일성 타입, p. 45
$a =_p^P b$	의존 경로 타입, p. 178
$a \neq b$	비등식, p. 52
refl_x	x에서의 반사성 경로, p. 45
p^{-1}	경로 뒤집기, p. 60
$p \centerdot q$	경로 이어붙이기, p. 61
$p \centerdot_{\mathsf{l}} r$	왼쪽 위스커링, p. 66
$r \centerdot_{\mathsf{r}} q$	오른쪽 위스커링, p. 66
$r \star s$	2-경로의 수평 이어붙이기, p. 66
$g \circ f$	함수의 합성, p. 54
$g \circ f$	준범주에서 사상의 합성, p. 302
f^{-1}	동치의 준역원, p. 77
f^{-1}	준범주에서 동형사상의 역, p. 303
$\mathbf{0}$	빈 타입, p. 32
$\mathbf{1}$	단위 타입, p. 25
$\star$	$\mathbf{1}$의 표준적인 원소, p. 25
$\mathbf{2}$	불리언 타입, p. 33
$1_{\mathbf{2}}$, $0_{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2}$의 생성자, p. 33
0_I, 1_I	구간 I의 점 생성자, p. 181
AC	선택 공리, p. 116
AC_∞	“타입 이론적 선택 공리”, p. 98
$\mathsf{acc}(a)$	접근 가능성 술어, p. 345
$P \wedge Q$	논리곱(“그리고”), p. 115
$\mathsf{ap}_f(p)$ or $f(p)$	$p : x =_A y$에 대한 $f : A \to B$의 적용, p. 68
$\mathsf{apd}_f(p)$	$p : x =_A y$에 대한 $f : \prod_{(a:A)} B(a)$의 적용, p. 71

$\mathsf{apd}^2_f(p)$	2차원 의존 ap, p. 184
$x \# y$	실수의 분리 관계, p. 367
base	$\mathbb{S}^1$의 기점, p. 175
base	$\mathbb{S}^2$의 기점, p. 176 및 p. 183
$\mathsf{biinv}(f)$	f가 양쪽 가역이라는 명제, p. 134
$x \sim y$	쌍시뮬레이션, p. 356
$_$	암묵적 λ-추상화에 쓰이는 빈칸, p. 21
$\mathcal{C}$	Cauchy 근사의 타입, p. 376
Card	기수의 타입, p. 342
$\bigcirc A$	A에 적용된 반영자 또는 모달리티, p. 241 및 p. 244
$\mathsf{cocone}_X(Y)$	쌍대뿔의 타입, p. 191
code	경로에 대한 코드의 족, p. 90, p. 258, p. 295
$A \setminus B$	부분집합의 여집합, p. 116
$\mathsf{cons}(x, \ell)$	리스트의 이어붙이기 생성자, p. 148 및 p. 202
contr_x	축약 중심으로의 경로, p. 121
$\mathcal{F} \triangleleft (J, \mathcal{G})$	귀납적 덮개, p. 394
$\mathsf{isCut}(L, U)$	Dedekind 절단이라는 성질, p. 365
$\{\, L \mid R \,\}$	초현실수를 정의하는 절단, p. 398
$X^\dagger$	†-범주에서의 사상 뒤집기, p. 319
decode	경로에 대한 디코딩 함수, p. 90, p. 258, p. 295
encode	경로에 대한 인코딩 함수, p. 90, p. 258, p. 295
$\eta^{\bigcirc}_A$ or η_A	함수 $A \to \bigcirc A$, p. 241 및 p. 244
$A \twoheadrightarrow B$	에피사상 또는 전사
$\mathsf{eq}_{\mathsf{No}}(x, y)$	초현실수의 경로 생성자, p. 397
$\mathsf{eq}_{\mathbb{R}_c}(u, v)$	Cauchy 실수의 경로 생성자, p. 372
$a \sim b$	동치 관계, p. 197
$X \simeq Y$	동치들의 타입, p. 76
$\mathsf{Equiv}(X, Y)$	동치들의 타입($X \simeq Y$와 같음)
$A \simeq B$	범주의 동치들의 타입, p. 310
$P \Leftrightarrow Q$	논리적 동치, p. 115
$\exists (x : A).\, B(x)$	단순 존재에 대한 논리 표기법, p. 115
$\mathsf{ext}(f)$	η_A를 따른 $f : A \to B$의 확장, p. 223
$\bot$	논리적 거짓, p. 115
$\mathsf{fib}_f(b)$	$b : B$에서 $f : A \to B$의 섬유, p. 132
$\mathsf{Fin}(n)$	표준 유한 타입, p. 24
$\forall (x : A).\, B(x)$	의존 함수 타입에 대한 논리 표기법, p. 115
funext	함수 외연성, p. 84
$A \to B$	함수 타입, p. 20
B^A	함자 준범주, p. 306

glue	$A \sqcup^C B$의 경로 생성자, p. 190
happly	함수 사이의 경로를 호모토피로 바꾸는 함수, p. 84
$\mathsf{hom}_A(a,b)$	준범주에서의 hom-집합, p. 302
$f \sim g$	함수 사이의 호모토피, p. 74
I	구간 타입, p. 181
id_A	A의 항등 함수, p. 25
1_a	준범주에서의 항등 사상, p. 302
idtoeqv	유니밸런스가 역을 부여하는 함수 $(A = B) \to (A \simeq B)$, p. 86
idtoiso	준범주에서의 함수 $(a = b) \to (a \cong b)$, p. 303
$\mathsf{im}(f)$	사상 f의 상, p. 237
$\mathsf{im}_n(f)$	사상 f의 n-상, p. 237
$P \Rightarrow Q$	논리적 함의("이면"), p. 115
$a \in P$	부분집합 또는 부분 타입에의 소속, p. 113
$x \in v$	누적 위계에서의 소속, p. 355
$x \mathrel{\widetilde{\in}} v$	크기 재조정된 소속, p. 358
$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$	$\mathbf{0}$에 대한 귀납, p. 33,
$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$	$\mathbf{1}$에 대한 귀납, p. 29,
$\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2}$에 대한 귀납, p. 34,
$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$에 대한 귀납, p. 37, 그리고
$\mathsf{ind}_{=_A}$	$=_A$에 대한 경로 귀납법, p. 47,
$\mathsf{ind}'_{=_A}$	$=_A$에 대한 기점 경로 귀납법, p. 48,
$\mathsf{ind}_{A\times B}$	$A \times B$에 대한 귀납, p. 28,
$\mathsf{ind}_{\sum_{(x:A)} B(x)}$	$\sum_{(x:A)} B$에 대한 귀납, p. 30,
ind_{A+B}	$A + B$에 대한 귀납, p. 33,
$\mathsf{ind}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}$	$\mathsf{W}_{(x:A)}B$에 대한 귀납, p. 164
$A_{/a}$	순서수의 시작 절편, p. 350
$\mathsf{inj}(A,B)$	단사들의 타입, p. 343
inl	쌍대곱으로의 첫 번째 단사, p. 32
inr	쌍대곱으로의 두 번째 단사, p. 32
$A \cap B$	부분집합의 교집합, p. 116, 클래스의 교집합, p. 358, 또는 구간의 교집합, p. 393
$\mathsf{isContr}(A)$	A가 축약 가능하다는 명제, p. 121
$\mathsf{isequiv}(f)$	f가 동치라는 명제, p. 76, p. 127 및 p. 136
$\mathsf{ishae}(f)$	f가 반수반 동치라는 명제, p. 130
$a \cong b$	(준)범주에서 동형사상들의 타입, p. 302
$A \cong B$	준범주 사이의 동형사상들의 타입, p. 311
$A \cong B$	집합 사이의 동형사상들의 타입, p. 76
$a \cong^{\dagger} b$	유니터리 동형사상들의 타입, p. 319
isotoid	범주에서 idtoiso의 역, p. 303

is-n-type(X)	X가 n-타입이라는 명제, p. 215
isProp(A)	A가 단순 명제라는 명제, p. 109
isSet(A)	A가 집합이라는 명제, p. 105
$A * B$	A와 B의 조인, p. 193
ker(f)	점을 가진 집합 사이의 사상의 핵, p. 268
$\lambda x.\, b(x)$	λ-추상화, p. 24
lcoh$_f(g, \eta)$	왼쪽 수반 정합성 데이터의 타입, p. 133
LEM	배중률, p. 111
LEM$_\infty$	모순적인 명제-타입 대응 LEM, p. 109 및 p. 111
$x < y$	자연수, p. 43, 순서수, p. 345, Cauchy 실수, p. 385, 초현실수, p. 397 등에서의 엄격한 부등식
$x \leq y$	자연수, p. 43, Cauchy 실수, p. 385, 초현실수, p. 397 등에서의 비엄격한 부등식
$\preceq$, $\prec$	초현실수에 대한 $\leq$와 $<$의 재귀적 버전, p. 402
$\trianglelefteqslant$, $\triangleleft$, $\sqsubseteq$, $\sqsubset$	No-재귀의 공역 위의 순서, p. 399
lim(x)	Cauchy 근사의 극한, p. 372
linv(f)	f의 왼쪽 역들의 타입, p. 132
List(X)	X의 원소들의 리스트 타입, p. 148 및 p. 202
loop	$\mathbb{S}^1$의 경로 생성자, p. 175
Map$_*(A, B)$	기점을 가진 사상들의 타입, p. 186
$x \mapsto b$	λ-추상의 대안 표기법, p. 21
max(x, y)	어떤 순서에서의 최댓값, 예: p. 368 및 p. 385
merid(a)	$a : A$에서 현수 ΣA의 자오선, p. 184
min(x, y)	어떤 순서에서의 최솟값, 예: p. 368 및 p. 385
$A \rightarrowtail B$	단사 사상 또는 매장
$\mathbb{N}$	자연수의 타입, p. 35
N	현수 ΣA의 북극, p. 184
$\mathbf{N}^{\mathbf{w}}$, $0^{\mathbf{w}}$, succ$^{\mathbf{w}}$	W-타입으로 인코딩된 자연수, p. 152
$\mathbb{N}$Alg	$\mathbb{N}$-대수의 타입, p. 155
$\mathbb{N}$Hom(C, D)	$\mathbb{N}$-준동형사상의 타입, p. 155
nil	빈 리스트, p. 148 및 p. 202
No	초현실수의 타입, p. 397
$\neg P$	논리적 부정("아님"), p. 115
n-Type, n-Type$_{\mathcal{U}}$	n-타입의 유니버스, p. 218
$\Omega(A, a)$, ΩA	점을 가진 타입의 루프 공간, p. 68
$\Omega^k(A, a)$, $\Omega^k A$	반복 루프 공간, p. 68
A^{op}	반대 준범주, p. 315
$P \vee Q$	논리적 선언("또는"), p. 115
Ord	순서수 타입, p. 350
(a, b)	(의존) 쌍, p. 25 및 p. 29

$\mathsf{pair}^{=}$	$=_{A\times B}$에 대한 생성자, p. 79
$\pi_n(A)$	A의 n^{th} 호모토피 군, p. 201 및 p. 255
$\mathcal{P}(A)$	멱집합, p. 114
$\mathcal{P}_+(A)$	단순히 원소를 갖는 멱집합, p. 352
pred	선행자 함수 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, p. 259
$A \times B$	데카르트 곱 타입, p. 25
$\prod_{(x:A)} B(x)$	의존 함수 타입, p. 24
$\mathsf{pr}_1(t)$	쌍의 첫 번째 사영, p. 27 및 p. 30
$\mathsf{pr}_2(t)$	쌍의 두 번째 사영, p. 27 및 p. 30
Prop, $\mathsf{Prop}_{\mathcal{U}}$	단순 명제의 유니버스, p. 113
$A \times_C B$	C 위에서 A와 B의 당김, p. 99
$A \sqcup^C B$	C 아래에서 A와 B의 푸시아웃, p. 190
$\mathbb{Q}$	유리수 타입, p. 364
$\mathbb{Q}_+$	양의 유리수 타입, p. 364
$\mathsf{qinv}(f)$	f의 준역원들의 타입, p. 75
A/R	동치 관계에 의한 집합의 몫, p. 196
$A /\!\!/ R$	몫의 다른 정의, p. 197
$\mathbb{R}$	실수의 타입(둘 중 어느 것이든), p. 390
$\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$	Cauchy 실수의 타입, p. 372
$\mathbb{R}_{\mathsf{d}}$	Dedekind 실수의 타입, p. 365
$\mathsf{rat}(q)$	Cauchy 실수로 간주한 유리수, p. 372
$\mathsf{rcoh}_f(g, \epsilon)$	오른쪽 수반 정합성 데이터의 타입, p. 133
$\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$	$\mathbf{0}$에 대한 재귀자, p. 33
$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}$	$\mathbf{1}$에 대한 재귀자, p. 27
$\mathsf{rec}_{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2}$에 대한 재귀자, p. 34
$\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$에 대한 재귀자, p. 36
$\mathsf{rec}_{A\times B}$	$A \times B$에 대한 재귀자, p. 27
$\mathsf{rec}_{\sum_{(x:A)} B(x)}$	$\sum_{(x:A)} B$에 대한 재귀자, p. 30
rec_{A+B}	$A + B$에 대한 재귀자, p. 32
$\mathsf{rec}_{\mathsf{W}_{(x:A)}B(x)}$	$\mathsf{W}_{(x:A)}B$에 대한 재귀자, p. 154
rinv	f의 오른쪽 역들의 타입, p. 132
S	ΣA의 남극, p. 184
$\mathbb{S}^n$	n차원 구면, p. 182
seg	구간 I의 경로 생성자, p. 181
Set, $\mathsf{Set}_{\mathcal{U}}$	집합의 유니버스, p. 113
$\mathcal{S}et$	집합의 범주, p. 303
$\mathsf{set}(A, f)$	누적 위계의 생성자, p. 354
$x \sim_\epsilon y$	$\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$에 대한 ϵ-근접 관계, p. 372
$x \approx_\epsilon y$	$\sim_\epsilon$의 재귀적 버전, p. 379

$\frown_\epsilon$ 또는 $\smile_\epsilon$	$\mathbb{R}_c$-재귀의 공역 위의 근접 관계, p. 373
$A \wedge B$	A와 B의 스매시 곱, p. 193
$\{\, x : A \mid P(x) \,\}$	부분집합 타입, p. 113
$\{\, f(x) \mid P(x) \,\}$	부분집합의 상, p. 337
$B \subseteq C$	부분집합 타입의 포함, p. 113
$(q, r) \subseteq (s, t)$	구간의 포함, p. 393
succ	후속자 함수 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, p. 35
succ	후속자 함수 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, p. 256
$A + B$	쌍대곱 타입, p. 32
$\sum_{(x:A)} B(x)$	의존 쌍 타입, p. 29
$\mathsf{sup}(a, f)$	W-타입의 생성자, p. 153
surf	$\mathbb{S}^2$의 2-경로 생성자, p. 176 및 p. 183
ΣA	A의 현수, p. 184
$\mathsf{total}(f)$	전체 공간 위의 유도된 사상, p. 139
$p_*(u)$	$p : x = y$를 따른 $u : P(x)$의 수송, p. 70
$\mathsf{transport}^P(p, u)$	$p : x = y$를 따른 $u : P(x)$의 수송, p. 70
$\mathsf{transport}^2(X, Y)$	2차원 수송, p. 183
$\mathsf{transportconst}^X_Y(Z)$	상수 족에서의 수송, p. 72
$\|A\|_n$	A의 n-절단, p. 222
$\|a\|^A_n$, $\|a\|_n$	$\|A\|_n$에서의 $a : A$의 상, p. 222
$\|A\|$	A의 명제 절단, p. 115 및 p. 193
$\|a\|$	$\|A\|$에서의 $a : A$의 상, p. 115 및 p. 193
$\top$	논리적 참, p. 115
_	이름 없는 대상 또는 변수
$A \cup B$	부분집합의 합집합, p. 116
$\mathsf{uniq}_{A \times B}$	곱 $A \times B$에 대한 유일성 원리, p. 28
$\mathsf{uniq}_{\mathbf{1}}$	$\mathbf{1}$에 대한 유일성 원리, p. 29
$\mathcal{U}$	유니버스 타입, p. 23
$\mathcal{U}_\bigcirc$	모달 타입의 유니버스, p. 244
$\mathcal{U}_\bullet$	점을 가진 타입의 유니버스, p. 68
ua	유니밸런스에서 얻는 idtoeqv의 역, p. 87
V	누적 위계, p. 354
$\mathsf{WAlg}(A, B)$	w-대수의 타입, p. 156
$\mathsf{WHom}_{A,B}(C, D)$	W-준동형사상의 타입, p. 157
$\mathsf{W}_{(x:A)} B(x)$	W-타입(귀납적 타입), p. 152
$A \vee B$	A와 B의 쐐기합, p. 193
$\mathbf{y}$	요네다 매장, p. 316
$\mathbb{Z}$	정수 타입, p. 198

찾아보기

○-연결 함수, 245
○-절단된 함수, 245
†-범주, 319
†-준범주, 319
  에서의 유니터리 사상, 319
∞-연결 함수, 294
∞-함자, 60
∞-군, 201
∞-그루포이드, 3, 58, 60, 100, 155, 168, 176, 253, 254, 256, 291
  기본, 58
  타입의 구조, 60–68
∞-절단된 타입, 294
(∞,1)-범주, 101, 144, 155, 224, 301, 330
(∞,1)-토포스, 11, 141, 207, 245, 253, 289, 292, 294, 328, 330
  비초완비, 292
1-타입, 106
2-범주, 331
2차원 경로, 참조: 경로, 2-
3개 중 2개 성질, 137
6개 중 2개 성질, 145
2-경로, 참조: 경로, 2-
3차원 경로, 참조: 경로, 3-
3-경로, 참조: 경로, 3-

아벨 군, 참조: 군, 아벨
절댓값, 385
추상 스톤 쌍대성, 407
추상화, 414
  λ-, 참조: λ-추상화
남용
  언어의, 119, 120
  표기법의, 4, 94
수용, 203, 253–299, 311, 394–396, 406–407
접근 가능성, 345, 346, 360
접근 가능한, 참조: 접근 가능성
아커만 함수, 55
작용
  경로 위에서의 의존 함수의, 71
  경로 위에서의 함수의, 68
덧셈
  기수의, 342
  Cauchy 실수의, 385
  Dedekind 실수의, 366
  자연수의, 36
  순서수의, 360
  초현실수의, 405
형용사, 120
서로소인 기점을 첨가하기, 186
수반
  동치, 75, 144, 331
    (준)범주의, 309
    타입의, 절반, 130–134
  함자, 58, 98, 309, 317, 331, 340
  함자 정리, 203
  선형 사상, 319
수반, 참조: 수반 함자
허용 가능
  순서체, 참조: 순서체, 허용 가능
  규칙, 참조: 규칙, 허용 가능
부사, 120, 245
Agda, 참조: 증명 보조기
대수
  2-세포, 157
   의 쌍대극한, 204
  다항 함자에 대한, 156
  자기 함자에 대한, 156
  자유, 202
  시작, 163n, 참조: 호모토피 초기
  ℕ-, 155
  W-, 156
대수적 집합론, 333, 360
알고리즘, 5, 6, 8, 18, 42, 59, 202
α-변환, 22n, 415
융합 자유곱, 204, 290
해석학

고전적, 390
구성적, 390
해석적 수학, 58
분노, 107–109, 220
분리성, 367, 388, 409
적용
의존 함수의, 24
경로에 대한 의존 함수의, 71
함수의, 21
경로에 대한 함수의, 68
가설 또는 정리의, 42
근사, Cauchy, 참조: Cauchy 근사
아르키메데스 성질, 참조: 순서체, 아르키메데스
항수, 152, 322
화살표, 참조: 사상
결합법칙, 203
군에서, 201
모노이드에서, 201
덧셈의
Cauchy 실수의, 385
자연수의, 37
함수 합성의, 54
함수 타입의, 22
함자 합성의, 308
의 정합성, 308
조인의, 275
리스트 이어붙이기의, 202
경로 이어붙이기의, 63
의 정합성, 66
반군 연산의, 94
Σ-타입의, 101
가정, 19–20
부착 사상, 188, 189, 291
AUTOMATH, 428
자기동형사상
고정점이 없는, 8, 108
2의, 비항등, 211, 213
외연적 정초 관계의, 348
$\mathbb{S}^1$의, 183
$\mathbb{Z}$의, 후속자, 256
공리
이중 부정, 111
배중률, 참조: 배중률
함수 외연성, 참조: 함수 외연성
제한된 전지성 원리, 참조: 제한된 전지성 원리
마르코프 원리, 409
Δ_0-분리의, 358
선택의, 8, 116–118, 124, 301, 331, 341, 344, 352
$\mathsf{AC}_{n,m}$, 247
가산, 363, 371, 389, 407
의존, 407
n-연결된, 247
타입 이론적, 31, 98, 101, 107
유일한, 참조: 유일 선택
외연성의, 348
무한의, 357
환원 가능성의, 123
치환의, 357
분리의, 357
집합론의, 누적 위계에 대한, 356
명제적 크기 재조정, 참조: 명제적 크기 재조정
슈트라이허의 공리 K, 52, 53, 219, 245
n-타입으로의 일반화, 221
강한 수집, 359, 361
부분집합 수집, 359
유니밸런스, 참조: 유니밸런스 공리
불안정 팔면체, 145
규칙과의 비교, 20, 78, 177n
화이트헤드 원리, 294, 292–294
공리적 자유, 42

협상, 318–319, 354–359, 371
기점 보존 사상, 186
기점, 68, 234
서로소인 것을 첨가하기, 186
의 집합, 288
β-변환, 참조: β-축약
β-축약, 21n, 26n
양측 가역 함수, 134
전단사, 76, 136
쌍가군, 402
바인딩 구조, 22
쌍시뮬레이션, 356
비트, 109
양측 전체 관계, 참조: 관계, 양전(bitotal)
블레이커스–매시 정리, 참조: 정리, Blakers–Massey
Bolzano–Weierstraß, 참조: 콤팩트성
불리언
토포스, 342
의 타입, 참조: 불리언 타입
속박 변수, 참조: 변수, 속박
유계
양화사, 358
시뮬레이션, 350
완전히, 참조: 완전 유계
Bourbaki, 101
괄호 타입, 참조: 절단, 명제적

정준성, 10, 20, 427

Cantor의 정리, 345
포획, 변수의, 22
기수, 342
    ⋯의 덧셈, 342
     의 거듭제곱, 343
     의 부등식, 343
     의 곱셈, 342
기수, 342
바탕 집합, 32, 94
데카르트 곱, 참조: 타입, 곱
경우 분석, 32, 148
범주, 303
    $(\infty,1)$-, 참조: $(\infty,1)$-범주
     의 중심, 128
    쌍대 완비, 334
    완비, 334
    이산적, 304
     의 동치, 310
    곤트, 304, 318
     의 동형사상, 311
    국소 데카르트 닫힌, 340
    함자의, 306
    타입의, 329
    반대, 315
     의 곱, 315
    정칙, 334
    골격적, 304
    슬라이스, 331, 360
    엄격한, 318
    좋은 기점을 갖는, 342, 360
Cauchy
    근사, 369, 372, 390
      의존, 374
       의 타입, 376
    완비성, 388
    완비화, 참조: 완비화, Cauchy
    실수, 참조: 실수, 코시
    열, 363, 368, 371, 373, 389, 393, 409
동굴, 의 벽, 150
세포 복합체, 188–190
중심
    범주의, 128
    축약의, 121
혼돈 준범주, 314
선택 연산자, 109
원 타입, 참조: 타입,원
클래스, 355
    분리 가능, 358
    작은, 355
고전적
    해석학, 363, 390
    범주론, 301, 302, 308, 320, 323, 324
    호모토피 이론, 57–58, 254–255, 257–258
    논리, 참조: 논리
    수학, 참조: 수학, 고전
분류자
    대상, 141, 144
    부분 대상, 340
닫힌
    구간, 387
    모달리티, 248
    항, 427
쌍대 완비 범주, 334
쌍대뿔, 191, 228
코드, 참조: 인코드-디코드 방법
공역, 함수의, 20
쌍대동등자, 206
    집합의, 참조: 집합 쌍대동등자
강제 변환, 유니버스 상승, 53
쌍대 섬유, 290
함수의 쌍대 섬유, 193
정합성, 63, 66, 130, 133, 159, 308
코호몰로지, 254
일치
    Cauchy 근사의, 376
일치, Cauchy 근사의, 371
쌍대극한
    집합의, 195, 334
    타입의, 99, 190, 246, 248
모음
    강한, 359, 361
    부분집합, 359
가환
    군, 참조: 군, 아벨
    사각형, 102
쌍대모나드, 246
콤팩트성, 390
    Bolzano–Weierstraß, 390, 392
    Heine–Borel, 390, 393
    하이네-보렐, 395
    거리 함수, 363, 390, 391
여집합, 부분집합의, 116
완비
    범주, 334
    거리 공간, 390
    순서체, Cauchy, 388
    순서체, Dedekind, 370
    Segal 공간, 330

완비화
  Cauchy, 371
  Dedekind, 369, 370
  완전, 340
  거리 공간의, 409
  레즈크, 301, 326–328, 339, 360
  스택, 330
성분, 쌍의, 참조: 사영
합성
  함수의, 54
  (준)범주에서의 사상의, 302
  경로의, 61
    수평, 67
계산 규칙, 26, 422
  쌍대곱 타입에 대한, 33
  의존 함수 타입에 대한, 24
  의존 쌍 타입에 대한, 30
  함수 타입에 대한, 21, 415, 426
  고차 귀납적 타입에 대한, 177–178
  동일성 타입에 대한, 47
  귀납적 타입에 대한, 164
  자연수에 대한, 35, 37, 148
  곱 타입에 대한, 27
  $\mathbb{S}^1$에 대한, 177, 180
  불리언 타입에 대한, 148
  W-타입에 대한, 154
  명제적, 26, 158, 159, 177–178, 190
    함수 사이의 동일성에 대한, 84
    쌍 사이의 동일성에 대한, 79
    유니벌런스에 대한, 87
계산 효과, 246
컴퓨터 증명 보조기, 참조: 증명 보조기
경로의 이어붙이기, 61
원뿔
  함수의, 193, 335
  구면의, 189
합류성, 426
논리곱, 40, 115
연결된
  범주론적으로, 249
  함수, 참조: 함수, n-연결
  타입, 232
무모순성, 9, 10, 45n, 163, 413, 427
  산술의, 360
상수
  정의된, 415
  명시적, 415
  함수, 21
  립시츠, 378
  원시적, 415
  타입 족, 24
구성적
  해석학, 390
  논리, 참조: 논리
  수학, 참조: 수학, 구성적
  집합론, 359
구성성, 9
생성자, 26, 163
  경로, 175
  점, 175
포함
  구간의, 393
  부분집합의, 113
문맥, 19, 414, 419
  올바른 형식의, 414
타입 이론에서 함수의 "연속성", 3, 68, 70, 74, 83, 105, 108, 121, 220
연속 사상, 참조: 함수, 연속
축약 가능
  함수, 134–135
  타입, 121–123
모순, 40
반변 함자, 162
변환
  α-, 참조: α-변환
  β-, 참조: β-축약
  η-, 참조: η-확장
항의 변환 가능성, 415
쌍대곱, 참조: 타입, 쌍대곱
Coq, 참조: 증명 보조기
따름정리, 17n
분리 관계의 공추이성, 368
수반의 쌍대단위, 309
가산 선택 공리, 참조: 선택 공리, 가산
공변 함자, 162
피복
  귀납적, 394
  점별, 393
  보편적, 258–259
피복 공간, 297
  보편적, 258–259
누적적
  계층, 집합론적, 354
  유니버스, 23
커링, 22
절단
  Dedekind, 363, 364, 365, 369, 370, 389, 408
  초현실수의, 397

의존, 400
CW 복합체, 5, 188–190, 291
순환군, 255

드모르간 법칙, 41–42
결정 가능
정의적 상등, 18
동등성, 44, 112, 204, 220, 298, 364
부분집합, 35
타입, 112
타입 족, 112
디코딩, 참조: 인코드-디코드 방법
Dedekind
완비성, 370
완비화, 참조: 완비화, Dedekind
절단, 참조: 절단, Dedekind
실수, 참조: 실수, 데데킨트
연역 체계, 17
정의 등식, 415
정의, 425
패턴 매칭에 의한, 38–39, 164, 428
구조적 재귀에 의한, 415
귀납적, 147, 참조: 타입, 귀납적
부사의, 120
함수의, 직접, 21, 24
정의적 상등, 참조: 동등성, 정의적
부정, 111–112, 116–118, 342, 351–354
조밀한, 368
의존
Cauchy 근사, 374
절단, 400
함수, 참조: 함수, 의존
경로, 참조: 경로, 의존
타입, 참조: 타입, 의 족
의존 제거자, 참조: 귀납 원리
우울, 389–390, 393
유도, 419
하강 데이터, 331
Diaconescu의 정리, 341
다이어그램, 74, 101, 246, 248
차원
경로 생성자의, 176
경로의, 58
원판, 188, 189
이산적
범주, 304
공간, 6, 7, 11, 105
비등식, 52
서로소
기점, 186
합, 참조: 타입, 쌍대곱
합집합, 참조: 타입, 쌍대곱
선언, 40, 115
거리, 372, 386, 409
정의역
생성자의, 162
함수의, 20
이중 부정 법칙, 108, 111
더미 변수, 참조: 변수, 속박
이진 유리수, 참조: 유리수, 이진

Eckmann–Hilton 논증, 66, 201, 255, 270
유효
동치 관계, 338, 337–339
절차, 42
관계, 338
Eilenberg–Mac Lane 공간, 291, 297
정교화, 타입 이론에서의, 425
원소, 18
집합의 범주에 대한 초등 이론, 6, 333, 342, 359
제거 규칙, 참조: 제거자
제거자, 26, 422
귀납적 타입의
의존, 참조: 귀납 원리
비의존적, 참조: 재귀 원리
매장, 참조: 함수, 매장
요네다, 316
빈 타입, 참조: 타입, 공
인코딩, 참조: 인코드-디코드 방법
인코드-디코드 방법, 92, 90–94, 259–261, 279–287, 289–290, 295, 328, 338, 382
경로의 끝점, 58
자기 함자
에 대한 대수, 171
다항식, 156, 163n
에피, 참조: 에피사상
에피사상, 335
정칙, 334
ϵ-그물, 390
동등성
결정 가능, 참조: 결정 가능한 상등
정의상의, 18, 177
이종, 178
판단적, 18, 177, 413
단순히 결정 가능, 220
명제적, 18, 45
의 반사성, 62
의 대칭성, 60, 62

의 추이성, 61, 62
타입, 참조: 타입, 동일성
같은 것은 같은 것으로 대체할 수 있음, 46
방정식, 정의하는, 415
을 갖춘, 31
동치, 75–77, 86–87, 136
양쪽 가역 함수로서, 134
축약 가능 함수로서, 134–135
클래스, 197
섬유별, 139
반수반, 130–134
귀납법, 170
논리적, 45
(준)범주의, 310
약한, 참조: 약한 동치
의 성질, 136, 137
관계, 참조: 관계, 동치
약한, 294
본질적으로 전사인 함자, 311
η-변환, 참조: η-확장
η-확장, 22n, 26n
알렉산드리아의 Euclid, 58
평가, 참조: 적용, 함수의
증거, 명제의 참에 대한, 18, 39
악(evil), 330
ex falso quodlibet, 33
완전열, 269, 269
배중률, 8, 42, 109, 111, 220, 341, 344, 348, 351, 352, 365, 389, 393
$\mathsf{LEM}_{n,m}$, 247
존재 양화사, 참조: 양화사, 존재
확장, η-, 참조: η-확장
지수 아이디얼, 242
거듭제곱, 기수의, 343
확장 실수, 408
외연적
관계, 348
타입 이론, 52, 99
외연성, 함수의, 참조: 함수 외연성
알고리즘 추출, 6, 8

f-국소적 타입, 248
분해
당김에 대한 안정성, 240
체계, 직교, 참조: 직교 분해 체계
충실한 함자, 310
거짓, 40, 115
족
기본 구간의, 393
타입의, 참조: 타입, 의 족
Feit–Thompson 정리, 5
섬유, 132, 266
섬유열, 267, 266–271
섬유별, 71
동치, 139
사상, 참조: 섬유별 변환
n-연결된 함수족, 234
변환, 139–140, 235
섬유적 대체, 330, 340
올뭉치, 70, 81, 139, 257
호프, 참조: 호프 올뭉치
경로의, 257
체
근사적, 364
순서가 있는, 참조: 순서체
유한
-차원 벡터 공간, 319
리스트의 타입, 202
집합, 의 족, 24, 25, 54
1차
논리, 17, 119
시그니처, 322
고정점 성질, 172
평탄화 보조정리, 206, 273
형식적
위상, 394
타입 이론, 413–428
수학의 형식화, 참조: 수학, 형식화된
형성 규칙, 26, 421
기초, 1
기초, 유니밸런트, 1
4색 정리, 7
자유
대수적 구조, 202
완비 거리 공간, 371
귀납적 타입의 생성, 148, 167, 176
군, 참조: 군, 자유
모노이드, 참조: 모노이드, 자유
곱, 205
융합된, 204, 290
프레게, 171
프로이덴탈 현수 정리, 277–282
쌍대극한에 대한 푸비니 정리, 276
충만 함자, 310
충실충만 함자, 310
함수, 20–23, 68–69
○-연결된, 245
○-절단된, 245

∞-연결된, 294
아커만, 55
적용, 21
 의 경로에 대한 적용, 68
양측 가역, 127, 134
전단사인, 참조: 전단사
 의 공역, 20
합성, 54
상수, 21
…의 “연속성”, 참조: “연속성”
연속, 378, 383
  고전적 호모토피 이론에서, 2
축약 가능, 134–135
 의 커링, 22
의존, 24–25, 71–73
  적용, 24
   의 경로에 대한 적용, 71
 의 정의역, 20
매장, 136, 216, 237
…의 섬유, 참조: 섬유
섬유별, 참조: 섬유별 변환
…의 “함자성”, 참조: “함자성”
멱등, 198
동일성, 25, 75, 86
단사적, 137, 237, 334, 343, 344
λ-추상화, 참조: λ-추상화
왼쪽 가역, 132
선형, 319
립시츠, 378
국소 균등 연속, 409
n-연결된, 232, 232
 의 *n*-상, 237
n-절단된, 237
비확장적, 384
점 있는, 참조: 점을 가진 사상
다형적, 25
사영, 참조: 사영
 의 준역원, 참조: 준역원
수축 사상, 122, 136
오른쪽 가역, 132
단면, 122
시뮬레이션, 참조: 시뮬레이션
분할 전사, 136
전사적, 136, 232, 334, 344
균등 연속, 391
영, 267
함수 외연성, 53, 78, 84, 100, 122, 143, 425
  비의존적, 145
  구간 타입을 이용한 증명, 182
  유니밸런스를 이용한 증명, 142
  약한, 142
함수 타입, 참조: 타입, 함수
함수적 관계, 20
함자, 305
  수반, 309
   의 범주, 306
  반변, 162
  공변, 162
  동치, 310
  본질적으로 전사인, 311
  충실한, 310
  충만, 310
  충실충만, 310
  루프 공간, 267
  다항식, 참조: 자기 함자, 다항
  표현 가능, 317
  분할 본질적으로 전사, 310
  약한 동치, 참조: 약한 동치
타입 이론에서 함수의 “함자성”, 68, 74, 83, 105, 108, 121, 220
기본
  ∞-그루포이드, 58
  군, 57, 201, 254, 283, 287–288, 290–291
    원의, 256–263
  그루포이드, 328, 331
  준그루포이드, 283, 304, 328, 331
  갈루아 이론의 정리, 319

갈루아
  확장, 319
  군, 319
게임
  콘웨이, 396, 398
  연역 체계로서의, 17
곤트 범주, 304, 318
생성
  타입의, 귀납적, 46–49, 147–149, 167–168, 175–177
  ∞-그루포이드의, 176
생성원
  군의, 202, 291
  귀납적 타입의, 참조: 생성자
기하학적 실현, 58, 253, 289
기하학, 종합적, 58
구형 오퍼라드, 66
그래프, 101, 246
  합성을 갖춘, 248
그로텐디크 구성, 206

군, 201
  아벨, 68, 130, 201, 255, 266, 291, 297, 366
    의 완전열, 270
  순환, 255
  자유, 202–204
  기본, 참조: 기본군
  준동형사상, 203
  호모토피, 참조: 호모토피 군
그루포이드, 304
  ∞-, 참조: ∞-그루포이드
  기본, 참조: 기본 그루포이드(기본 군의 일반화)
  고차, 66

h-시작, 참조: 호모토피 초기
h-수준, 참조: n-타입
h-명제, 참조: 단순 명제
H-공간, 273
반수반 동치, 130–134
Haskell, 246
헤드베리 정리, 123, 220
Heine–Borel, 참조: 콤팩트성
나선, 258
이종 동등성, 178
계층
  누적적, 집합론적, 354
  n-타입의, 참조: n-타입
  유니버스의, 참조: 타입, 유니버스
고차 범주론, 57–58
고차 그루포이드, 참조: ∞-그루포이드
고차 귀납적 타입, 참조: 타입, 고차 귀납적
고차 토포스, 참조: $(\infty,1)$-토포스
hom-함자, 316
hom-집합, 302
호몰로지, 254
준동형사상
  체, 319, 370
  군, 203
  모노이드, 202
  $\mathbb{N}$-, 155
  함자에 대한 대수의, 156
  Ω-구조의, 322
  구조의, 320
  반군, 97
  W-, 157
호모토피, 73–75, 83–86
  타입의 (전)범주, 304, 329
  쌍대극한, 참조: 타입의 쌍대극한
  동치, 참조: 동치
    위상적, 2, 254
  섬유, 참조: 섬유
  군, 201, 254, 255
    구면의, 255, 271, 282, 296
  가설, 58
  귀납법, 170
  극한, 참조: 타입의 극한
  n-타입, 참조: n-타입
  이론, 고전적, 참조: 고전적 호모토피 이론
  위상적, 2, 57
  타입, 3
호모토피 귀납적 타입, 158
호모토피 초기
  함자에 대한 대수, 157
  $\mathbb{N}$-대수, 155
  W-대수, 157
호프
  구성, 274
  올뭉치, 271
    주니어, 299
호프 올뭉치, 275–277
수평 합성
  자연 변환의, 308
  경로의, 67
허브와 스포크, 189–190, 222, 291
초완비 타입, 294
가설, 19, 41, 43
  호모토피, 58
  귀납적, 38

멱등
  함수, 198
  모달리티, 245
동일시, 45
동일성, 4
  함수, 25, 75, 86
  모달리티, 245
  (전)범주에서의 사상, 302
  체계, 169–170
    한 점에서, 168–169
  삼각형, 309
  타입, 참조: 타입, 동일성
  지그재그, 309
상, 237, 268, 334
  n-상, 237
  부분집합의, 337
  당김에 대한 안정성, 240
구현, 참조: 증명 보조기
함의, 40, 115
암묵적 인자, 425

비서술적
W-타입의 인코딩, 173
몫, 197, 338
절단, 123
비술어성, 참조: 수학, 서술적
단순 명제에 대한, 참조: 명제적 크기 재조정
도달 불가능 기수, 10
포함
구간의, 393
부분집합의, 113
귀납적 정의의 지표, 165
동일자의 식별 불가능성, 46, 69
비이산 준범주, 314
귀납 원리, 29, 148, 422
모달리티에 대한, 243
접근 가능성에 대한, 345
귀납적 타입에 대한, 164
Cauchy 실수에 대한, 374
연결 사상에 대한, 233
쌍대곱에 대한, 33
누적 위계에 대한, 355
의존 쌍 타입에 대한, 30
빈 타입에 대한, 33
동치에 대한, 170
호모토피에 대한, 170
동일성 타입에 대한, 46–49, 59
기점을 갖춘, 48
정수에 대한, 199
구간 타입에 대한, 181
자연수에 대한, 37
곱에 대한, 29
$\mathbb{S}^1$ 에 대한, 178, 182
$\mathbb{S}^2$ 에 대한, 184
초현실수에 대한, 399
현수에 대한, 185
토러스에 대한, 188
절단에 대한, 125, 194, 223
불리언 타입에 대한, 34
벡터 타입에 대한, 165
W-타입에 대한, 153
귀납적
피복, 394
정의, 147, 참조: 타입, 귀납적
가설, 38
술어, 165
타입, 참조: 타입, 귀납적
고차, 참조: 타입, 고차 귀납적
타입 족, 165
귀납-귀납적 타입, 166
고차, 372
귀납-재귀적 타입, 167
부등식, 참조: 순서
삼각형, 참조: 삼각 부등식
추론 규칙, 참조: 규칙
무한항
대수적 이론, 205
중위 표기법, 415
비형식적 타입 이론, 6–7
거주된 타입, 45, 109, 111
단순히, 120
시작
귀납적 타입의 대수 특성화, 참조: 호모토피 초기체, 205
순서체, 364
절편, 349, 350
집합, 340
σ-프레임, 365, 389
타입, 참조: 타입, 공
단사, 참조: 함수, 단사
단사 함수, 참조: 함수, 단사
정수, 198, 255, 258
에 대한 귀납 원리, 199
내포적 타입 이론, 52, 99
교환 법칙, 68, 307
교집합
구간의, 393
부분집합의, 116
구간
산술, 366, 408
정의역, 408
기본 …의 족, 393
열리고 닫힌, 387, 391, 395
점별 덮개, 393
위상적 단위, 3
타입, 참조: 타입, 구간
도입 규칙, 26, 422
직관주의 논리, 참조: 논리
역
근사적, 364
(전)범주에서, 303
군에서, 201
왼쪽, 132
경로의, 60
오른쪽, 132
비반사성
실수에 대한 $<$의, 367
체에서의 $<$의, 368
분리성의, 368

정초 관계의, 352
등거리 사상, 319
동형사상
(전)범주에서, 302
에 대한 불변성, 330
자연적, 73, 306
(준)범주의, 311
집합의, 76, 136
반군, 97
을 가로질러 전달, 151
유니터리, 319
반복 루프 공간, 66
반복자
자연수에 대한, 54

J, 참조: 동일성 타입에 대한 귀납 원리
조인
격자에서, 365
타입의, 193, 275
판단, 17, 18, 413
판단적 동등성, 18, 77, 149, 177, 413

k-사상, 58
Kan 복합체, 3, 10, 253, 427
핵, 268
쌍, 289, 334, 337, 376
단체적, 289
클라인 병, 188

λ-추상화, 21, 23, 24, 38, 43, 415
λ-계산법, 2
언어 남용, 참조: 용어의 남용
격자, 365
법칙
드모르간의, 41–42
이중 부정의, 111
배중률의, 참조: 배중률
Lawvere, 6, 7, 52, 171, 172, 245, 333, 342, 359, 409
느슨한 쌍대극한, 206, 207
최소 상계, 참조: 상한
르베그 수, 396, 409
왼쪽
수반, 309
역, 132
가역 함수, 132
보조정리, 17n
평탄화, 206
레벨, 참조: 유니버스 레벨 또는 n-타입
올림
동치, 95
경로, 70
극한
Cauchy 근사의, 369, 372, 388, 390
집합의, 195, 334
타입의, 99, 101, 190
제한된 전지성 원리, 361, 392, 408
선형 사상, 참조: 함수, 선형
선형 순서, 367
립시츠
상수, 378
함수, 378
리스트, 참조: 리스트 타입
리스트 타입, 참조: 타입, 리스트의
로케일, 394
귀납적 덮개의 국소화, 394
국소 데카르트 닫힌 범주, 340
국소 균등 연속 사상, 409
위치 결정성, 364, 365
위치, 409
논리
고전적 대 구성적, 42
구성적, 8
구성적 대 고전적, 8, 40, 107–109, 111–112
직관주의적, 8
단순 명제의, 109–110, 114–116, 119–121
술어, 42
명제적, 40
타입으로서의 명제, 39–45
절단된, 119
논리적 동치, 45
논리 표기법, 전통적, 115
루프, 57, 66, 68
상수, 참조: 경로, 상수
의존 n-, 184, 212, 213
n-, 68, 184, 215, 255, 294
n차원, 참조: 루프, n-
루프 공간, 66, 68, 186, 201, 221, 256, 257, 267, 292, 295
의 함자성, 267
반복된, 66, 68, 184, 187, 201, 221, 222, 255, 267
n겹, 참조: 루프 공간, 반복
하방 Dedekind 실수, 408

마그마, 31, 44
사상, 참조: 함수
섬유별, 참조: 섬유별 변환
스팬의, 229
사상, 참조: 함수
사상 원뿔, 참조: 함수의 원뿔

마르코프 원리, 409
Martin-Löf, 171, 428
매칭, 참조: 패턴 매칭
수학
  고전적, 7, 8, 35, 42, 52, 98, 107, 109–112, 114, 117, 301, 304, 305, 320, 323, 324, 340, 347, 351, 352, 363, 365, 366, 390–396
  구성적, 7–10, 37, 201, 254, 296, 333, 340, 363, 364, 367, 371, 390–396
  형식화된, 2, 5, 6–7, 11, 19n, 62, 136, 166, 254, 298, 406
  서술적, 113, 163, 333, 340, 359, 394
  증명 관련적, 19, 31, 44, 62, 75, 76, 207
소속, 18
소속, 누적 위계에 대한, 355
단순 명제, 109–110, 112–116, 119–121
단순 관계, 196
단순히, 120, 245
  결정 가능한 상등, 220
  거주된, 120
자오선, 184, 189
메타이론, 426–427
거리 공간, 390, 390–409
  완비, 390
  완전 유계, 391
거리적으로 콤팩트, 363, 390
mistaken identity type, 429
양상적
  논리, 245
  연산자, 245, 248
  타입, 244
모달리티, 244, 241–246
  닫힌, 248
  동일성, 245
  열린, 248
모형 범주, 3
모듈러스
  수렴의, 368
  균등 연속성의, 391
모나드, 212, 246
단사적, 참조: 단사 사상
모노, 참조: 단사 사상
모노이드, 201, 201–204
  자유, 202, 213
  준동형사상, 202
단사 사상, 318, 335, 335, 340
단조성, 379
  귀납적 덮개의, 394
사상
  (전)범주에서, 302
  ∞-그루포이드에서, 58
  유니터리, 319
곱셈
  군에서, 201
  모노이드에서, 201
  기수의, 342
  Cauchy 실수의, 387
  Dedekind 실수의, 366
  자연수의, 54
  순서수의, 360
상호 귀납적 타입, 166

ℕ-대수, 155
  호모토피 시작(h-시작), 155
n-연결된
  선택 공리, 247
  함수, 참조: 함수, n-연결
  타입, 참조: 타입, n-연결된
n차원 루프, 참조: 루프, n-
n차원 경로, 참조: 경로, n-
ℕ-준동형사상, 155
n-상, 237
n-루프, 참조: 루프, n-
n-경로, 참조: 경로, n-
n-구면, 참조: 타입, n-구면
n-절단된
  함수, 237
  타입, 참조: n-타입
n-절단, 참조: 절단
n-타입, 8, 106–107, 215, 215–241
  타입 이론에서 정의 가능한, 123
자연적
  동형사상, 306
  변환, 128, 306, 321
자연수, 35–38, 92–94, 148, 199, 424
  호모토피 시작 대수로서, 155
  W-타입으로 인코딩된, 152, 161
  List($\mathbf{1}$)로 인코딩된, 151
  의 동형 정의, 150
호모토피의 “자연성”, 74
부정, 40, 111
음의
  타입, 90
비의존 제거자, 참조: 재귀 원리
비확장 함수, 384
비엄격 순서, 385, 397
공집합이 아닌 부분집합, 347, 352
정규형, 427

정규화 가능한 항, 427
정규화, 427
    강한, 427
표기법, 남용, 참조: 표기법의 남용
명사, 120
0항
    쌍대곱, 참조: 타입, 공
    곱, 참조: 타입, 단위
수
    기수, 참조: 기수
    정수, 198
    자연적, 참조: 자연수
    서수, 참조: 서수
    유리수, 참조: 유리수
    실수, 참조: 실수
    초현실수, 참조: 초현실수
NuPRL, 참조: 증명 보조기

대상
    분류자, 141, 144
    (전)범주에서, 302
    부분 종대상, 참조: 단순 명제
팔면체 공리, 불안정, 145
홀수 위수 정리, 5
Ω-구조, 참조: 구조
열린
    절단, 364
    구간, 387
    모달리티, 248
    문제, 10–11, 101, 247, 298, 299, 407, 426, 427
    관계, 379
오페라드, 66
연산자
    선택, 참조: 선택 연산자
    귀납법, 참조: 귀납 원리
    양상적, 참조: 모달리티
(전)범주의 반대 범주, 315
초현실수의 선택지, 397
순서
    선형, 367
    비엄격, 343, 385, 397
    엄격한, 368, 385, 397
    약선형, 367, 368
순서 조밀, 참조: 조밀한
순서체, 363, 368, 388
    허용 가능, 369, 389
    아르키메데스적, 368, 368, 385, 409
서수, 350, 345–354, 399
    풍만, 362, 410
    유사-, 410
    의 삼분성, 351
직교 분해 체계, 215, 236–240, 245, 337

쌍
    의존, 29
    순서가 있는, 26
    순서 없는, 357
역설, 23, 113, 162
평행 경로, 58
매개변수
    귀납적 정의의, 165
    공간, 19
괄호, 21, 22
부분 순서, 304, 367
경로, 45, 58, 60–68
    2-, 57, 58, 66
    2차원, 참조: 경로, 2-
    3-, 58, 58, 66
    3차원, 참조: 경로, 3-
    에 대한 의존 함수의 적용, 71
    에 대한 함수의 적용, 68
    합성, 61
    이어붙이기, 61
        n겹, 200
    상수, 46, 49
    생성자, 175
    의존, 72, 178
        의존 함수 타입에서, 86
        함수 타입에서, 85
        동일성 타입에서, 89
    의 끝점, 58
    올뭉치, 257
    귀납법, 46–49
    기반 귀납법, 48
    역, 60
    올림, 70
    n-, 66, 101, 184, 212
    n차원, 참조: 경로, n-
    평행, 58
    시작점, 58
    위상적, 3, 57
패턴 매칭, 38–39, 53, 164, 428
페아노, 171
오각형, 매클레인, 58, 308
(P, H)-구조, 참조: 구조
Π-타입, 참조: 타입, 의존 함수
ΠW-준토포스, 340
풍만

서수, 362, 410
후속자, 362
점
생성자, 175
타입의, 18
점 있는
사상, 267
의 핵, 268
술어, 168
타입, 참조: 타입, 점 달린
점 없는 위상수학, 394
점별
피복, 393
함수의 동등성, 83
함수성, 54
함수에 대한 연산, 84
극성, 90
극, 184
다형 함수, 25
다항 함자, 참조: 자기 함자, 다항
부분 순서 집합, 304
양성
유리수, 364
타입, 90
양성 조건, 엄격, 참조: 엄격 양성
포스트니코프 탑, 8, 222
멱집합, 35, 114, 162, 197, 338, 340, 347, 359, 394
준-2-범주, 331
준쌍범주, 331
준범주, 302
†-, 319
의 동치, 310
의 동형사상, 311
함자의, 306
(P, H)-구조의, 320
타입의, 304
반대, 315
의 곱, 315
슬라이스, 참조: 범주, 슬라이스
선행자, 148, 154
함수, 절단된, 178
$\mathbb{Z}$ 위의 동형사상, 258
술어
귀납적, 165
논리, 42
점 있는, 168
서술적 수학, 참조: 수학, 서술적
준그루포이드, 기본, 참조: 기본 준그루포이드
준순서, 304
기수의, 344
표시
군의, 205, 291
생성자들에 의한 양의 타입의, 90
CW 복합체로서의 공간의, 5
∞-그루포이드의, 176, 255
준스택, 331
준토포스, 참조: ΠW-준토포스
소수, 119
원시적
상수, 415
재귀, 35
원리, 참조: 공리
유일성, 참조: 유일성 원리
곱
(준)범주의, 315
타입의, 참조: 타입, 곱
프로그래밍, 2, 9, 22, 150, 246
사영
데카르트 곱 타입에서, 27
의존 쌍 타입에서, 30
사영 평면, 188
증명, 18, 39–45
보조기, 2, 6, 7, 52, 212, 254, 326, 413
NuPRL, 123
Agda, 53
Coq, 53, 100, 124
귀류법에 의한, 40, 42, 111
증명 관련적 수학, 참조: 수학, 증명 관련적
명제
타입으로서, 7, 39–45, 107–109
단순, 참조: 단순 명제
명제적
동등성, 18, 45
논리, 40
크기 재조정, 113, 123, 125, 163, 333, 340, 355, 365, 394, 397
절단, 참조: 절단
유일성 원리, 참조: 유일성 원리, 명제적
명제적 크기 재조정, 338
유사-서수, 410
당김, 99, 102, 141, 190, 217, 334
순수하게, 120, 245, 246
푸시아웃, 190–193, 272, 297
n-타입에서, 228
집합의, 195

양화사, 42, 115
유계, 358

존재, 42, 114, 115, 365
보편적, 42, 114, 115
준역원, 75, 128–130
퀼런 모형 범주, 3, 253
집합의 몫, 참조: 집합 몫

유리수, 364
Cauchy 실수로서, 372
이진, 364, 398
양성, 364
실수, 363–410
일치합니다, 390
Cauchy, 372, 371–390
Dedekind, 365, 364–370, 389–390
하측, 408
상부, 408
Escardó–Simpson, 407
확장된, 408
호모토피적, 262
점화식, 36, 148, 171
재귀
원시적, 35
구조적, 415
재귀 원리, 149
모달리티에 대한, 243
귀납적 타입에 대한, 163
데카르트 곱에 대한, 27
Cauchy 실수에 대한, 377
쌍대곱에 대한, 32
의존 쌍 타입에 대한, 30
빈 타입에 대한, 33
구간 타입에 대한, 181
자연수에 대한, 35
$\mathbb{S}^1$에 대한, 177, 180
$\mathbb{S}^2$에 대한, 183
현수에 대한, 184
절단에 대한, 115, 194, 223
불리언 타입에 대한, 33
재귀 호출, 36
재귀자, 참조: 재귀 원리
레드 헤링 원리, 318
자유군의 기약 단어, 204
환원
β-, 참조: β-축약
자유군의 단어의, 204
반영 규칙, 99
반영적
부분범주, 224
부분유니버스, 241
반사성
관계의, 197, 219
등식의, 46
귀납적 덮개의, 394
정칙
범주, 334
에피사상, 334
관계
반대칭적, 304, 401
양측 전체, 361, 361
공추이적, 368
유효 동치, 338, 337–339
동치, 197
외연적, 348
비반사적, 352, 367, 368
단순, 196
단조, 379
열린, 379
반사적, 197, 219
둥근, 참조: 둥근 관계
의 분리된 족, 377
대칭적, 197
추이적, 197
정초된, 346
표현 가능 함자, 317, 317
크기 재조정, 123, 338, 355
명제적, 참조: 명제적 크기 재조정
수축
함수의, 137–139, 232
타입의, 122, 144, 216
수축 사상, 122, 136, 216
재작성 규칙, 426
Rezk 완비화, 참조: 완비화, 레즈크
오른쪽
수반, 309
역, 132
가역 함수, 132
환, 364, 366–368
둥근
Dedekind 절단, 364, 365, 408
관계, 379, 383
규칙, 17, 419
허용 가능, 420
계산, 참조: 계산 규칙
제거, 참조: 제거자
형성, 26, 421
서론, 26, 422
치환의, 420
약화의, 420

재작성, 426
구조적, 420–421
공리와의 비교, 20, 177n
타입 이론의 규칙, 413–426
Russell, Bertrand, 1, 123

슈뢰더–베른슈타인 정리, 344
범위, 21, 25, 29, 415
스콧, 172
단면, 122
타입 족의, 71
Segal
범주, 330
공간, 330
절편, 시작, 참조: 시작 절편
반군, 44, 94
구조, 94
반환, 54, 343
분리 가능한 클래스, 358
관계의 분리된 족, 377
분리
Δ_0, 358
충만, 359
열, 59, 163, 389, 390, 392
Cauchy, 참조: Cauchy 수열
완전, 269, 271, 294
섬유, 267, 266–271
집합, 5–6, 105–107, 136, 194–196, 216, 219–221, 303, 333–362
누적 위계에서, 355
집합론
대수적, 333, 360
체르멜로–프렝켈, 5, 17, 205, 333, 359
집합 쌍대동등자, 334, 335
집합 푸시아웃, 195
집합 몫, 196–200, 212, 337–339
세토이드, 124, 212, 340
σ-프레임
시작, 365, 389
Σ-타입, 참조: 타입, 의존 쌍
시그니처
1차, 322
대수적 이론의, 205
단체적
핵, 289
집합, 3, 253, 330
단순성 정리, 399
단일 연결 타입, 232
시뮬레이션, 348
유계, 350
한원소 타입, 참조: 타입, 한원소
골격적 범주, 304
뼈대
CW 복합체의, 188, 289, 291
슬라이스 (전)범주, 참조: 범주, 슬라이스
작은
클래스, 355
집합, 303
타입, 4, 23
스매시 곱, 193
출발점
함수의, 참조: 정의역
경로 생성자의, 175, 188, 211
공간
거리 함수, 참조: 거리 공간
위상적, 참조: 위상 공간
스팬, 190, 195, 228, 272
구면 타입, 참조: 타입, 구면
분할
본질적으로 전사인 함자, 310
전사, 참조: 함수, 분할 전사
스포크, 참조: 허브와 스포크
제곱 함수, 387
스쿼시 타입, 참조: 절단, 명제적
안정성
및 하강, 207
구면의 호모토피 군의, 282
당김에 대한 상의, 241
스택, 328, 330, 331
완비화, 330
stages, five, of accepting constructive mathematics, 429
경로의 시작점, 58
엄격한
범주, 301, 318, 331
순서, 368, 385, 397
양성 조건, 163, 210, 397
강한
모음, 359, 361
귀납법, 347
정규화, 427
구조적
재귀, 415
규칙, 420–421
집합론, 340
구조
의 준동형사상, 320
Ω-의 준동형사상, 322

동일성 원리, 321, 320–322
개념, 320
Ω-, 322
(P,H)-, 320
(P,H)-의 준범주, 320
반군, 94
표준 개념, 320
구간들의 유한 부분족, 393
부분 대상 분류자, 340
부분집합, 113
모음, 359
누적 위계 위의 관계, 355
부분 싱글턴, 참조: 단순 명제
치환, 20, 22, 414
부분 종대상, 참조: 단순 명제
부분 타입, 44, 113
부분유니버스, 반영적, 241
후속자, 35, 94, 148, 152, 154
$\mathbb{Z}$ 위의 동형사상, 257, 258
순서수의, 351, 362
풍만, 362
합
의존, 참조: 타입, 의존 쌍
서로소, 참조: 타입, 쌍대곱
수의, 참조: 덧셈
상한
W-타입의 생성자, 153
균등 연속 함수의, 391
전사, 참조: 함수, 전사
분할, 참조: 함수, 분할 전사
전사적
함수, 참조: 함수, 전사
분할, 참조: 함수, 분할 전사
초현실수, 397, 396–407
현수, 184–187, 193
대칭성
관계의, 197
등식의, 60
종합적 수학, 58, 253
체계, 동일성, 참조: 동일성 체계

대상
함수의, 참조: 공역
경로 생성자의, 175, 188, 211
항, 18
닫힌, 427
의 변환 가능성, 415
의 정규형, 427
정규화 가능, 427
강정규화 가능, 427
종
타입, 참조: 타입, 단위
정리, 17n
Blakers–Massey, 297
Cantor의, 345
콘웨이의 0, 400
콘웨이의 단순성, 399
Diaconescu의, 341
Feit–Thompson, 5
4색, 7
프로이덴탈 현수, 277–282
헤드베리의, 123, 220
홀수 위수, 5
슈뢰더–베른슈타인, 344
판 캄펀, 283–291, 331
화이트헤드의, 291
이론
대수적, 205
본질적으로 대수적인, 205
티어니, 245
와 함께, 31
위상적
경로, 3, 57
공간, 2, 3, 57, 253
위상
형식적, 395
Lawvere-Tierney, 245
점 없는, 394
토포스, 9, 124, 245, 330, 333, 340, 342, 359
불리언, 342
고차, 참조: $(\infty,1)$-토포스
토러스, 188, 189, 213, 290
에 대한 귀납 원리, 188
전체
재귀적 정의, 415
관계, 407
공간, 70, 81, 139, 257, 262, 267, 277
완전 유계 거리 공간, 391
전통적인 논리 표기법, 115
변환
섬유별, 참조: 섬유별 변환
자연적, 참조: 자연 변환
추이성
실수에 대한 $<$의, 367
실수에 대한 $\leq$의, 367
초현실수에 대한 $<$의, 405
초현실수에 대한 $\leq$의, 405
체에서의 $<$의, 368

관계의, 197
등식의, 61
귀납적 덮개의, 394
수송, 69–73, 81, 86
쌍대곱 타입에서, 92
의존 함수 타입에서, 84
의존 쌍 타입에서, 82
함수 타입에서, 84
동일성 타입에서, 89
곱 타입에서, 80
단위 타입에서, 83
트리, 정초된, 152
삼각형
동일성, 309
$\mathbb{R}_c$에 대한 부등식, 383
순서수의 삼분성, 351
참, 40, 115
절단
n-절단, 196, 222–227
명제적, 115–116, 193–194
집합, 194–196
type
mistaken identity, 429
타입
∞-절단된, 294
2-구면, 176, 183–184
괄호, 참조: 절단, 명제적
데카르트 곱, 참조: 타입, 곱
원, 175, 177–183, 185, 426
쌍대동등자, 206
쌍대극한, 99, 190
연결된, 232
축약 가능, 121–123
쌍대곱, 32–33, 33, 34, 54, 90–92, 423
결정 가능, 112
의존, 참조: 타입, 의 족
의존 함수, 24–25, 83–86, 421
의존 쌍, 29–32, 81–83, 98, 422
의존 합, 참조: 타입, 의존 쌍
비어 있음, 32–33, 99, 152, 423
동등성, 참조: 타입, 동일성
f-국소적, 248
…의 족, 24, 34, 69–73
상수, 24
결정 가능, 112
귀납적, 165
함수, 20–23, 83–86, 421
고차 귀납적, 5, 175–213
호모토피 귀납적, 158
초완비, 294
동일성, 45–52, 60–68, 88–89, 99, 424–425
귀납적인 것으로서, 167
귀납적, 147–149, 161–167
일반화, 165
귀납-귀납적, 166
귀납-재귀적, 167
거주된, 참조: 거주된 타입
구간, 181–182
극한, 99, 190
양상적, 244
상호 귀납적, 166
n-연결된, 232
n-구면, 184, 186, 187, 282
n-절단된, 참조: n-타입
n-타입, 참조: n-타입
음의, 90
불리언의, 33–35
기수의, 342
리스트의, 148, 150, 152, 165, 171, 202, 391
원소의, 356
자연수의, 참조: 자연수
벡터의, 165
Π-, 참조: 타입, 의존 함수
점 있는, 68, 184
양성, 90
곱, 25–29, 54, 78–80, 97, 422
푸시아웃, 참조: 푸시아웃
몫, 참조: 집합 몫
Σ-, 참조: 타입, 의존 쌍
단일 연결, 232
한원소, 49, 121
작은, 4, 23
스쿼시, 참조: 절단, 명제적
부분집합, 113
의 현수, 참조: 현수
의 절단, 참조: 절단
단위, 25–29, 33, 83, 99, 121, 151, 152, 424
유니버스, 23–24, 86–87, 107, 416, 421
누적적, 23
레벨, 참조: 유니버스 레벨
Russell 스타일, 53
타르스키식, 53
유니밸런트, 86
W-, 참조: W-타입
type theory
unintentional, 429
타입 이론, 2, 17
외연적, 52, 99

형식적, 6–7, 413–428
비형식적, 6–7, 20
내포적, 52, 99
전형적 모호성, 23, 351, 365, 416, 425

UIP, 참조: 동일성 증명의 유일성
같지 않은, 52
균등 연속 함수, 391
unintentional type theory, 429
합집합
서로소, 참조: 타입, 쌍대곱
부분집합의, 116
유일한
선택, 118–119
분해 체계, 236–240, 245
유일성
동일성 증명의, 52, 219
동일성 타입의, 150
원리, 26, 52, 422
의존 함수 타입에 대한, 24
함수 타입에 대한, 22, 53
함수 사이의 동일성에 대한, 84
곱 타입에 대한, 52
원리, 명제적, 26
모달리티에 대한, 243
의존 쌍 타입에 대한, 82
푸시아웃 위의 함수에 대한, 191
절단 위의 함수에 대한, 223
$\mathbb{N}$ 위의 함수에 대한, 149
원 위의 함수에 대한, 180
W-타입 위의 함수에 대한, 154
호모토피 W-타입에 대한, 159
쌍 사이의 동일성에 대한, 79
곱 타입에 대한, 28, 79
유니벌런스에 대한, 87
단위
구간, 3
경로 이어붙이기에 대한 법칙, 63
군의, 201
모노이드의, 201
환의, 366, 368
수반의, 309
타입, 참조: 타입, 단위
유니터리 사상, 319
유니벌런스 공리, 1, 4, 8, 78, 86, 95, 100, 108, 142, 151, 170, 256, 303, 425
의 구성성, 10
유니벌런트 유니버스, 86
보편적
피복, 258–259
성질, 97–99
W-타입의, 157
모달리티의, 244
데카르트 곱의, 97
쌍대곱의, 101
의존 쌍 타입의, 98, 207
자유군의, 203
동일성 타입의, 99
거리 완비화의, 409
자연수의, 155
푸시아웃의, 192, 195, 230
Rezk 완비화의, 326
$\mathbb{S}^1$ 의, 180
집합 쌍대동등자의, 335
$\mathbb{S}^n$ 의, 187
현수의, 187
절단의, 195, 223
양화사, 참조: 양화사, 전칭
보편 성질, 152
유니버스, 참조: 타입, 유니버스
유니버스 레벨, 23, 302, 350, 353, 365
위 Dedekind 실수, 408

값
함수의, 21
진리, 35
판 캄펀 정리, 283–291, 331
변수, 19, 21, 24, 38, 41, 43, 153, 164, 414, 415, 420
및 치환, 414
한계, 22, 414, 422
포획된, 22
더미, 22
문맥에서, 414
의 범위, 21, 415
타입, 162, 165
경로 생성자를 따라 변화하기, 179
벡터, 165
에 대한 귀납 원리, 165
공간, 319, 387
쌍대뿔의 꼭짓점, 191

W-대수, 156
W-준동형사상, 157
W-타입, 153
호모토피 시작 대수로서, 156
비서술적 인코딩, 173
약한 동치
준범주의, 311, 324–329, 353

타입의, 294
약선형 순서, 367, 368
쐐기합, 193, 278
정초된
귀납법, 346
관계, 346
위스커링, 67, 221
화이트헤드의
원리, 292–294
정리, 291
감김
사상, 257
수, 260
증거
명제의 참에, 18, 39

요네다
매장, 316
보조정리, 168, 316, 315–318

체르멜로-프렝켈 집합론, 참조: 집합론
영, 35, 148, 152, 154
사상, 267
ZF, 참조: 집합론
ZF-대수, 362
ZFC, 참조: 집합론
지그재그 항등식, 309

서론에서 :

호모토피 타입 이론은 서로 다른 여러 분야의 측면을 놀라운 방식으로 결합하는 새로운 수학 분야입니다. 이 이론은 최근에 발견된 호모토피 이론과 타입 이론 사이의 연관성에 기반합니다. 이 이론은 구면의 호모토피 군, 타입 검사 알고리즘, 약한 ∞-그루포이드의 정의처럼 겉보기에는 서로 동떨어진 주제들을 다룹니다.

호모토피 타입 이론은 수학의 기초 그 자체에 새로운 아이디어를 가져옵니다. 한편으로는 보에보츠키(Voevodsky)의 정교하고 아름다운 유니밸런스 공리가 있습니다. 유니밸런스 공리는 특히 동형인 구조들을 동일시할 수 있음을 함의합니다. 이는 기존 기초론의 "공식적인" 교리와 양립하지 않음에도 수학자들이 일상적인 연구에서 기꺼이 사용해 온 원리입니다. 다른 한편으로는 고차 귀납적 타입이 있습니다. 고차 귀납적 타입은 구면, 원기둥, 절단, 국소화 등 호모토피 이론의 기본적인 공간과 구성 가운데 일부를 직접적이고 논리적으로 기술합니다. 두 아이디어 모두 고전적인 집합론적 기초에서는 직접 포착할 수 없지만, 호모토피 타입 이론에서 결합되면 완전히 새로운 종류의 "호모토피 타입의 논리"를 가능하게 합니다.

이는 내재적인 호모토피적 내용을 지닌 수학 기초에 대한 새로운 관점, 즉 수학적 대상에 대한 "불변적" 관점 — 그리고 현업 수학자에게 실질적인 도움이 될 수 있는 편리한 기계 구현을 시사합니다. 이것이 바로 유니밸런트 기초 프로그램입니다.

이 책은 유니밸런트 기초의 기본 사항에 대한 최초의 체계적인 해설이자 이 새로운 추론 방식의 예시 모음이 되고자 합니다 — 다만 독자가 형식 논리를 알거나 배울 필요도, 컴퓨터 증명 보조기를 사용할 필요도 없습니다. 저희는 유니밸런트 기초가 결국 대부분의 수학자가 수행하는 비형식화된 수학을 위한 "암묵적 기초"로서 집합론을 대체할 수 있는 실질적인 대안이 되리라고 믿습니다.

HomotopyTypeTheory.org에서 이 책을 무료로 받으십시오.

